# Chapitre 18 : Convergence dominée et intégrales à paramètres

## Enoncé, Exercice 18.1

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} \frac{nln(1+\frac{x}{n})}{x(1+x^2)}dx$

On pourra commencer par montrer que $\forall u > -1 \ , \ ln(1+u) \leq u$

## Correction

• Commençons par montrer l'inégalité proposée.
On pose $\forall u > -1 \ , \ A(u) = u - ln(1+u)$ qui est dérivable sur $]-1,+\infty[$ avec $A'(u) = 1 - \frac{1}{1+u} = \frac{u}{1+u}$

On a donc le tableau de variation suivant :

| $u$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $A'(u)$ | - | $0$ | $+$ |
| $A(u)$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ |

On en déduit : $\forall u > -1 \ , \ A(u) \geq 0 \Leftrightarrow ln(1+u) \leq u$

• Posons maintenant $I = ]0,+\infty[$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ : $f_n : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{nln(1+\frac{x}{n})}{x(1+x^2)} \end{array}$

Pour $x \in I \ , \ f_n(x) = \frac{nln(1+\frac{x}{n})}{x(1+x^2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n\frac{x}{n}}{x(1+x^2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{1+x^2}$

On pose alors : $\forall x \in I \ , F(x) = \frac{1}{1+x^2}$ qui est bien continue par morceaux sur $I$.
On a donc $(f_n)$ converge simplement vers $F$ sur $I$.

En utilisant l'inégalité démontrer en préambule, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ \forall x \in I \ , \ |f_n(x)| \leq \frac{n\frac{x}{n}}{x(1+x^2)} = F(x)$

Or, pour $A > 0$ : $\int\limits_0^A F(x)dx = \int\limits_0^A \frac{1}{1+x^2}dx = Arctan(A) - Arctan(0) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$, donc $F$ est intégrable sur $I$ et $\int\limits_0^{+\infty} F(x)dx = \frac{\pi}{2}$

On a donc: $\begin{cases} \text{la suite } (f_n)_{n\geq1} \text{ est une suite de fonctions continues par morceaux sur } I \\ (f_n)_{n\geq1} \text{ converge simplement sur } I \text{ vers } F \text{ une fonction continue par morceaux sur } I \\ \forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ \forall x \in I \ , \ |f_n(x)| \leq F(x) \text{ et } F \text{ est intégrable sur } I \end{cases}$

On peut alors appliquer le théorème de convergence dominée et on a :
$F$ et les $F_n$ sont intégrables sur $I$ et :

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_I f_n(x)dx = \int\limits_I \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \int\limits_0^{\infty} \frac{nln(1+\frac{x}{n})}{x(1+x^2)}dx = \int\limits_0^{+\infty} F(x)dx$$

Et donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} \frac{nln(1+\frac{x}{n})}{x(1+x^2)}dx = \frac{\pi}{2}}$

# Enoncé, Exercice 18.2

Démontrer $\int\limits_0^1 \frac{ln(t)}{t-1}dt = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

# Correction

Posons $I = ]0,1[$ et $\forall t \in I$ , $S(t) = \frac{ln(t)}{1-t}$
Il est facile de voir que $S$ est continue par morceaux sur $I$.

Comme d'après le cours sur les séries entières : $\forall t \in I$ , $\frac{1}{1-t} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} t^n$ on a : $S(t) = \frac{ln(t)}{1-t} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} ln(t)t^n$

On pose alors : $\forall n \in \mathbb{N}$ , $\begin{array}{cccc} f_n & : & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & ln(t)t^n \end{array}$

Soit $\varepsilon > 0$ alors :
$\int\limits_\varepsilon^1 ln(t)t^n dt = [ln(t)\frac{t^{n+1}}{n+1}]_\varepsilon^1 - \int\limits_\varepsilon^1 \frac{1}{t}\frac{t^{n+1}}{n+1}dt = 0 - ln(\varepsilon)\frac{\varepsilon^{n+1}}{n+1} - \int\limits_\varepsilon^1 \frac{t^n}{n+1}dt = ln(\varepsilon)\frac{\varepsilon^{n+1}}{n+1} - [\frac{t^{n+1}}{(n+1)}]_\varepsilon^1 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{-1}{(n+1)^2}$

On en déduit que $f_n$ est continue par morceaux et intégrable sur $I$ et de plus $\int\limits_I f_n = \frac{-1}{(n+1)^2}$

On remarque que $\sum \int\limits_I |f_n| = \sum \frac{1}{(n+1)^2}$ est convergente.

