Centrale PC mathématiques 1 , 2024

Q1) On remarque que : $\forall n\in\mathbb{N}\ ,\ a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}\prod_{k=0}^{n}(\alpha-k)=\frac{\alpha-n}{n+1}\frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha-k)=\frac{\alpha-n}{n+1}a_n$

On a donc la relation de récurrence : $\forall n\in\mathbb{N}\ ,\ a_{n+1}=\frac{\alpha-n}{n+1}a_n$

On va alors considérer deux cas pour le calcul de R.

Cas 1 : $\alpha\in\mathbb{N}$

Alors $a_{\alpha+1}=\frac{\alpha-\alpha}{n+1}a_\alpha=0$ et par une récurrence immédiate : $\forall n\geq\alpha+1\ ,\ a_n=0$

On a alors : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=\sum\limits_{n=0}^{\alpha}a_nx^n$ qui est un polynôme et donc $R=+\infty$

Cas 2 : $\alpha\notin\mathbb{N}$

Alors, $\forall n\in\mathbb{N}\ ,\ \alpha-n\neq 0$ et, comme $a_0=1\neq 0$, on a, par une récurrence immédiate $a_n\neq 0$

Pour $x\in\mathbb{R}^*$ on peut alors poser $u_n(x)=a_nx^n\neq 0$ et considérer : $\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\frac{x^{n+1}}{x^n}\right|=\left|\frac{\alpha-n}{n+1}x\right|\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}|x|$

On a alors : $|x|<1\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=|x|<1\ \underbrace{\Longrightarrow}_{\text{D'Alembert}}\ \sum a_nx^n$ convergente

et : $|x|>1\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=|x|>1\ \underbrace{\Longrightarrow}_{\text{D'Alembert}}\ \sum a_nx^n$ divergente

On en déduit donc que : $R=1$

Bilan : $\boxed{R=\begin{cases}1 & \text{si } \alpha\notin\mathbb{N}\\ +\infty & \text{si } \alpha\in\mathbb{N}\end{cases}}$

Q2) On reconnaît le résultat du cours et on a : $\boxed{\forall x\in]-R,R[\ ,\ \sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=(1+x)^\alpha}$

Q3) Calculons a_n dans le cas $\alpha=\frac{1}{2}$. on a alors, d'après Q1) : $R=1$.
Pour $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
a_n&=\frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha-k)=\frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(\tfrac{1}{2}-k)=\frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1-2k}{2}=\frac{1}{n!}\frac{(-1)^n}{2^n}\prod_{k=0}^{n-1}(2k-1)=\frac{1}{n!}\frac{(-1)^n}{2^n}(-1)\prod_{k=1}^{n-1}(2k-1)\\
&=\frac{1}{n!}\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\frac{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(2k)(2k-1)}{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(2k)}\\
&=\frac{1}{n!}\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\frac{(2n-2)!}{2^{n-1}(n-1)!}\\
&=\frac{1}{n!}\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\frac{(2n)!}{2^{n-1}(2n)(2n-1)(n-1)!}\\
&=\frac{1}{n!}\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\frac{(2n)!}{2^n(2n-1)n!}\\
&=(-1)^{n+1}\frac{(2n)!}{(2n-1)4^n(n!)^2}\\
&=(-1)^{n+1}b_n
\end{aligned}$$

Comme $b_0=-1$ alors la formule $a_n=(-1)^{n+1}b_n$ est aussi valable pour $n=0$ et donc $\forall n\in\mathbb{N}$

En reprenant le résultat de Q2) on a : $\boxed{\forall x\in]-1,1[\ ,\ \sqrt{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}b_nx^n}$

Q4) On utilise la formule de Stirling : $n! = \sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}$ dans $b_n = \frac{(2n)!}{(2n-1)4^n(n!)^2}$

Alors : $b_n \sim \frac{\sqrt{2\pi(2n)}(2n)^{2n}e^{-2n}}{(2n-1)4^n(2\pi n)(n^{2n})e^{-2n}} \sim \frac{\sqrt{2\pi(2n)}4^n}{(2n-1)4^n(2\pi n)} \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}n^{3/2}}$

Comme $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ est une série de Riemann absolument convergente, on en déduit, par équivalent, que $\sum b_n$ est absolument convergente, et donc que $\sum(-1)^{n+1}b_n$ est absolument convergente.

