PSI* 2025-2026, Mathématiques DS n°5 TYPE ccINP: Correction

EXERCICE 1

Pour $x \neq 0$ au voisinage de 0 :
$f(x) = \frac{1-cos(x^2)}{x^4} = \frac{1-(1-\frac{x^4}{2}+o(x^4))}{x^4} = \frac{1}{2} + o(1)$
Comme f est continue en 0 alors : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = \lambda$ donc $\boxed{\lambda = \frac{1}{2}}$

On sait d'après le cours que : $\forall X \in \mathbb{R}$, $cos(X) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n X^{2n}}{(2n)!}$
On a alors pour $x \neq 0$ (en posant $X = x^2$) :
$f(x) = \frac{1-\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (x^2)^{2n}}{(2n)!}}{x^4} = \frac{1-1-\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{4n}}{(2n)!}}{x^4} = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{4n-4}}{(2n)!} = -\sum\limits_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1} x^{4p}}{(2p+2)!} = \sum\limits_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p x^{4p}}{(2p+2)!}$
On remarque que la relation ci-dessus est valable sur $\mathbb{R}$, y compris en $x = 0$ à cause de la valeur de λ.
On a donc f développable en série entière en 0, de rayon de convergence $+\infty$, et on a donc :
$\boxed{f \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}}$

EXERCICE 2

1°) En tant que série entière, y est C^∞ sur $]-R;R[$ et dérivable terme à terme.
On a donc : $\forall x \in]-R;R[$, $y'(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ et $y''(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$

(1) $\Leftrightarrow y$ solution de Eq sur $]-R;R[$
$\Leftrightarrow \forall x \in]-R;R[$, $x^2 y''(x) + 4xy'(x) + (2+x^2)y(x) = 1$
$\Leftrightarrow \forall x \in]-R;R[$, $x^2 \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 4x \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + (2+x^2) \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 1$
$\Leftrightarrow \forall x \in]-R;R[$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} 4n a_n x^n + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} 2a_n x^n + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} = 1$
On peut regrouper les premières séries entières car elles convergent puisque leur rayon de convergence est le même à savoir R.
(1) $\Leftrightarrow \forall x \in]-R;R[$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} [n(n-1)+4n+2]a_n x^n + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} = 1$
On effectue le changement d'indice $p = n$ dans la première somme et $p = n+2$ dans la deuxième.
(1) $\Leftrightarrow \forall x \in]-R;R[$, $\sum\limits_{p=0}^{+\infty} [p(p-1)+4p+2]a_n x^p + \sum\limits_{p=2}^{+\infty} a_{p-2} x^p = 1$
$\Leftrightarrow \forall x \in]-R;R[$, $2a_0 + 6a_1 x + \sum\limits_{p=2}^{+\infty} [p^2+3p+2]a_p x^p + \sum\limits_{p=2}^{+\infty} a_{p-2} x^p = 1$
On a sorti les termes pour $p = 0$ et $p = 1$. On peut regrouper les premières séries entières car elles convergent puisque leur rayon de convergence est le même à savoir R.
(1) $\Leftrightarrow \forall x \in]-R;R[$, $(2a_0 - 1) + 6a_1 x + \sum\limits_{p=2}^{+\infty} [(p^2+3p+2)a_p + a_{p-2}]x^p = 0$
Par unicité du développement en série entière en 0, comme $R > 0$.
(1) $\Leftrightarrow a_0 = \frac{1}{2}$ $a_1 = 0$ $\forall p \geq 2$ $a_p = \frac{-1}{p^2+3p+2} \Leftrightarrow a_0 = \frac{1}{2}$ $a_1 = 0$ $\forall p \geq 2$ $a_p = \frac{-1}{(p+1)(p+2)}$

On a donc : $\boxed{a_0 = \frac{1}{2} \text{ et } a_1 = 0 \text{ et } \forall n \geq 2 \ \ a_n = \frac{-1}{(n+1)(n+2)}}$

2°) Démontrons par récurrence la propriété $HR_p \Leftrightarrow a_{2p} = \frac{(-1)^p}{(2p+2)!}$ et $a_{2p+1} = 0$