On a alors : $\begin{cases} \text{les fonctions } f_n \text{ sont continues par morceaux et intégrables sur } I \\ \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ converge simplement vers } S \text{ sur } I \text{ et } S \text{ est continue par morceaux sur } I \\ \sum \int\limits_I |f_n| \text{ est convergente} \end{cases}$

On peut alors appliquer le théorème d'intégration terme à terme et on obtient :
$\sum f_n$ et donc $S$ est intégrable sur $I$, $\sum \int\limits_I f_n$ est convergente et surtout : $\int\limits_I \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(t)dt = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int\limits_I f_n(t)dt$

Compte tenu des calculs déjà effectués on a : $\int\limits_I S(t)dt = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{-1}{(n+1)^2}dt$

On fait un changement d'indice dans la somme de droite et on obtient : $\int\limits_0^1 \frac{ln(t)}{1-t}dt = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

En multipliant par $-1$ on a bien : $\boxed{\int\limits_0^1 \frac{ln(t)}{t-1}dt = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}}$

# Enoncé, Exercice 18.3

Montrer que : $\int\limits_0^{+\infty} \frac{cos(x)}{e^x+1}dx = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}k}{1+k^2}$

# Correction

Posons $I = [0, +\infty[$ et $\forall x > 0$ , $S(x) = \frac{cos(x)}{e^x+1}$

Pour $x \in I$ on a : $\frac{1}{e^x+1} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$ et comme $e^{-x} \in ]0, 1[$, on peut utiliser le résultat du cours : $\forall u \in ]-1, 1[$ , $\frac{1}{1+u} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u^k$ avec $u = e^{-x}$

On a donc $\frac{1}{e^x+1} = e^{-x} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} (-1)^k (e^{-x})^k = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} (-1)^k e^{-(k+1)x}$

En effectuant le changement d'indice $n = k + 1$ et en multipliant par $cos(x)$ on obtient :

$\forall x \in I$ , $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} e^{-nx} cos(x)$

On pose alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , : $\begin{array}{cccc} f_n & : & [0; +\infty[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & (-1)^{n-1}e^{-nx}cos(x) \end{array}$

Etudions l'intégrabilité de $f_n$ sur $I$. Soit $A > 0$.

$$\int\limits_0^A f_n(t)dx$$
$$= \int\limits_0^A (-1)^{n-1} e^{-nx} cos(x)dx$$
$$= \int\limits_0^A (-1)^{n-1} e^{-nx} Re(e^{ix})dx$$
$$= Re(\int\limits_0^A (-1)^{n-1} e^{-nx} e^{ix} dx)$$
$$= (-1)^{n-1} Re(\int\limits_0^A e^{(i-n)x} dx)$$
$$= (-1)^{n-1} Re([\frac{e^{(i-n)x}}{i-n}]_0^A)$$
$$= (-1)^{n-1} Re(\frac{e^{(i-n)A}}{i-n} - \frac{1}{i-n}) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} (-1)^{n-1}(\frac{1}{n-i}) = (-1)^{n-1} Re(\frac{n+i}{1+n^2}) = \frac{(-1)^{n-1}n}{1+n^2}$$

On a donc $\int\limits_I f_n$ convergente et $\int\limits_I f_n = \frac{(-1)^{n-1}n}{1+n^2}$

De plus : $\left|\int\limits_I f_n\right| = \frac{n}{1+n^2} \leq \int\limits_I |f_n|$

$\frac{n}{1+n^2} \sim \frac{1}{n} > 0$, alors par la règle de l'équivalent pour les séries à termes positifs, comme $\sum \frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente, on a : $\sum \frac{n}{1+n^2}$ divergente, et par comparaison $\sum \int\limits_I |f_n|$ est divergente et on ne peut pas appliquer le théorème d'intégration terme à terme !!!