Bilan : $\boxed{b_n \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}n^{3/2}} \text{ et } \sum(-1)^{n+1}b_n \text{ est convergente.}}$

Q5) • Posons, $\forall n \in \mathbb{N}$: $\begin{array}{cccc} f_n & : & [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & (-1)^{n+1}b_n x^n \end{array}$

On a alors : $||f_n||_\infty = \sup_{x\in[-1,1]} |f_n(x)| = b_n$

D'après Q4) $\sum b_n = \sum ||f_n||_\infty$ est convergente. On en déduit que : $\sum f_n$ converge normalement et donc uniformément sur $[-1, 1]$.

Bilan : $\boxed{\text{La série entière } \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}b_n x^n \text{ converge donc uniformément sur } [-1,1]}$

• Comme les f_n sont continues et que la convergence est uniforme, on en déduit, par transfert de continuité, que : $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}b_n x^n$ est continue sur $[-1, 1]$

La continuité en $t = 1$ donne : $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}b_n = \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}b_n x^n = \lim_{x\to 1^-} \sqrt{1+x}$ par la question Q3)

On en conclut donc : $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}b_n = \sqrt{2}}$

Q6) Pour $n \in \mathbb{N}$ on a : $b_n > 0$ et
$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(2n+2)!}{4^{n+1}(2n+1)((n+1)!)^2}\frac{4^n(2n-1)(n!)^2}{(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n-1)}{4(2n+1)(n+1)^2} = \frac{2(n+1)(2n-1)}{4(n+1)^2} = \frac{(2n-1)}{2(n+1)} = \frac{(2n-1)}{2n+2)} < 1$
Donc la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et on peut appliquer le théorème spécial, en particulier pour l'encadrement du reste puisque l'on sait déjà que la série converge.
On a : $\left|\sqrt{2} - \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}b_k\right| \leq b_{n+1}$
Mais comme $b_n \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}n^{3/2}}$ (voir Q4)) alors : $b_{n+1} = O(\frac{1}{n^{3/2}})$

Reporter ci-dessus, on obtient : $\boxed{\sqrt{2} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}b_k + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)}$

Q7) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $P_n \Leftrightarrow c_n(a)$ est bien définie et $c_n(a) > 0$

Initialisation :
L'énoncé pose $c_0(a) = 1$ donc $c_0(a)$ est bien définie et $c_0(a) = 1 > 0$

Hérédité :
On suppose la propriété P_n vraie au rang n et on la démontre au rang $n + 1$.
Comme $c_n(a) > 0$ alors on peut calculer $\frac{1}{2}\left(c_n(a) + \frac{a}{c_n(a)}\right) > 0$
On a donc $c_{n+1}(a)$ est bien défini et $c_{n+1}(a) > 0$ ce qui équivaut à P_{n+1}

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ c_n(a) \text{ est bien définie et } c_n(a) > 0}$

Q8) • $c_{n+1}(a)^2 - a$
$= \left(\frac{1}{2}\Big(c_n(a) + \frac{a}{c_n(a)}\Big)\right)^2 - a$
$= \frac{1}{4}\left(c_n(a)^2 + 2a + \frac{a^2}{c_n(a)^2}\right) - a = \frac{1}{4}\left(c_n(a)^2 - 2a + \frac{a^2}{c_n(a)^2}\right) = \frac{1}{4}\left(c_n(a) - \frac{a}{c_n(a)}\right)^2 = \frac{1}{4}\frac{(c_n(a)^2-a)^2}{c_n(a)^2}$

On a donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ c_{n+1}(a)^2 - a = \frac{1}{4}\frac{(c_n(a)^2-a)^2}{c_n(a)^2}}$

• On déduit de l'égalité précédente que : $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ c_{n+1}^2 - a \geq 0$
Donc que : $\forall n \in \mathbb{N}^*\ ,\ c_n^2 - a \geq 0 \Leftrightarrow c_n(a)^2 \geq a \Leftrightarrow c_n(a) \geq \sqrt{a}$ puisque $c_n(a) > 0$ et $a \geq 0$