Initialisation : $HR_0 \Leftrightarrow a_0 = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$ et $a_1 = 0$ par le 1°). On a donc HR_0

Hérédité : on suppose HR_{p-1} vraie et on démontre HR_p
D'après le 1°) : $a_{2p} = \frac{-a_{2p-2}}{(2p+1)(2p+2)}$ et $a_{2p+1} = \frac{-a_{2p-1}}{(2p+2)(2p+3)}$
On utilise HR_{p-1} : $a_{2p} = \frac{-1}{(2p+1)(2p+2)}\frac{(-1)^{p-1}}{(2p)!} = \frac{(-1)^p}{(2p+2)!}$ et $a_{2p+1} = \frac{0}{(2p+2)(2p+3)} = 0$

Conclusion : $\boxed{\forall p \in \mathbb{N}\ ,\ a_{2p} = \frac{(-1)^p}{(2p+2)!} \text{ et } a_{2p+1} = 0}$

3°) A partir du 2°°, il reste : $y(x) = \sum\limits_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+2)!}x^{2p}$
On a donc : $\forall x \in]-R;R[\ ,\ x^2y(x) = \sum\limits_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+2)!}x^{2p+2} = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$ (on a fait $n = p+1$)

Donc $x^2y(x) = 1 - \underbrace{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}}_{cos(x)}$ On reconnaît alors le développement en série entière en 0 de cos

On en déduit : $\boxed{R = +\infty \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}\ ,\ y(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \\ \frac{1-cos(x)}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}}$

EXERCICE 3

1°) Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A alors :
$||C_1|| = \frac{1}{9}(2^2+1^2+2^2) = 1$, $||C_2|| = \frac{1}{9}(2^2+2^2+1^2) = 1$, $C_1.C_2 = \frac{1}{9}(4-2-2) = 0$ De plus $C_1 \wedge C_2 = C_3$
On en déduit que les colonnes de A forment une base orthonormée directe et donc que $A \in SO_3(\mathbb{R})$.
On en déduit que φ est une rotation puisque les seules isométries vectorielles de $\mathbb{R}^3$ sont les rotations.

Recherche de l'axe :

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+2y-z=0 \\ -x-y+2z=0 \\ 2x-y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=z \\ x=z \\ 0=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z \quad \text{Posons } u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

φ est donc une rotation d'axe orienté $\mathbb{R}u$ et d'angle θ.

Soit $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ alors $x \perp u$ et donc d'après le cours : $\varphi(x) = cos(\theta)x + sin(\theta)\frac{u}{||u||} \wedge x$

$$A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = cos(\theta)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + sin(\theta)\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = cos(\theta)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + sin(\theta)\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} sin(\theta) = \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ cos(\theta) = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{On en déduit que } \theta = -\frac{\pi}{3}$$

Bilan : $\boxed{\varphi \text{ est la rotation d'axe orienté } \mathbb{R}u \text{ et d'angle } \theta \text{ avec } u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \theta = \frac{-\pi}{3}}$

2°) L'axe de la rotation Φ étant $\mathbb{R}i$ la base $B=(i,j,k)$ est adaptée à ϕ et donc
$C = M_B(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\frac{\pi}{2}) & -sin(\frac{\pi}{2}) \\ 0 & sin(\frac{\pi}{2}) & cos(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ On a donc $\boxed{C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$

3°) Soit $(u,v) \in E^2$. Montrons que $F(u \wedge v) = F(u) \wedge F(v)$
Soit $w \in E$, alors comme F est bijective, il existe $x \in E$ tel que $w = F(x)$ Alors :
$(F(u) \wedge F(v)).w$
$= (F(u) \wedge F(v)).F(x)$ car $w = F(x)$
$= Det(F(u), F(v), F(x))$ par définition du produit vectoriel
$= det(F)Det(u,v,x)$ par propriété du déterminant
$= Det(u,v,x)$ car $det(F) = 1$ puisque F est une rotation.
$= (u \wedge v).x$ par définition du produit vectoriel
$= F(u \wedge v).F(x)$ car F conserve le produit scalaire
$= F(u \wedge v).w$ car $F(x) = w$

Donc : $\forall w \in E$, $(F(u) \wedge F(v)).w = F(u \wedge v).w \Leftrightarrow (F(u) \wedge F(v) - F(u \wedge v)).w$
En prenant $w = F(u) \wedge F(v) - F(u \wedge v)$ on obtient $w.w = 0$ donc $w = 0_E$ et donc $F(u) \wedge F(v) = F(u \wedge v)$
Ceci pour tout u et v, donc F conserve le produit vectoriel.

