Chapitre 17 : Equation différentielles linéaires scalaire fonction de la variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}^n$

Enoncé, Exercice 17.1

Résoudre sur $I =]-1;+\infty[$ l'équation différentielle : $Eq \Leftrightarrow (x+1)y'(x) - (x-1)y(x) = 1$

Correction

On remarque que Eq est une équation différentielle linéaire d'ordre 1, à coefficients continues, d'équation homogène associée : $E_0 \Leftrightarrow (x+1)y'(x) - (x-1)y(x) = 0$
Alors, comme sur I on a $x+1 \neq 0$, on a : $E_0 \Leftrightarrow y'(x) = \frac{x-1}{x+1}y(x)$

$\int \frac{x-1}{x+1}dx = \int \frac{x+1-1-1}{x+1}dx = \int (1 - \frac{2}{x+1})dx = x - 2ln(|x+1|) = x - 2ln(x+1)$ (car $x+1 > 0$ sur I)
On sait alors d'après le cours que :
$E_0 \Leftrightarrow y(x) = \alpha exp(x - 2ln(x+1)) \Leftrightarrow y(x) = \alpha \frac{e^x}{(x+1)^2}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$

Pour résoudre Eq on va utiliser la méthode de variation de la constante. On cherche donc les solutions de Eq sous la forme : $y(x) = \lambda(x)y_0(x)$ avec $y_0(x) = \frac{e^x}{(x+1)^2}$
Ce changement de fonction inconnue est licite car $y_0(x) \neq 0$ sur I
Alors $y'(x) = \lambda(x)y_0'(x) + \lambda'(x)y_0(x)$
On a donc :
$Eq \Leftrightarrow (x+1)y'(x) - (x-1)y(x) = 1$
$\Leftrightarrow (x+1)(\lambda(x)y_0'(x) + \lambda'(x)y_0(x)) - (x-1)\lambda(x)y_0(x) = 1$
$\Leftrightarrow \lambda(x)[(x+1)y_0'(x) - (x-1)y_0(x)] + +(x+1)\lambda'(x)y_0(x)) = 1$
Mais y_0 est solution de E_0 donc $(x+1)y_0'(x) - (x-1)y_0(x) = 0$ et donc
$Eq \Leftrightarrow (x+1)\lambda'(x)y_0(x) = 1$
$\Leftrightarrow (x+1)\lambda'(x)\frac{e^x}{(x+1)^2} = 1$
$\Leftrightarrow \lambda'(x) = (x+1)e^{-x}$ on fait une intégration par partie avec des fonctions C^1
$\Leftrightarrow \lambda(x) = [-(x+1)e^{-x}] + \int e^{-x}dx$
$\Leftrightarrow \lambda(x) = -(x+1)e^{-x} - e^{-x} + \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$
$\Leftrightarrow \lambda(x) = -(x+2)e^{-x} + \alpha$ mais $y(x) = \lambda(x)y_0(x)$
$\Leftrightarrow y(x) = (-(x+2)e^{-x} + \alpha)\frac{e^x}{(x+1)^2}$
$\Leftrightarrow y(x) = -\frac{x+2}{(x+1)^2} + \alpha\frac{e^x}{(x+1)^2}$

Bilan : $\boxed{\text{Les solutions de } Eq \text{ sur }]-1;+\infty[\text{ s'écrivent } y(x) = -\frac{x+2}{(x+1)^2} + \alpha\frac{e^x}{(x+1)^2} \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}}$

Enoncé, Exercice 17.2

Trouver les fonctions y de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, vérifiant :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \qquad y''(x) - 4y'(x) + 13y(x) = 169x \\ \qquad\qquad\quad y(0) = 0 \\ \qquad\qquad\quad y'(0) = 5 \end{cases}$$

Correction

On a une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, et second membre continue avec conditions initiales. On notera E cette équation différentielle.
L'unicité de la solution est assurée par le théorème (de Cauchy) du cours.
L'équation homogène E_0 associée est $y''(x) - 4y'(x) + 13y(x) = 0$, comme elle est a coefficients constants, on peut considérée son équation caractéristique :
$r^2 - 4r + 13 = 0$ de $\Delta = 16 - 52 = -36 = (6i)^2$
Les solutions conjuguées sont donc $r_1 = 2 + 3i$ et $r_2 = 2 - 3i$

Les solutions de E_0 s'écrivent donc $y(x) = exp(2x)(Acos(3x) + Bsin(3x))$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$

Vu la forme du second membre on va chercher une solution particulière sous la forme
$y_p(x) = ax + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

Alors : y_p solution de E sur $\mathbb{R}$
$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \;\; y_p''(x) - 4y_p'(x) + 13y_p(x) = 169x$
$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \;\; 0 - 4(a) + 13(ax + b) = 169x$ or un polynôme nul à tous ses coefficients nuls
$\Leftrightarrow \begin{cases} -4a + 13b = 0 \\ 13a = 169 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} a = 13 \\ b = 4 \end{cases}$