On a donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*\ ,\ c_n(a) \geq \sqrt{a}}$

Q9) On utilise Q8) qui donne $\sqrt{a} \leq c_n(a)$ et donc $a \leq c_n(a)^2$ pour obtenir :
$c_{n+1}(a) = \frac{1}{2}\left(c_n(a) + \frac{a}{c_n(a)}\right) \leq \frac{1}{2}\left(c_n(a) + \frac{c_n(a)^2}{c_n(a)}\right) = \frac{1}{2}\Big(c_n(a) + c_n(a)\Big) = c_n(a)$

Donc : $\forall n \geq 1\ ,\ c_{n+1}(a) \leq c_n(a)$ et la suite $(c_n(a))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc décroissante.
Comme elle est minorée, à partir du rang 1, par $\sqrt{a}$, elle donc convergente.
Notons $\lambda = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n(a)$
Par passage à la limite dans la relation de récurrence définissant $c_n(a)$ on a : $\lambda = \frac{1}{2}(\lambda + \frac{a}{\lambda})$
Donc $2\lambda^2 = \lambda^2 + a \Leftrightarrow \lambda^2 = a$ et comme $\lambda \geq \sqrt{a} \geq 0$ alors : $\lambda = \sqrt{a}$

Bilan : $\boxed{\text{La suite } (c_n(a))_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \sqrt{a}}$

Q10) • $C_1(2) = \frac{1}{2}\big(c_0(2) + \frac{2}{c_0(2)}\big) = \frac{1}{2}\big(1 + \frac{2}{1}\big) = \frac{3}{2}$ On a donc : $\boxed{c_1(2) = \frac{3}{2}}$

• Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que : $\forall n \in \mathbb{N}^*\ ,\ c_n(2)^2 - 2 \leq 8\left(\frac{1}{32}\right)^{2^{n-1}}$

Initialisation :
Pour $n = 1$ on veut montrer que : $c_1(2)^2 - 2 \leq 8$
Mais, avec la valeur de $c_1(2)$: $c_1(2)^2 - 2 = \frac{9}{4} - 2 = \frac{1}{4} \leq 8$ est évident.

Hérédité : On suppose la propriété vraie au rang n, c'est-à-dire : $c_n(2)^2 - 2 \leq 8\left(\frac{1}{32}\right)^{2^{n-1}}$
On veut la montrer au rang $n+1$, c'est-à-dire : $c_{n+1}(2)^2 - 2 \leq 8\left(\frac{1}{32}\right)^{2^n}$

Avec le début de Q8) on a : $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ c_{n+1}(2)^2 - 2 = \frac{1}{4}\frac{(c_n(2)^2-2)^2}{c_n(2)^2}$
On a aussi par Q8) : $\forall n \in \mathbb{N}^*\ ,\ c_n(2) \geq \sqrt{2}$ donc $\frac{1}{c_n(2)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1}{c_n(2)^2} \leq \frac{1}{2}$

On en déduit : $c_{n+1}(2)^2 - 2 \leq \frac{1}{4}\frac{\left(8\left(\frac{1}{32}\right)^{2^{n-1}}\right)^2}{2} = 8\left(\frac{1}{32}\right)^{2^n}$ qui est bien la propriété au rang $n+1$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*\ ,\ c_n(2)^2 - 2 \leq 8\left(\frac{1}{32}\right)^{2^{n-1}}}$

• On sait par Q8) que : $0 \leq c_n(2) - 2$ donc l'inégalité précédente donne : $0 \leq (c_n(2) - \sqrt{2})(c_n(2) + \sqrt{2}) \leq 8\left(\frac{1}{32}\right)^{2^{n-1}}$

Comme $c_n(2) \geq \sqrt{2} \Rightarrow c_n(2) + \sqrt{2} \geq 2\sqrt{2}$ alors on a : $0 \leq c_n(2) - \sqrt{2} \leq \frac{8}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{32}\right)^{2^{n-1}}$

On en déduit que : $c_n(2) - \sqrt{2} = O\Big(\left(\frac{1}{32}\right)^{2^{n-1}}\Big)$ et donc que : $\boxed{\sqrt{2} = c_n(2) + O\Big(\left(\frac{1}{32}\right)^{2^{n-1}}\Big)}$

Q11) $\dfrac{\left(\frac{1}{32}\right)^{2^{n-1}}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = n^{3/2}exp(2^{n-1}ln(\frac{1}{32})) = exp(\frac{3}{2}ln(n) - ln(32)2^{n-1}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par comparaison de $ln(n)$ et de 2^{n-1}.