Bilan : $\boxed{\text{Dans } \mathbb{R}^3\text{, les rotations conservent le produit vectoriel.}}$

4°) h est une isométrie vectorielle car c'est une composée d'isométries vectorielles.
De plus $det(H) = det(f)det(g)det(f)^{-1} = det(g) = 1$ et donc h est une rotation puisque les seules isométries directes de $\mathbb{R}^3$ sont les rotations.

$h(f(v)) = f(g(f^{-1}(f(v)))) = f(g(v)) = f(v)$ car $g(v) = v$.
Donc $h(f(v)) = f(v)$ et donc $f(v) \neq 0$ est un vecteur directeur de l'axe de h.

On a donc $\boxed{h \text{ est une rotation d'axe orienté } \mathbb{R}f(v)}$

Remarque $f(v)$ est unitaire car v l'est et que f conserve la norme.

5°) a) f est une isométrie, donc f est inversible, donc $y = f(x)$ avec $x = f^{-1}(y)$

5°) b) $y \perp f(v)$ axe de h, donc, d'après le cours : $h(y) = cos(\beta)y + sin(\beta)f(v) \wedge y$
$\Leftrightarrow \boxed{h(y) = cos(\beta)f(x) + sin(\beta)f(v) \wedge f(x)}$

5°) c) $h(y) = h(f(x)) = f(g(f^{-1}(f(x)))) = f(g(x))$
Comme on sait que $< y, f(v) >= 0$ alors $< f(x), f(v) >= 0$ et comme f conserve le produit scalaire alors a $< x, v >= 0$
x est donc orthogonal à l'axe de g et on a par le cours : $g(x) = cos(\theta)x + sin(\theta)v \wedge x$
Donc $h(y) = f(g(x)) = f(cos(\theta)x + sin(\theta)v \wedge x)$ et comme f est linéaire :
$h(y) = cos(\theta)f(x) + sin(\theta)f(v \wedge x)$ et comme f conserve le produit vectoriel (cf 3°) alors :
$\boxed{h(y) = cos(\theta)f(x) + sin(\theta)f(v) \wedge f(x)}$

5°) d) Avec le b) et le c), on a :
$cos(\theta)y + sin(\theta)f(v) \wedge y = cos(\beta)y + sin(\beta)f(v) \wedge y$
$\Rightarrow (cos(\theta) - cos(\beta))y + (sin(\theta) - sin(\beta))f(v) \wedge y = 0_E$

On peut choisir y pour que $(f(v) \wedge y, y)$ soit libre et on a alors $cos(\theta) = cos(\beta)$ et $sin(\theta) = sin(\beta)$ et donc $\boxed{\theta = \beta}$ (à 2π près)

6°) On applique ce qui précède avec $g = \varphi$ et $f = \phi$, on a donc :
$\theta = \frac{-\pi}{3}$, $v = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\phi(v) = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

$$\boxed{\phi \circ \varphi \circ \phi^{-1} \text{ est donc la rotation d'axe orienté } \mathbb{R}\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \text{ et d'angle } \frac{-\pi}{3}}$$

Problème 1 : Dunford

1)a) On a : i) $A_1 = \Delta_1 + N_1$ de manière directe.
ii) Δ_1 est diagonalisable puisqu'elle est diagonale
iii) $(N_1)^2 = 0_2$ donc N_1 est nilpotente
iv) $\Delta N_1 = N_1\Delta = \begin{pmatrix}0 & 6\\0 & 0\end{pmatrix}$ donc N_1 et Δ_1 commutent

$\boxed{(\Delta_1, N_1) \text{ est une donc une décomposition de Dunford de } A_1.}$