On va donc passer par les sommes partielles de $S$.

Posons donc : $\forall N \in \mathbb{N}^*$ , $S_N(x) = \sum\limits_{n=1}^{N} (-1)^{n-1} e^{-nx} cos(x) = \sum\limits_{n=1}^{N} f_n(x)$

On a déjà démontrer que $(S_n)$ convergeait simplement vers $S$ sur $I$.

De plus comme à $x > 0$ fixé $(e^{-nx})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante tendant vers 0, alors on peut appliquer le théorème spécial à certaines séries alternées et on a : $\forall x \in I$ , $|S_N(x)| \leq |f_1(x)|$, comme $f_1$ est intégrable sur $I$ alors on a l'hypothèse de domination pour la suite $(S_N)$.

On a : $\begin{cases} \bullet\ (S_N)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est une suite de fonctions continues par morceaux sur } I \\ \text{convergeant simplement vers la fonction continue par morceaux } S \text{ sur } I \\ \bullet\ \forall N \in \mathbb{N}^* \ , \ \forall x \in I \ , \ |S_N(x)| \leq |f_1(x)| \text{ et } f_1 \text{ est intégrable sur } I \end{cases}$

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et on en déduit : $S$ est intégrable sur $I$ et

$$\lim_{N\to+\infty} \int_I S_N(t)dt = \int_I \lim_{N\to+\infty} S_N(x)dx$$

$$\Rightarrow \lim_{N\to+\infty} \int_I \sum_{n=1}^{N} f_n(x)dx = \int_I \lim_{N\to+\infty} S_N(x)dx$$

$$\Rightarrow \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \int_I f_n(x)dx = \int_I S(x)dx$$

$$\Rightarrow \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1}n}{1+n^2} = \int_I S(x)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}n}{1+n^2} = \int_I \frac{cos(x)}{1+e^x}dx$$

On a donc bien : $\boxed{\int\limits_0^{+\infty} \frac{cos(x)}{e^x+1}dx = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}k}{1+k^2}}$

On a la conclusion du théorème d'intégration terme à terme mais celui-ci n'est pas applicable, on a utiliser le théorème de convergence dominée pour les sommes partielles.

---

# Enoncé, Exercice 18.4

On définit la fonction Gamma d'Euler par : $\Gamma(x) = \int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$

a) Donner le domaine de définition $I$ de $\Gamma$
b) Etudier la continuité de $\Gamma$
c) Etudier le caractère $C^1$ de $\Gamma$
d) Etudier le caractère $C^\infty$ de $\Gamma$

---

# Correction

a) Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé, étudions la convergence de $\Gamma(x)$.
Comme $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $]0,+\infty[$ alors, il y a éventuellement problème pour l'intégrale aux bornes 0 et $+\infty$.

En 0 : $t^{x-1}e^{-t} \sim \frac{1}{t^{1-x}} > 0$ donc par la règle de l'équivalent pour les intégrales de fonctions positives on a : $\int\limits_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ de même nature que $\int\limits_0^1 \frac{1}{t^{1-x}}dt$ qui est une intégrale de Riemann convergente si et seulement si $1-x<1 \Leftrightarrow x>0$ Donc $\int\limits_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ est convergente si et seulement si $x>0$

En $+\infty$ : $t^{x-1}e^{-t} = o(\frac{1}{t^2})$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ donc par négligeabilité $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.
Donc $\int\limits_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ est convergente pour tout $x>0$

Bilan: $\Gamma(x)$ est convergente si et seulement si $x>0$ et donc $\boxed{I = ]0,+\infty[}$

b) Posons $\begin{array}{cccc} f & : & I^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,t) & \mapsto & t^{x-1}e^{-t} \end{array}$ , ainsi $\forall x \in I$ , $\Gamma(x) = \int_I f(x,t)dt$