On a donc : $\boxed{\left(\left(\frac{1}{32}\right)^{2^{n-1}}\right) \text{ tend plus vite vers zéro que } \left(\frac{1}{n^2}\right)}$

Q12) Grâce à Q10) on sait que : $0 \leq c_n(2) - \sqrt{2} \leq 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{32}\right)^{2^{n-1}} \leq 4\left(\frac{1}{32}\right)^{2^{n-1}}$
(on utilise $\sqrt{2} \leq 2$ puisque l'on est pas censé connaître $\sqrt{2}$ précisement à cette question)

On peut alors en déduire les lignes Python suivantes :

```
c=1.5                   # on a calcule c_1(2))
diff=4                  # écart entre c_n(2) et sqrt(2)
while diff>10**(-10):
    c=0.5*(c+2/c)               # calcul du terme suivant par récurrence
    diff=diff/(32**2)           # calcul de l'écart à sqrt(2)
print(c)
```

Q13) D'après le cours, les matrices de $O_2(\mathbb{R})$ sont de la forme $\begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$ (matrice de rotation) ou $\begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ -sin(\theta) & -cos(\theta) \end{pmatrix}$ (matrice de réflexion) avec $\theta \in \mathbb{R}$

Q14) Toute les matrices de réflexions de $O_2(\mathbb{R})$ sont de racines carrées de I_2, ainsi que I_2 et $-I_2$ (pour les rotations)
Comme il y a une infinité de réflexions, $\boxed{\text{il y a une infinité de racines carrées de } I_2}$

Q15) D'après le cours : $\boxed{\text{Une matrice } M \text{ symétrique est positive si et seulement si } sp(M) \subset [0, +\infty[}$

Q16) Soit $M \in \mathscr{S}_q^+(\mathbb{R})$
Alors, par le théorème spectral, M est diagonalisable dans une base orthonormée, donc $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$, $M = PDP^T$ (on remarque que : $P^{-1} = P^T$) avec $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ où $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$
Comme de plus M est positive, alors $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i \geq 0$ donc on peut poser : $B = Pdiag(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})P^T$
Alors B est symétrique par construction, $sp(B) = \{\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}\} \subset [0, +\infty[$ donc $B \in \mathscr{S}_q^+(\mathbb{R})$ et

$$B^2 = Pdiag(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})\underbrace{P^TP}_{I_n}diag(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})P^T$$
$$= Pdiag(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})diag(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})P^T$$
$$= Pdiag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)P^T = PDP^T = M$$

On a $\boxed{\text{déterminer } B \in \mathscr{S}_q^+(\mathbb{R}) \text{ telle que } B^2 = M}$

Q17) Attention, cette question Q17) n'est pas facile si on ne l'a jamais vu !!! donc ...

Soit $C \in \mathscr{S}_q^+(\mathbb{R})$ telle que $C^2 = M$

Notons c l'endomorphisme associé à c et m celui associé à M.
Alors $MC = C^2C = C^3 = CC^2 = CM$ donc m et c commutent.

On écrit $sp(M) = sp(m) = \{\mu_1, \ldots, \mu_p\}$ le spectre de M en supposant donc les μ_i distincts deux à deux.

Comme m est diagonalisable alors on a : $\mathbb{R}^q = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ avec $E_i = ker(m - \mu_i Id_{\mathbb{R}^q})$

Comme m et c commutent alors les E_i sont stables par c et on peut considérer c_i la restriction de c à E_i.