1)b) $\Delta_2 N_2 = \begin{pmatrix}0 & 3\\0 & 0\end{pmatrix}$ et $N_2\Delta_2 = \begin{pmatrix}0 & 2\\0 & 0\end{pmatrix}$ donc $\Delta_2 N_2 \neq N_2\Delta_2$ et donc le point iii) n'est pas vérifié,
$\boxed{(\Delta_2, N_2) \text{ n'est donc pas une décomposition de Dunford de } A_2.}$
2) A_3 est diagonalisable, donc si on pose $\Delta_3 = A_3$ et $N_3 = 0_n$ alors :
$\boxed{(\Delta_3, N_3) \text{ est une décomposition de Dunford évidente de } A_3}$

3) A_4 et nilpotente, donc si on pose $N_4 = A_4$ et $\Delta_4 = 0_n$ alors :
$\boxed{(\Delta_4, N_4) \text{ est une décomposition de Dunford évidente de } A_4}$

4) $\Delta A = \Delta(N + \Delta) = \Delta N + \Delta^2$ mais comme Δ et N commutent alors :
$\Delta A = N\Delta + \Delta^2 = (N + \Delta)\Delta = A\Delta$ $\boxed{\text{Donc } \Delta \text{ et } A \text{ commutent.}}$
De même $NA = N(N + \Delta) = N^2 + N\Delta = N^2 + \Delta N = N(N + \Delta) = NA$ et donc $\boxed{N \text{ et } A \text{ commutent.}}$

5)a) Soit P le polynôme caractéristique de Δ alors :
$P(X) = det(XI_3 - \Delta) = \begin{vmatrix}X-2 & 0 & 0\\1 & X-3 & -1\\1 & -1 & X-3\end{vmatrix}$ En développant par rapport à la première ligne :
$P(X) = (X - 2)((X - 3)^2 - 1) = (X - 2)(X - 4)(X - 2) = (X - 2)^2(X - 4)$
Comme $\lambda \in sp(\Delta) \Leftrightarrow P(\Delta) = 0$ alors on en déduit que $sp(\Delta) = \{2; 4\}$

- Cherchons les sous espaces propres

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2 = ker(\Delta - 2I_3) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow -x + y + z = 0$$

On peut écrire $E_2 = Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2 = ker(\Delta - 4I_3) \Leftrightarrow \begin{cases} -2x = 0 \\ -x - y + z = 0 \\ -x + y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$$

On peut écrire $E_4 = Vect(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$

$dim(E_2) + dim(E_4) = 2 + 1 = 3$ et $\Delta \in M_3(\mathbb{R})$ donc Δ est diagonalisable.
On obtient une base diagonalisant Δ par réunion des bases des sous espaces propres.
Par la formule de changement de bases :

$$\boxed{\Delta = PDP^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}$$

5)b) $\det(\Delta) = 4 \times 2 \times 2 = 16 \neq 0$ et donc $\boxed{\Delta \text{ et inversible.}}$

5)c) $\Delta = PDP^{-1} \Rightarrow \Delta^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$

Donc : $\boxed{\Delta^{-1} \text{ est diagonalisable et } \Delta^{-1}PD_1P^{-1} \text{ avec } D_1 = D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}}$

6)a) Cherchons Q le polynôme caractéristique de A.

$$Q(X) = det(XI_3 - A) = \begin{vmatrix} X-3 & 1 & -1 \\ 0 & X-2 & -2 \\ 1 & -1 & X-3 \end{vmatrix} \text{ On fait } C_1 \leftarrow C_1 + C_2$$

$$Q(X) = \begin{vmatrix} X-2 & 1 & -1 \\ X-2 & X-2 & -2 \\ 0 & -1 & X-3 \end{vmatrix} \text{ on fait } L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$Q(X) = \begin{vmatrix} X-2 & 1 & -1 \\ 0 & X-3 & -1 \\ 0 & -1 & X-3 \end{vmatrix} \text{ on développe par rapport à la première colonne :}$$

$Q(x) = (X-2)(X^2 - 6X + 9 - 1) = (X-2)(X^2 - 6X + 8) = (X-2)(X-2)(X-4) = (X-4)(X-2)^2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2' = ker(A - 2I_3) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = y \end{cases}$$

On a $dim(E_2') = 1 \neq 2$ est de dimension alors que 2 est une valeur propre double.

