Feuille d'exercices n°54 : chap. 18

Exercice 441. *On pose* $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{ln(1+x^2t^2)}{1+t^2} dt$.

a) Montrer que f *est définie et continue sur* $\mathbb{R}$.
b) Montrer que f *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^*$ *et exprimer* f' *sous forme d'intégrale.*
c) Calculer $f'(x)$ *pour* $x > 0$.
d) Déterminer $f(x)$ *pour tout* x.
e) Tracer la représentation graphique de f*, en particulier au point d'abscisse* 0.

Exercice 442. *On pose* $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{Arctan(xt)}{t(1+t^2)} dt$

a) Calculer $f(x)$ *sur* $\mathbb{R}$ *après avoir montrer que* f *était de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}$
b) En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{Arctan(t)}{t(1+t^2)} dt$
c) Tracer la représentation graphique de f*.* f *est-telle de classe* C^2 *?*

Exercice 443. *On admet l'existence et la valeur de* $G = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

On pose la fonction $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} ch(tx) dt$
a) Montrer que f *est définie sur* $\mathbb{R}$.
b) Montrer que f *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}$ *et déterminer une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par* f.
c) Exprimer $f(x)$ *à l'aide des fonctions usuelles sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 444. ($\star$)

a) Montrer que : $\forall x > -1 \ , \ \int_0^1 \frac{t-1}{ln(t)} t^x dt = ln(\frac{x+2}{x+1})$
b) Evaluer la formule ci-dessus en $x = 0$

Exercice 445. *a) Montrer que :* $A = \int_0^{+\infty} \frac{exp(-t)}{\sqrt{t}} dt$ *est convergente.*

On admet que : $A = \sqrt{\pi}$
On pose : $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{exp(-t)}{\sqrt{t}} exp(ixt) dt$
b) Montrer que f *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}$
c) Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 1 vérifiée par f
d) Déterminer $f(x)$ *à l'aide des fonctions usuelles.*