Comme c est diagonalisable alors c_i est diagonalisable et donc il existe une base B_i de E_i telle que :
$M_{B_i}(c) = diag(\alpha_{i,1}, \ldots, \alpha_{i,dim(E_i)})$

De plus, comme $sp(c_i) \subset sp(c) \subset [0, +\infty[$ alors on a $\alpha_{i,k} \geq 0$
Dans E_i : $c^2 = m$ se traduit par $c_i^2 = \mu_i Id_{E_i}$ et on a donc pour tout k : $\alpha_{i,k}^2 = \mu_i$, ce qui donne $\alpha_{i,k} = \sqrt{\mu_i}$ compte tenue de la positivité des termes.
c_i est donc définie de manière unique et donc c est définie de manière unique.
Il y a donc au plus une matrice $C \in \mathscr{S}_q^+(\mathbb{R})$ telle que $C^2 = M$

D'après la question Q16), il y en a au moins une B.

Bilan : $\boxed{B \text{ est l'unique racine carrée de } M \text{ appartenant à } \mathscr{S}_q^+(\mathbb{R})}$

Q18) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété : $Pr_n \Leftrightarrow M_n$ est bien définie et $M_n = Pdiag(c_n(\lambda_1), \ldots, c_n(\lambda_q))P^T$

Initialisation : au rang $n = 0$
M_0 est définie par $M_0 = I_q$ donc est bien définie !!!
$c_0(\lambda_i) = 1$, donc $Pdiag(c_0(\lambda_1), \ldots, c_0(\lambda_q))P^T = PP^T = I_n = M_0$ car $P \in O_n(\mathbb{R})$
On a donc bien Pr_0

Hérédité : On suppose Pr_n vraie.
On a $det(M_n) = \prod_{k=1}^{q} c_n(\lambda_k) > 0$ car $c_n(\lambda_k) > 0$ d'après Q7), donc $det(M_n) \neq 0$ et donc M_n est inversible et on peut définir : $M_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(M_n + MM_n^{-1}\Big)$. On a alors :

$$\begin{aligned}
&M_{n+1}\\
&= \tfrac{1}{2}\Big(Pdiag(c_n(\lambda_1), \ldots, c_n(\lambda_q))P^T + Pdiag(\lambda_1, \ldots, \lambda_q)P^T Pdiag(\tfrac{1}{c_n(\lambda_1)}, \ldots, \tfrac{1}{c_n(\lambda_q)})P^T\Big)\\
&= Pdiag\Big(\tfrac{1}{2}\big(c_n(\lambda_1) + \tfrac{\lambda_1}{c_n(\lambda_1)}\big), \ldots, \tfrac{1}{2}\big(c_n(\lambda_n) + \tfrac{\lambda_n}{c_n(\lambda_n)}\big)\Big)\\
&= Pdiag\Big(c_{n+1}(\lambda_1), \ldots, c_{n+1}(\lambda_n)\Big) \text{ avec la relation de récurrence vérifiée par } (c_n(\lambda_k))
\end{aligned}$$

On a donc bien Pr_{n+1}

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ M_n = Pdiag(c_n(\lambda_1), \ldots, c_n(\lambda_q))P^T}$

Q19) On sait que $\forall k \in \mathbb{N}\ ,\ c_n(\lambda_k) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\lambda_k}$ par la question Q9).

On a donc $diag(c_n(\lambda_1), \ldots, c_n(\lambda_q)) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} diag(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_q})$
Et avec la propriété admise dans l'énoncé :
$Pdiag(c_n(\lambda_1), \ldots, c_n(\lambda_q))P^T \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} Pdiag(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_q})P^T = B = \sqrt{M}$

On a donc : $\boxed{(M_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } \sqrt{M}}$

Q20) f est C^2 donc f' est continue.
Comme f' ne s'annule pas sur I, alors f est de signe constant (strict) sur I. (Sinon par l'absurde f' s'annulerait pas le TVI). Donc f est strictement monotone sur I.
Donc f est une bijection de I dans $f(I)$ et donc $\boxed{f \text{ s'annule au plus une fois sur } I.}$