Donc : $\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable dans } M_3(\mathbb{R})}$

6)b) $N^2 = 0_3$ et donc : $\boxed{N \text{ est nilpotente.}}$

6)c) Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ que $\forall k \geq 1$, $\Delta^k N = 2^k N$

Initialisation au rang 1 : $\Delta N = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N\Delta = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Donc $\Delta N = N\Delta = 2N$

Hérédité : supposons $\Delta^k N = 2^k N$ alors $\Delta^{k+1}N = \Delta\Delta^k N = \Delta 2^k N = 2^k \Delta N = 2^k.2N = 2^{k+1}N$

Conclusion : on a montrer par récurrence que : $\boxed{\forall k \geq 1 \ , \ \Delta^k N = 2^k N}$

6)d) On a de manière directe $A = \Delta + N$, on a Δ diagonalisable , N nilpotente et Δ et N commutent, donc : $\boxed{(\Delta, N) \text{ est une décomposition de Dunford de } A}$

7)a) $\Delta^{-1}N = \Delta^{-1}\frac{\Delta N}{2}$ car $\Delta N = 2N$ et donc $\Delta^{-1}N = \frac{N}{2}$
$N\Delta^{-1} = \frac{\Delta N}{2}\Delta^{-1}$ car $N\Delta = 2N$ et donc $N\Delta^{-1} = \frac{N}{2}$
Finalement on a bien : $\boxed{\Delta^{-1}N = N\Delta^{-1}}$

7)b) $N_1^2 = (\Delta^{-1}N)^2$ mais comme, par le a), Δ^{-1} et N commutent alors $N_1^2 = (\Delta^{-1})^2 N^2 = 0_3$ car $N^2 = 0_3$ Donc : $\boxed{N_1 \text{ et nilpotente.}}$

7)c) $(I_3 + N_1)(I_3 - N_1) = I_3 - N_1 + N_1 - N_1^2 = I_3$ car $N_1^2 = 0_3$ et donc :
$\boxed{I_3 + N_1 \text{ est inversible et } (I_3 + N_1)^{-1} = I_3 - N_1}$

7)d) D'après son polynôme caractéristique : $\det(A) = 16 \neq 0$ et donc $\boxed{A \text{ est inversible.}}$

7)e) $A = \Delta + N = \Delta + \Delta N_1$ car $N = \Delta N_1$ et donc $A = \Delta(I_3 + N_1)$ et $A^{-1} = (I_3 + N_1)^{-1}\Delta^{-1}$
Avec le c) : $A^{-1} = (I_3 - N_1)\Delta^{-1} = \Delta^{-1} - N_1\Delta^{-1} = \delta + M$ avec $\delta = \Delta^{-1}$ et $M = N_1\Delta^{-1} = (\Delta^{-1})^2 N$
i) $\delta = \Delta^{-1}$ est diagonalisable (5)c))
ii) $M^2 = (\Delta^{-1})^2 N^2 = 0_3$ car N est nilpotente et commutent avec Δ^{-1}
iii) $\delta M = M\delta$ car N commutent avec Δ^{-1}
iv) $A^{-1} = \delta + M$
Donc $\boxed{(\delta, M) \text{ est une décomposition de Dunford de } A^{-1}}$

Problème 2

1°) • $S(x)$ a même rayon de convergence que sa série dérivée $S'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$ qui a même rayon de convergence que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ qui est une série entière du cours $(-ln(1-x))$ de rayon de convergence 1.
On en déduit $R_S = 1$

• Pour $x \neq 0$ on pose $u_n(x) = h_n x^n \neq 0$. On a donc $\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \frac{h_{n+1}}{h_n}|x|$
Mais $h_{n+1} = h_n + \frac{1}{n+1}$ donc $\frac{h_{n+1}}{h_n} = 1 + \frac{1}{h_n(n+1)}$ (car $h_n \neq 0$)
De manière évidente on a $h_n \geq 1$ et donc $0 \leq \frac{1}{h_n(n+1)} \leq \frac{1}{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$
Donc par encadrement : $\frac{1}{h_n(n+1)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $\frac{h_{n+1}}{h_n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$
On a alors : $\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} |x|$

