Chapitre 18 : Théorèmes de convergence dominée ; intégrales à paramètres

Dans ce chapitre, les fonctions sont de la variable réelle et à valeurs dans K avec $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Suites et séries de fonctions intégrables

1.1 Théorème de convergence dominée

1.1.1 Théorème

Théorème . *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n : I \to K)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur I. Alors :*

$$\begin{cases} i)\ (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge simplement vers une fonction notée } f : I \to K \text{ continue par morceaux sur } I \\ ii)\ \text{il existe une fonction } \varphi : I \to K \text{ telle que } \varphi \text{ est intégrable sur } I \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \forall t \in I\ ,\ |f_n(t)| \leq \varphi(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{les fonctions } f_n \text{ et la fonction } f \text{ sont intégrables sur } I \\ \int_I f_n(t)dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_I f(t)dt \end{cases}$$

preuve : HP théorème de convergence dominée de Lebesgue, utilise la théorie de la mesure de Lebesgue ...

Remarques. *Autre écriture :* $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_I f_n(t)dt = \int_I \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)dt$

L'hypothèse ii) s'appelle hypothèse de domination

1.1.2 Exemple

Etudions $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{nt^2}{(1+nt^2)(1+t^2)}dt$

1.1.3 Contre-exemple

Etudions $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 n^2t^n dt$

1.1.4 Autre exemple

Si on pose $S_n(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} (-t)^k$ ... on arrive à montrer que : $ln(2) = \int_0^1 \frac{1}{1+t}dt = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

1.2 Théorème d'intégration terme à terme

1.2.1 Théorème

Théorème . *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\sum f_n$ une série de fonctions de I dans K.*

$$Si \begin{cases} i)\ les\ f_n\ sont\ continues\ par\ morceaux\ et\ \textbf{intégrables}\ sur\ I \\ ii)\ \sum f_n\ converge\ simplement\ sur\ I\ vers\ une\ fonction\ continue\ par\ morceaux\ sur\ I \\ iii) \sum \int_I |f_n(t)|\, dt\ est\ convergente \end{cases}$$

$$alors \begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n\ est\ \textbf{intégrable}\ sur\ I \\ \sum \int_I f_n\ est\ convergente \\ \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)dt \end{cases}$$

preuve : HP

Remarque. *La troisième hypothèse est est la plus importante.*

1.2.2 Exemple

$$f_n \ : \ \begin{array}{ccc}]0;1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & ln(t)(-t)^n \end{array}$$ permet de démontrer $\int_0^1 \frac{ln(t)}{1+t} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

1.2.3 Contre-exemple

$$f_n \ : \ \begin{array}{ccc}]-1;1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t^{2n+1} \end{array}$$

1.2.4 Utilisation du théorème de convergence dominée pour les sommes partielles

$\forall x > 0$, $\frac{cos(x)}{e^x+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} e^{-nx} cos(x)$

$$f_n \ : \ \begin{array}{ccc} [0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & (-1)^{n-1} e^{-nx} cos(x) \end{array}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{cos(x)}{e^x+1} dx = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{k}{1+k^2}$$

On a la conclusion du théorème d'intégration terme à terme mais celui-ci n'est pas applicable, il faut utiliser le théorème de convergence dominée pour les sommes partielles

2 Intégrale dépendant d'un paramètre

2.1 Présentation

2.1.1 Blabla

Dans ce paragraphe on va étudier les fonctions de la forme $f(x) = \int\limits_a^b g(x,t)dt$ que l'on nomme intégrale dépendant d'un paramètre.

Il y a aussi les fonctions de la forme $f(x) = \int\limits_{a(x)}^{b(x)} g(t)dt$ que l'on peut étudier, en posans G une primitive de g et avec l'expression $f(x) = G(b(x)) - G(a(x))$.