Q21) f' et f'' sont continues sur J_r qui est un segment. Donc par le théorème des bornes atteintes s_r et i_r sont bien définis.
De plus i_r est atteint, donc $\exists v \in J_r\ ,\ i_r = |f'(v)| \neq 0$ car f' ne sannule pas sur $J_r \subset J$
On a donc $i_r > 0$

Bilan : $\boxed{s_r \text{ et } i_r \text{ sont bien définis et } i_r > 0}$

Q22) Fixons $r_0 > 0$ tel que $J_{r_0} \subset J$.
Alors, pour $r \in]0, r_0[$ on a $J_r \subset J_{r_0}$ donc $s_r \leq s_{r_0}$ et $i_{r_0} \leq i_r$
Donc $K_r = \frac{s_r}{2i_r} \leq \frac{s_{r_0}}{2i_{r_0}} \Rightarrow K_r \leq K_{r_0}$
Donc, comme $r > 0$: $0 \leq rK_r \leq rK_{r_0} \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0$

Par définition de la limite : $\boxed{\exists r > 0\ ,\ 0 \leq rK_r < 1}$

Q23) • On suppose que $c_n \in J_r$

Par l'inégalité de Taylor-Lagrange : $|f(c) - f(c_n) - (c - c_n)f'(c_n)| \leq \frac{1}{2}(c - c_n)^2 s_r$

Comme $f(c) = 0$ alors : $|f(c_n) + (c - c_n)f'(c_n)| \leq \frac{s_r}{2}(c - c_n)^2$

On divise par $|f'(c_n)|$ qui par hypothèse est non nul : $\left|\frac{f(c_n)}{f'(c_n)} + (c - c_n)\right| \leq \frac{s_r}{2|f'(c_n)|}(c - c_n)^2$
Par définition de i_r : $\left|\frac{f(c_n)}{f'(c_n)} - c_n + c\right| \leq \frac{s_r}{2i_r}(c - c_n)^2$
Par définition de K_r et de c_{n+1} : $|-c_{n+1} + c| \leq K_r(c - c_n)^2$

On a donc bien : $\boxed{|c_{n+1} - c| \leq K_r(c - c_n)^2}$

• Comme $c_n \in J_r$ alors $|c - c_n| < r$, comme de plus $rK_r < 1$, alors : $|c_{n+1} - c| < K_r r^2 = \underbrace{(rK_r)}_{<1} r < r$ donc $\boxed{c_{n+1} \in J_r}$

Q24) Si $c_0 \in J_r$, alors, on montre par récurrence, comme à la question Q10) que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ |c_n - c| \leq \frac{\left(K_r|c_0-c|\right)^{2^n}}{K_r}}$

Comme $c_0 \in J_r$ alors $|c - c_0| < r$ et donc $0 < K_r\,|c_0 - c| < 1$, on en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\left(K_r|c_0-c|\right)^{2^n}}{K_r} = 0$ et donc, par comparaison : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = c}$

Q25)

```
def newton(c_0,f,df):
  c=c_0
  n=0
  while (n<51) and abs(f(c))>10**(-10):
     c=c-f(c)/df(c)
     n=n+1
  if n=51:
        return('None')
  return c
```

Q26) • On remarque que P est un polynôme scindé simple dont les racines sont les valeurs propres de M.

Soit μ une racine de P'.
Si μ était racine de P alors μ serait racine au moins double de P, ce qui est impossible car P n'admet que des racines simples.
On en déduit que μ n'est pas racine de P et donc que μ n'est pas dans le spectre de M.
Donc $ker(M - \mu I_q) = \{0_{\mathbb{R}^q}\}$ et donc $det(M - \mu I_q) \neq 0$ et donc $\boxed{M - \mu I_q \text{ est inversible.}}$

• Comme on est dans $\mathbb{C}[X]$ alors, on peut écrire $P' = \alpha \prod_{\mu \in rac(P')} (X-\mu)^{\theta_\mu}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $rac(p')$ l'ensemble des racines de P' et θ_μ l'ordre de multiplicité de μ comme racine de P'.