Une solution particulière de E est donc $y_p(x) = 13x + 4$

On a une équation différentielle **linéaire** donc la solution générale s'écrit comme la somme d'une solution particulière et d'une solution de l'équation homogène.
Les solutions de E s'écrivent donc $y(x) = 13x + 4 + exp(2x)(Acos(3x) + Bsin(3x))$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$

Alors $y'(x) = 13 + 2exp(2x)(Acos(3x) + Bsin(3x)) + exp(2x)(-3Asin(3x) + 3Bcos(3x))$
donc $y'(0) = 13 + 2A + 3B$. On a aussi : $y(0) = 4 + A$
Les conditions initiales donnent donc :
$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + A = 0 \\ 13 + 2A + 3B = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -4 \\ B = 0 \end{cases}$

Finalement, notre problème de Cauchy admet une unique solution donnée par

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \;,\; y(x) = 13x + 4 - 4e^{2x}cos(3x)}$$

Enoncé, Exercice 17.3

Déterminer les solutions sur $I =]0; +\infty[$ de $E \Leftrightarrow x^2y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0$ en les cherchant sous la forme : $y(x) = x\lambda(x)$

Correction

Remarque préliminaire : E est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène, à coefficients continue sur I (puisque $x \neq 0$ sur I) on sait donc que l'ensemble des solutions est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension 2.

Posons $\forall x \in I \ , \ y_0(x) = x$.
Alors : $\forall x \in I \ , \ x^2y_0''(x) - xy_0'(x) + y_0(x) = 0 - x + x = 0$,
y_0 est donc une solution particulière de E

Comme $y_0(x) \neq 0$ sur I on peut utiliser le changement de fonction inconnue :
$y(x) = \lambda(x)y_0(x) = x\lambda(x)$
Alors $y'(x) = \lambda(x) + x\lambda'(x)$ et $y''(x) = 2\lambda'(x) + x\lambda''(x)$

$E \Leftrightarrow \forall x \in I \ , \ x^2y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0$
$\Leftrightarrow \forall x \in I \ , \ x^2(2\lambda'(x) + x\lambda''(x)) - x(\lambda(x) + x\lambda'(x)) + x\lambda(x) = 0$
$\Leftrightarrow \forall x \in I \ , \ x^3\lambda''(x) + (2x^2 - x^2)\lambda'(x) = 0$
$\Leftrightarrow \forall x \in I \ , \ x\lambda''(x) + \lambda'(x) = 0$

On pose $A(x) = \lambda'(x)$ pour se ramener à une EDL_1

$E \Leftrightarrow \forall x \in I \ , \ A'(x) = \frac{-1}{x}A(x)$

$\int \frac{-1}{x}dx = -ln(x)$ (car $x > 0$ sur I) et donc d'après le cours :

$E \Leftrightarrow \forall x \in I \ , \ A(x) = aexp(-ln(x))$
$\Leftrightarrow \forall x \in I \ , \ A(x) = \lambda'(x) = a\frac{1}{x}$ avec $a \in \mathbb{R}$
$\Leftrightarrow \forall x \in I \ , \ \lambda(x) = aln(x) + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$
$\Leftrightarrow \forall x \in I \ , \ y(x) = axln(x) + bx$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

Bilan : les solutions de E sur I s'écrivent $\boxed{y(x) = axln(x) + bx \text{ avec } (a, b) \in \mathbb{R}^2}$

Enoncé, Exercice 17.4

Calculer la dérivée nième de $f(x) = (x^2+1)e^{2x}$

Correction

Déjà f est C^∞ sur $\mathbb{R}$.
On pose $\forall x \in \mathbb{R}$, $a(x) = x^2+1$ et $b(x) = e^{2x}$
Alors a et b sont C^∞ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $b^{(k)}(x) = 2^k e^{2x}$
De plus $a'(x) = 2x$, $a''(x) = 2$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3 \Rightarrow a^{(k)}(x) = 0$

Par la formule de Leibniz on a $f = ab \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{(k)}(x) b^{(n-k)}(x)$
Avec les calculs précédents :

$$\begin{aligned}
&f^{(n)}(x)\\
&= \sum_{k=0}^{2} \tbinom{n}{k} a^{(k)}(x) 2^{n-k} e^{2x}\\
&= (x^2+1)2^n e^{2x} + n(2x)2^{n-1}e^{2x} + \tfrac{n(n-1)}{2}(2)2^{n-2}e^{2x}\\
&= (x^2+1)2^n e^{2x} + nx2^n e^{2x} + \tfrac{n(n-1)}{4}2^n e^{2x}\\
&= [(x^2+1) + nx + \tfrac{n(n-1)}{4}]2^n e^{2x}\\
&= [4x^2 + 4nx + (n^2-n+4)]2^{n-2}e^{2x}
\end{aligned}$$

