Feuille d'exercices n°52 : chap. 18

Exercice 427. *On pose* $\forall (n,t) \in \mathbb{N}^* \times [0;+\infty[\ f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-t/n}$

Calculer $\int\limits_0^{+\infty} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)dt$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} f_n(t)dt$

Exercice 428. *Déterminer* $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} \frac{exp(-\frac{x}{n})}{1+x^2}dx$

Exercice 429. *a) Majorer* $x \mapsto nx(1-x)^n$ *sur* $[0,1]$ *indépendamment de* n.

b) Déterminer : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_0^1 nx(1-x)^n dx$

Exercice 430. *Déterminer* $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} \frac{nsin(\frac{x}{n})}{x(1+x^2)}dx$

Exercice 431. *On pose, pour tout* $n \geq 1$, $I_n = \int\limits_0^1 \frac{1}{1+t^n}dt$

a) Utiliser le théorème de convergence dominée pour calculer $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

b) En effectuant une intégration par partie et en réutilisant le théorème de convergence dominée, montrer que : $I_n - \ell \sim \frac{-ln(2)}{n}$

Exercice 432. *On pose :* $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{(x+1)^n}dx$

a) Montrer que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bien définie et déterminer* $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n$

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $nA_{n+1} + A_n = 1$ *et en déduire un équivalent de* A_n.

On considère la série entière $S(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} A_n z^n$

c) Déterminer le rayon de convergence R *de* $S(z)$.

d) Montrer que : $\forall z \in \mathbb{C}$ *tel que* $|z| < R$: $S(z) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{(x+1)e^{-x}}{x+1-z}dx$

Exercice 433. ($\star$)

Dans cette exercice on admet que : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ *On pose* $\forall t > 0$, $f(t) = \frac{1}{t} ln(\left|\frac{1-t}{1+t}\right|)$

Montrer que : $\int\limits_0^1 f(t)dt = \int\limits_1^{+\infty} f(t)dt$ *et calculer cette valeur commune.*

Indication : on pourra développer f *en série entière.*

Exercice 434. ($\star$)

Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_0^{\sqrt{n}} (1-\frac{t^2}{n})^n dt = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$