Par la règle de D'Alembert on a : $\begin{cases} |x| < 1 \Rightarrow \sum u_n(x) \text{ convergente} \\ |x| > 1 \Rightarrow \sum u_n(x) \text{ divergente} \end{cases}$

Comme $R = sup(\{x \in \mathbb{R} \ , \ \sum u_n(x) \text{ convergente } \})$ alors on en déduit : $R = 1$

• $T(x)$ a même rayon de convergence que sa série dérivée $T'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} h_n x^{n-1}$ qui est de rayon de convergence $R = 1$ puisque c'est la dérivée de H. On en déduit $R_T = 1$

• Bilan : $\boxed{R = R_T = R_S = 1}$

2°) Pour $x \in I$ et $n \geq 1$, on reprend la relation $h_{n+1} = h_n + \frac{1}{n+1}$ et on on la multiplie par x^n.
On a : $h_{n+1}x^{n+1} = h_n x^{n+1} + \frac{x^{n+1}}{n+1}$

On sait que $\forall x \in I \quad \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -ln(1-x)$

On peut donc sommer la relation ci-dessus pour $n = 1$ à $+\infty$ car les séries convergent sur I et on obtient : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} h_{n+1}x^{n+1} = x\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n x^n + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\Rightarrow H(x) - h_1 x^1 = xH(x) + (-ln(1-x) - \frac{x^1}{1})$

Comme $\boxed{h_1 = 1 \text{ on en déduit : } \forall x \in I \ , \ H(x) = \frac{-ln(1-x)}{1-x}}$

3°) $\frac{d}{dx}(\frac{(ln(1-x))^2}{2}) = \frac{2}{2}\frac{-1}{1-x}ln(1-x) = H(X)$ et de plus en $x = 0$ on a $\frac{(ln(1-x))^2}{2} = 0$

Alors : L, la primitive de H s'annulant en 0 est donnée par $\boxed{\forall x \in I \ , \ L(x) = \frac{(ln(1-x))^2}{2}}$

4°) Par définition : $\forall x \in I \ , \ L(x) = \int\limits_0^x H(y)dy = \int\limits_0^x (\sum\limits_{n=1}^{+\infty} h_n y^n)dy$

Or, d'après le cours, on peut intégrer une série entière sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence. Comme $\forall x \in I \ , \ [0;x] \subset I$ alors : $L(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\int\limits_0^x h_n y^n dy) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} h_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$

$\boxed{L \text{ est donc développable en série entière en 0 et } \forall x \in I \ , \ L(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} h_n \frac{x^{n+1}}{n+1}}$

5°) $\forall x \in I \ , \ T(x) - S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{h_n}{n} x^n - \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} x^n$

Comme les séries ont même rayon de convergence on a : (par convention on prendra $h_0 = 0$)
$\forall x \in I \ , \ T(x) - S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\frac{h_n}{n} - \frac{1}{n^2})x^n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\frac{h_{n-1} + \frac{1}{n}}{n} - \frac{1}{n^2})x^n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{h_{n-1}}{n} x^n = \sum\limits_{p=1}^{+\infty} \frac{h_p}{p+1} x^{p+1} = L(x)$

On a donc bien : $\boxed{\forall x \in I \ , \ T(x) - S(x) = L(x)}$

6°) a) $\boxed{\forall x \in I \ , \ -ln(1-x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}}$

6°) b) $u \mapsto \frac{ln(1-u)}{u}$ est continue sur $]0;y]$ (car $y < 1$) et $\frac{ln(1-u)}{u} \underset{u \to 0}{\longrightarrow} = -1$ donc $u \mapsto \frac{ln(1-u)}{u}$ est prolongeable par continuité en 0, donc $\boxed{\int\limits_0^y \frac{ln(1-u)}{u} du \text{ est convergente.}}$