Alors $P'(M) = \alpha \prod_{\mu \in rac(P')} (M - \mu I_q)^{\theta_\mu}$ qui est, par le début de la question, un produit de matrices inversibles.
Comme GL_q est stable par multiplication et par multiplication par un scalaire non nul (α), alors : $\boxed{P'(M) \text{ est inversible.}}$

Q27) • Comme χ_M est scindé dans $\mathbb{C}[X]$, unitaire, et que l'ensemble des ses racines est $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\}$, alors, on peut écrire $\chi_M = \prod_{i=1}^{s} (X-\lambda_i)^{k_i}$ avec $k_i \in [\![1, q]\!]$

On a donc $P^q = (\chi_m) \prod_{i=1}^{s} (X-\lambda_i)^{\overbrace{\scriptstyle \geq 0}^{q-k_i}}$ et donc $\boxed{\chi_M \text{ divise } P^q}$

• Comme par Hamilton-Cayley on a que χ_m est un polynôme annulateur de M, alors P^q est aussi un polynôme annulateur de M
Donc $P(M)^q = 0$ et donc $\boxed{P(M) \text{ est nilpotente.}}$

Q28) Comme $2^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors, à partir d'un certain rang n_0 : $2^n \geq q$ donc, comme $P(M)^q = 0$ alors $P(M)^{2^n} = 0$.
On a donc, puisque l'on admet $P(M_n) = (P(M))^{2^n} B_n$ que : $M_{n+1} = M_n$.

$\boxed{\text{La suite } (M_n) \text{ est donc stationnaire (constante, à partir d'un certain rang)}}$

Q29) Par une récurrence immédiate $M_n = R_n(M)$ avec $R \in \mathbb{C}[X]$, donc, avec les résultats admis : $\boxed{M \text{ et } M_n \text{ commutent.}}$

Q30) On a montrer que, à partir d'un certain rang : $P(M_n) = 0$, et comme (M_n) est stationnaire, donc égale à sa limite A à partir d'un certain rang, on a : $P(A)$
Comme on sait, de plus, que P est scindé à racines simples alors A admet un polynôme annulateur à racines simples donc : $\boxed{A \text{ est diagonalisable.}}$

Q31) • M_n est un polynôme en M et $A = M_n$ à partir d'un certain rang, donc A est un polynôme en M.
Donc $N = M - A$ est un polynôme en M.
Comme deux polynômes en M commutent, alors : $\boxed{N \text{ et } A \text{ commutent.}}$

• A partir d'un certain rang, on a : $M_n = A$
Donc $\sum_{k=0}^{n} (M_k - M_{k+1}) = M_0 - M_{n+1} = M - A = N$ par télescopage.
D'autre, part, en utilisant la relation de récurrence définissant (M_n) : $N = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{P(M_k)P'(M_k)^{-1}}_{M_k - M_{k+1}}$
Comme $P(M_k) = (P(M))^{2^k} B_k$ alors : $N = \sum_{k=0}^{n} (P(M))^{2^k} B_k P'(M_k)^{-1}$
Comme tout commutent et que l'on a des polynôme en M alors : $N = P(M)T(M)$ avec T un polynôme de $\mathbb{C}[X]$

Comme $P(M)^q = 0$ et que $N^q = (P(M))^q (T(M))^q$ alors $N^q = 0$

On a bien : $\boxed{N \text{ est nilpotente.}}$

Q32) L'énoncé nous propose d'utiliser le DL de $\sqrt{1+x}$, ce qui nous amène à poser :

$R_q(X) = \sum_{k=0}^{q} (-1)^{k+1} b_k X^k$

Il reste à montrer que $S(X) = 1 + X - (R_q(X))^2$ est divisible par X^q

Comme $deg(R_q) = q \geq 1$ alors $deg(S) = 2q$, on peut donc écrire $S(X) = \sum\limits_{k=0}^{2n} \sigma_k X^k$

S est non nul à cause du terme de degré $2n$ qui est non nul par exemple, donc on peut poser : $k_0 = min(\{k \in [\![0, 2n]\!] \ , \ \sigma_k \neq 0\}$ et on a alors : $S(X) = \sum\limits_{k=k_0}^{2n} \sigma_k X^k$