On remarque que la formule est valable pour $n \leq 2$ et donc :
$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \ , \ f^{(n)}(x) = [4x^2 + 4nx + (n^2-n+4)]2^{n-2}e^{2x}}$

Enoncé, Exercice 17.5

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ deux constantes fixés. On pose : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\Delta(t) = \begin{vmatrix} 1 & cos(t) & sin(t) \\ 1 & cos(t+\alpha) & sin(t+\alpha) \\ 1 & cos(t+\beta) & sin(t+\beta) \end{vmatrix}$

a) Montrer que la fonction Δ est constante.
b) En déduire une expression simple de $\Delta(t)$

Correction

a) Le déterminant est multilinéaire et les fonctions coordonnées de la matrice sont dérivables, donc Δ et dérivable. En utilisant le cours (on dérive les colonnes l'une après l'autre) :

$$\Delta'(t) = \begin{vmatrix} 0 & cos(t) & sin(t) \\ 0 & cos(t+\alpha) & sin(t+\alpha) \\ 0 & cos(t+\beta) & sin(t+\beta) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -sin(t) & sin(t) \\ 1 & -sin(t+\alpha) & sin(t+\alpha) \\ 1 & -sin(t+\beta) & sin(t+\beta) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & cos(t) & cos(t) \\ 1 & cos(t+\alpha) & cos(t+\alpha) \\ 1 & cos(t+\beta) & cos(t+\beta) \end{vmatrix}$$

Quand il y a deux colonnes égales (ou une colonne nulle) un déterminant est nul donc $\Delta'(t) = 0$
Comme on est sur un intervalle : $\boxed{\Delta \text{ est constante.}}$

b) D'après le a) $\forall t \in \mathbb{R}$, $\Delta(t) = \Delta(0)$ On développe par rapport à la première ligne.
$\Delta(0)$
$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & cos(\alpha) & sin(\alpha) \\ 1 & cos(\beta) & sin(\beta) \end{vmatrix}$
$= \begin{vmatrix} cos(\alpha) & sin(\alpha) \\ cos(\beta) & sin(\beta) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & sin(\alpha) \\ 1 & sin(\beta) \end{vmatrix}$
$= cos(\alpha)sin(\beta) - cos(\beta)sin(\alpha) + sin(\beta) - sin(\alpha) = sin(\beta - \alpha) + sin(\beta) - sin(\alpha)$

On a donc : $\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \ , \ \Delta(t) = \begin{vmatrix} 1 & cos(t) & sin(t) \\ 1 & cos(t+\alpha) & sin(t+\alpha) \\ 1 & cos(t+\beta) & sin(t+\beta) \end{vmatrix} = sin(\beta - \alpha) + sin(\beta) - sin(\alpha)}$

Enoncé, Exercice 17.6

Résoudre le système différentielle suivant : $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x'(t) = x(t) + 2y(t) \\ y'(t) = -3x(t) + 6y(t) \end{cases}$

Correction

On pose $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ On a alors : $X'(t) = AX(t)$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

Soit P_A le polynôme caractéristique de A.
$P_A(X) = det(XI_2 - A) = \begin{pmatrix} X-1 & -2 \\ 3 & X-6 \end{pmatrix} = X^2 - 7X + 12 = (X-3)(X-4)$
$\lambda \in sp(A) \Leftrightarrow P_A(\lambda) = 0$ on en déduit $sp(A) = \{3; 4\}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in ker(A - 3I_2) \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ -3x + 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y$ donc $ker(A - 3I_2) = vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in ker(A - 4I_2) \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 2y = 0 \\ -3x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3x + 2y = 0$ donc $ker(A - 4I_2) = vect(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

A est diagonalisable. On obtient une base diagonalisant A par réunion des bases des sous-espaces propres. Par la formule de changement de bases : $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

Alors : $(S) \Leftrightarrow X'(t) = AX(t) \Leftrightarrow X'(t) = PDP^{-1}X(t)$. On multiplie à gauche par P^{-1} et on pose $Y(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = P^{-1}X(t)$

Donc $(S) \Leftrightarrow P^{-1}X'(t) = DP^{-1}X(t) \Leftrightarrow Y'(t) = DY(t) \Leftrightarrow \begin{cases} u'(t) = 3u(t) \\ v'(t) = 4v(t) \end{cases}$

On a deux équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants homogène.
Donc d'après le cours : $\begin{cases} u(t) = aexp(3t) \\ v'(t) = bexp(4t) \end{cases}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

$Y = P^{-1}X \Rightarrow X(t) = PY(t) \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x(t) = ae^{3t} + 2be^{4t} \\ y(t) = ae^{3t} + 3be^{4t} \end{cases}}$ On a bien les solutions du système cherché.