Feuille d'exercices n°53 : chap. 18

Exercice 435. ($\star$)

Utiliser le théorème d'intégration terme à terme pour démontrer que : $\int\limits_0^{+\infty} \frac{t}{e^t-1}dt = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

Exercice 436. ($\star$)

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{C}}$ une suite de nombres complexes telle que $\sum a_n n!$ soit absolument convergente.
Démontrer que : $\int\limits_0^{+\infty} \left(e^{-x}\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)dx = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n n!$

Exercice 437. ($\star$)

Démontrer que : $\int\limits_0^{+\infty} cos(\sqrt{x})e^{-x}dx = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n n!}{(2n)!}$

Exercice 438. *On pose* $I =]1,+\infty[$ *et* $\forall x > 0$, $f(x) = \int\limits_x^{2x} \frac{1}{ln(t)}dt$

a) Montrer que f est bien définie sur I, de classe C^∞ et calculer la dérivée de f sur I.
b) A l'aide d'un encadrement, montrer que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{ln(x)}$
c) Pour $x > 1$, étudier : $f(x) - \int\limits_x^{2x} \frac{dt}{tln(t)}$ *En déduire la limite* $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$
d) Dresser le tableau de variation de f
e) Ecrire un programmme Python permettant d'obtenir une valeur approchée de $f(2)$.
f) Tracer la représentation graphique de f avec Python.

Exercice 439. *On pose* $I = [0;+\infty[$ *et* $\forall x \in I$ $h(x) = \int\limits_0^x e^{-t^2}dt$ *et* $g(x) = \int\limits_0^1 \frac{exp(-x^2(1+t^2)))}{1+t^2}dt$

A) Montrer que $\lambda = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ *est convergente.*
B) a) Montrer que h est de classe C^∞ sur I
B) b) Dresser le tableau de variation de h
C) a) Montrer que g est de classe C^1 sur I et calculer $g'(x)$.
C) b) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$
D) On pose $\forall x \in I$ $\varphi(x) = g(x) + h(x)^2$
D) a) Montrer que φ est de classe C^1 sur I et calculer $\varphi'(x)$
D) b) Etudier φ aux bornes de I et en déduire λ

Exercice 440. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in I =]0,+\infty[$, on pose alors :* $I_n(x) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2+x^2)^n}dt$

a) Montrer que I est de classe C^1 sur I et calculer sa dérivée sous forme d'intégrale.
En déduire une relation entre I'_n et I_{n+1}
b) Calculer : $A = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^3}dt$