Avec cette écriture, au voisinage de $x = 0$: $S(x) \sim \sigma_{k_0} x^{k_0}$

D'autre part $S(x) = (1+x) - (R_q(x))^2 = (\sqrt{1+x} + R_q(x))(\sqrt{1+x} - R_q(x))$
Mais, par définition de R_q et Taylor-Young : $\sqrt{1+x} - R_q(x) = o(x^q)$
Comme on a aussi $\sqrt{1+x} + R_q(x) = O(1)$ alors, par produit : $S(x) = o(x^q)$

Alors $S(x) = o(x^q)$ et $S(x) \sim \sigma_{k_0} x^{k_0}$ donc $k_0 \geq q$

On a alors : $S(X) = \sum\limits_{k=k_0}^{2n} \sigma_k X^k = X^q \sum\limits_{k=k_0}^{2n} \sigma_k X^{\overbrace{k-q}^{\geq 0}}$ et donc S est divisible par X^q

Bilan : $\boxed{\exists R_q \in \mathbb{R}[X] \ , \ X^q \text{ divise } 1 + X - R_q(X)^2}$

Q33) Comme X^q divise $1 + X - R_q(X)^2$ alors $1 + X - R_q(X)^2 = X^q H(X)$ avec $H \in \mathbb{R}[X]$
Evaluer en N : $I_q + N - R_q(N)^2 = N^q H(N)$ et comme $N^q = 0$ alors $I_q + N = R_q(N)^2$

Donc $R_q(N)$ est une racine carrée de $I_q N$.

Avec l'expression trouvée en Q32) : $\boxed{\text{Si } N \text{ est nilpotente : } \sum\limits_{k=0}^{q} (-1)^{k+1} b_k N^k \text{ est une racine carrée de } I_q + N.}$

Q34) • Comme M est à valeurs propres réelles, alors $P \in \mathbb{R}[X]$ et, par construction, les matrices M_n sont dans $M_q(\mathbb{R})$. Donc $\boxed{A \text{ et } N \text{ sont à coefficients réels.}}$

• On a toujours P qui est un polynôme annulateur scindé simple de A. Comme de plus $P \in \mathbb{R}[X]$ alors : $\boxed{A \text{ est diagonalisable dans } M_q(\mathbb{R}).}$

Q35) Comme P est un polynôme annulateur de A et que $rac(P) = sp(M)$ alors on en déduit : $sp(A) \subset sp(M)$
Comme $sp(M) \subset]0, +\infty[$ alors $\boxed{sp(A) \subset]0, +\infty[}$

Q36) • Comme A est diagonalisable et que $sp(A) \subset]0, +\infty[$ alors $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}_+^*$ et $P \in GL_q(\mathbb{R})$ tel que : $A = Pdiag(\lambda_1, \dots, \lambda_q)P^{-1}$
Si on pose $r_A = Pdiag(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_q})P^{-1}$ alors $r_A^2 = A$ donc r_A est une racince carrée de A.
Il existe au moins une racine carrée de A (sans doute pas unique).

• On peut alors définir, comme en Q18), la suite (A_n) par : $\begin{cases} A_0 = I_q \\ \forall n \in \mathbb{N} \ , \ A_{n+1} = \frac{1}{2}\left(A_n + AA_n^{-1}\right) \end{cases}$
Et on sait de même que (A_n) converge vers $r_A = A'$ qui est une racine carrée de A.

• Comme $sp(A) \subset \mathbb{R}_*^+$ alors $0 \notin sp(A)$ et donc A est inversible.
On a alors : $M = A + N = A^{-1}(I_q + A^{-1}N)$
Comme A et N commutent A^{-1} et N aussi, donc $(A^{-1}N)^q = A^{-q}N^q = 0$ donc $A^{-1}N$ est nilpotente.

Par application de Q33) : $R_q(A^{-1}N)$ est une racine carrée de $I_q + A^{-1}N$

On pose : $r_M = A'R_q(A^{-1}N)$ Par commutativité (polynôme en M) $r_M^2 = A'^2 R_q(A^{-1}N)^2 = A(I_q + A^{-1}N) = M$

$\boxed{A'R_q(A^{-1}N) \text{ est une racine carrée de } M.}$