Soit $[a,b]$ un segment inclus dans $I$ et $x \in [a,b]$.
$x \in [a,b] \Rightarrow a \leq x \leq b \Rightarrow a-1 \leq x-1 \leq b-1$

Alors $t \in ]0,1[ \Rightarrow ln(t) < 0$ et donc $a-1 \leq x-1 \Rightarrow (a-1)ln(t) \geq (x-1)ln(t)$, on prend l'exponentielle qui est croissante et on a : $exp((a-1)ln(t)) \geq exp((x-1)ln(t))$ donc $0 \leq t^{x-1} \leq t^{a-1}$

Alors $t \in [1,+\infty[ \Rightarrow ln(t) \geq 0$ et donc $x-1 \leq b-1 \Rightarrow (x-1)ln(t) \geq (b-1)ln(t)$, on prend l'exponentielle qui est croissante et on a : $exp((x-1)ln(t)) \geq exp((b-1)ln(t))$ donc $0 \leq t^{x-1} \leq t^{b-1}$

On a donc $\forall t \in I$ ,$\forall x \in [a,b]$ , $\begin{cases} 0 \leq t^{x-1} \leq t^{a-1} \text{ si } t \in ]0,1[ \\ 0 \leq t^{x-1} \leq t^{b-1} \text{ si } t \in ]1,+\infty[ \end{cases}$

Comme $t^{a-1} \leq t^{a-1}+t^{b-1}$ et $t^{b-1} \leq t^{a-1}+t^{b-1}$ on a donc $\forall t \in I$ ,$\forall x \in [a,b]$ , $0 \leq t^{x-1} \leq t^{a-1}+t^{b-1}$ et en multipliant par $e^{-t}>0$ on a : $0 \leq f(x,t) \leq e^{-t}(t^{a-1}+t^{b-1})$

Posons $\forall t \in I$ , $\varphi(t) = e^{-t}(t^{a-1}+t^{b-1}) = f(a,t)+f(b,t)$, alors $\varphi$ est continue par morceaux sur $I$ et intégrable sur $I$ par le a) comme somme de deux fonctions intégrables.

On a donc : $\begin{cases} \forall x \in [a,b] \text{ , } t \mapsto f(x,t) \text{ est continue sur } [a,b] \\ \forall t \in I \text{ , } x \mapsto f(x,t) \text{ est continue par morceaux sur } I \\ \forall (x,t) \in [a,b] \times I \text{ , } |f(x,t)| \leq \varphi(t) \text{ et } \varphi \text{ est intégrable sur } I \end{cases}$

On peut alors appliquer le théorème de continuité sous le signe somme et on a $\Gamma$ qui est continue sur $[a,b]$

Comme $I = \bigcup\limits_{[a,b]\subset I} [a,b]$ ($I$ est la réunion de ses segments), alors $\boxed{\Gamma \text{ est continue sur } I}$

c) On remarque que $f$ est $C^\infty$ sur $I^2$ et que On a $\forall (x,t) \in I^2$ , $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = ln(t)t^{x-1}e^{-t}$

Soit $[a,b] \subset I$. Alors, en réutilisant le résultat du a) :
$\forall (x,t) \in [a,b] \times I$ , $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq |ln(t)|\,(t^{a-1}+t^{b-1})e^{-t}$

Posons $\forall t \in I$ , $\Psi(t) = |ln(t)|\,(t^{a-1} + t^{b-1})e^{-t}$

• Au voisinage de $+\infty$ : $\Psi(t) = o(\frac{1}{t^2})$ et comme $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ alors, par négligeabilité, $\Psi$ est intégrable sur $[1, +\infty[$

• Au voisinage de 0 : $\Psi(t) \sim |ln(t)|\,t^{a-1} = \frac{ln(t)}{t^{1-a}}$

On a $a > 0$ et donc $1 - a < 1$. On peut donc choisir $\alpha \in ]1 - a, 1[$ et on a : $\frac{\frac{ln(t)}{t^{1-a}}}{\frac{1}{t^\alpha}} = ln(t)t^{\alpha-(1-a)} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$ puisque $\alpha - (1 - a) > 0$