On va utiliser le a) et le fait que l'on peut intégrer terme à terme une série entière sur tout segment inclus dans son intervalle de convergence. Alors :

$$\int_0^y \frac{ln(1-u)}{u}du = \int_0^y \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-u^n}{nu}du = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^y \frac{-u^{n-1}}{n}du = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^n}{n^2} = -S(y)$$

On a donc $\boxed{\forall y \in [0;1[\ ,\ \int_0^y \frac{ln(1-u)}{u}du + S(y) = 0}$

6°) c)$u \mapsto \frac{ln(1-u)}{u}$ est continue sur $]0,1[$ $\quad A = \int_0^1 \frac{ln(1-u)}{u}du$ pose problème en 0 et en 1.

En 0 le problème a été réglé en 6°) a).

En 1^- : $\frac{ln(1-u)}{u} \sim ln(1-u) < 0$ donc A est de même nature que $\int_0^1 ln(1-u)du$ qui est de même nature que $\int_0^1 ln(v)dv$ par le changement de variable C^1 bijectif $v = 1-u$. La dernière intégrale est convergente par le cours. Bilan : $\boxed{\int_0^1 \frac{ln(1-u)}{u}du \text{ est convergente.}}$

6°) d) • Commençons par montrer que S est continue sur $[-1,1]$

Posons : $\forall n \in \mathbb{N}$: $\begin{array}{cccc} f_n & : & [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \frac{x^n}{n^2} \end{array}$

On peut alors définir : $||f_n||_\infty = \sup\limits_{x\in[-1,1]} |f_n(x)|$ et remarquer que : $||f_n||_\infty = \frac{1}{n^2}$

On a donc $\sum ||f_n||_\infty$ qui est convergente par Riemann et donc $\sum f_n$ converge normalement sur $[-1,1]$. Donc $\sum f_n$ converge uniformément sur $[-1,1]$. Comme, de plus, les f_n sont continues sur $[-1,1]$, alors, par transfert de continuité, on en déduit : S est continue sur $[-1,1]$

• $S(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ est admis. En passant à la limite dans le 6°)b) avec la continuité de S en 1 et le 6°) c) on obtient : $\boxed{\int_0^1 \frac{ln(1-u)}{u}du = \frac{-\pi^2}{6}}$

7°) a) Intégrons par parties $\int_0^y \frac{ln(1-u)}{u}du$, IPP justifiée car $\lim\limits_{u\to 0} ln(u)ln(1-u) = \lim\limits_{u\to 0} ln(u)(-u) = 0$:

$$\int_0^y \frac{ln(1-u)}{u}du = [ln(u)ln(1-u)]_0^y - \int_0^y ln(u)\frac{-1}{1-u}du = ln(y)ln(1-y) + \int_0^y \frac{ln(u)}{1-u}du$$

On fait le changement de variable C^1 bijectif : $U = 1-u$ dans la dernière intégrale :

$$\int_0^y \frac{ln(1-u)}{u}du = ln(y)ln(1-y) + \int_1^{1-y} \frac{ln(1-U)}{U}(-dU)$$

On remet les bornes dans l'ordre et on utilise Chasles puisque toutes les intégrales convergent :

$$\underbrace{\int_0^y \frac{ln(1-u)}{u}du}_{-S(y)} = ln(y)ln(1-y) - \underbrace{\int_1^0 \frac{ln(1-U)}{U}dU}_{\frac{\pi^2}{6}} - \underbrace{\int_0^{1-y} \frac{ln(1-U)}{U}dU}_{-S(1-y)}$$

En utilisant le 6°)d) et le 6°)b) on obtient : $\boxed{\forall y \in [0,1]\ ,\ \frac{\pi^2}{6} = S(y) + S(1-y) + ln(y)ln(1-y)}$

7°) b) En prenant $y = \frac{1}{2}$ au a) on obtient : $S(\frac{1}{2}) = \frac{\pi^2}{3} - \frac{ln(2)^2}{2}$

Avec la relation du 5°) et le 3°) : $\boxed{T(\frac{1}{2}) = \frac{\pi^2}{3}}$