Au voisinage de 0 on a donc : $\Psi(t) = o(\frac{1}{t^\alpha})$ et comme $\alpha < 1$ donne $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ intégrable sur $]0, 1]$ alors, par négligeabilité, $\Psi$ est intégrable sur $]0, 1]$

$\Psi$ est intégrable sur $]0, 1]$ et sur $[1, +\infty[$ donc $\Psi$ est intégrable sur $]0, +\infty[= I$

On a donc :

$$\begin{cases} \forall x \in [a, b] \ , \ t \mapsto f(x, t) \text{ est continue par morceaux et intégrable sur } I \\ \forall t \in I \ , \ x \mapsto f(x, t) \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } I \\ \forall x \in [a, b] \ , \ t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \text{ est continue par morceaux sur } I \\ \text{il existe une application } \Psi \text{ continue par morceaux et intégrable sur } I \text{ telle que :} \\ \forall (x, t) \in [a, b] \times I \ , \ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\right| \leq \Psi(t) \end{cases}$$

on peut donc appliquer le théorème de dérivation sous le signe somme de Leibniz et on a :
$\Gamma$ est de classe $C^1$ sur $[a, b]$ et $\forall x \in [a, b]$ , $\Gamma'(x) = \int\limits_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)dt$

Comme ce résulat est valable pour segment inclu dans $I$, on a :

$$\boxed{\Gamma \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } I \text{ et } \forall x \in I \ , \ \Gamma'(x) = \int\limits_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)dt = \int\limits_0^{+\infty} ln(t))t^{x-1}e^{-t}dt}$$

d) On sait que $f$ est $C^\infty$ sur $I^2$ et on remarque que : $\forall k \in \mathbb{N}$ , $\forall (x, t) \in I^2$ , $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) = (ln(t))^k t^{x-1}e^{-t}$

Soit $[a, b] \subset I$. Alors, en réutilisant le résultat du a) :
$\forall k \in \mathbb{N}$ , $\forall (x, t) \in [a, b] \times I$ , $\left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)\right| \leq |ln(t)|^k\,(t^{a-1} + t^{b-1})e^{-t}$

Posons $\forall t \in I$ , $\Psi_k(t) = |ln(t)|^k\,(t^{a-1} + t^{b-1})e^{-t}$

On montre comme au c) que $\Psi_k$ est continue par morceaux et intégrable sur $I$.
Par application de la règle de comparaison pour les fonctions positives on a : $\forall x \in [a, b]$ , $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$ est intégrable sur $I$.

$$\text{On a donc } \begin{cases} \bullet\ \forall t \in I \ , \ x \mapsto f(x, t) \text{ est de classe } C^k \text{ sur } A \\ \bullet\ \forall x \in [a, b]\ \forall i \in [\![1; k-1]\!] \ , \ t \mapsto \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x, t) \text{ est continue par morceaux et } \textbf{intégrable} \text{ sur } I \\ \bullet\ \forall x \in A \ , \ t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \text{ est } \textbf{continue par morceaux} \text{ sur } I \\ \bullet \text{ il existe une fonction } \Psi_k \ \textbf{intégrable} \text{ sur } I \text{ telle que :} \\ \forall (x, t) \in A \times I \ , \ \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)\right| \leq \Psi_k(t) \textbf{(Hypothèse de domination)} \end{cases}$$

On peut application la généralisation du théorème de dérivation sous le signe somme et on a donc que la fonction $\Gamma$ est de classe $C^k$ sur $[a, b]$ et vérifie $\forall x \in [a, b]$ , $\forall i \in [\![1; k]\!]$ , $\Gamma^{(i)}(x) = \int\limits_I \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x, t)dt$

Comme ce résultat est valable pour tout $[a, b] \subset I$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a donc :

$$\boxed{\Gamma \text{ est } C^\infty \text{ sur } I = ]0, +\infty[ \text{ et } \forall k \in \mathbb{N} \ , \ \forall x \in ]0, +\infty[ \ , \ \Gamma^{[k)}(x) = \int\limits_0^{+\infty} (ln(t))^k t^{x-1}e^{-t}dt}$$