Les fonctions de la forme $f(x) = \int\limits_{a(x)}^{b(x)} g(x,t)dt$ sont à priori hors programme, mais un changement de variable peut parfois permettre de se ramener au cas qui nous intéresse $\boxed{f(x) = \int\limits_a^b g(x,t)dt}$

2.1.2 Exemple

Etude de $f(x) = \int\limits_x^{2x} e^{-t^2}dt$

2.1.3 Exemples

Exemple. *1*
$F(x) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt$
Domaine de définition : $D =]0, +\infty[$
Exemple. *2 : Fonction Gamma d'Euler*
$\Gamma(x) = \int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$
Domaine de définition : $D =]0; +\infty[$

2.2 Continuité

2.2.1 Théorème

Théorème . *Soit A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$ et une application* $\begin{array}{cccc} f & : & A \times I & \longrightarrow & K \\ & & (x,t) & \mapsto & f(x,t) \end{array}$

Si $\begin{cases} \bullet\ \forall t \in I\ ,\ x \mapsto f(x,t) \text{ est continue sur } A \\ \bullet\ \forall x \in A\ ,\ t \mapsto f(x,t) \text{ est continue par morceaux sur } I \\ \bullet\ \text{il existe une fonction } \varphi \textbf{ intégrable} \text{ sur } I \text{ telle que :} \\ \forall (x,t) \in A \times I\ ,\ |f(x,t)| \leq \varphi(t)\ \textbf{(Hypothèse de domination)} \end{cases}$
alors la fonction $x \mapsto \int\limits_I f(x,t)dt$ *est définie et continue sur A.*

Remarque. *La propriété de continuité étant une propriété locale. On se ramène souvent à des segments de A (voir exemples) puisque si F est continue sur tout segment de A alors F est continue sur A.*

preuve :

2.2.2 Exemple

Suite des exemples précédents

2.2.3 Contre - exemple

$g(x) = \int\limits_0^{+\infty} xe^{-xt}dt$

2.3 Théorème de dérivation (Formule de Leibniz)

2.3.1 Théorème

Théorème . *Soit A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$ et une application* $\begin{array}{cccc} f & : & A\times I & \longrightarrow & K \\ & & (x,t) & \mapsto & f(x,t) \end{array}$

Si $\begin{cases} \bullet\ \forall t\in I\ ,\ x\mapsto f(x,t) \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } A \\ \bullet\ \forall x\in A\ ,\ t\mapsto f(x,t) \text{ est continue par morceaux et } \textbf{intégrable} \text{ sur } I \\ \bullet\ \forall x\in A\ ,\ t\mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \text{ est } \textbf{continue par morceaux} \text{ sur } I \\ \bullet \text{ il existe une fonction } \varphi \textbf{ intégrable} \text{ sur } I \text{ telle que :} \\ \forall (x,t)\in A\times I\ ,\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi(t)\ \textbf{(Hypothèse de domination)} \end{cases}$

alors

la fonction $g : x\mapsto \int\limits_I f(x,t)dt$ *est de classe* C^1 *sur* A *et vérifie* $\forall x\in A\ ,\ g'(x) = \int\limits_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$

Remarque. $g'(x) = \frac{d}{dx}(g(x)) = \frac{d}{dx}(\int\limits_I f(x,t)dt) = \int\limits_I \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)dt$

On dit que l'on dérive sous le signe somme.

preuve :

2.3.2 Exemple

Suite des exemples précédents

2.4 Extension du théorème de dérivation

2.4.1 Théorème

Théorème . *Soit A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$, soit $k \in \mathbb{N}^*$ et soit une application* $f \begin{array}{rcl} : & A \times I & \longrightarrow & K \\ & (x,t) & \mapsto & f(x,t) \end{array}$

$$\text{Si } \begin{cases} \bullet\ \forall t \in I\ ,\ x \mapsto f(x,t) \text{ est de classe } C^k \text{ sur } A \\ \bullet\ \forall x \in A\ \forall i \in [\![0; k-1]\!]\ ,\ t \mapsto \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x,t) \text{ est continue par morceaux et } \textbf{intégrable} \text{ sur } I \\ \bullet\ \forall x \in A\ ,\ t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) \text{ est } \textbf{continue par morceaux} \text{ sur } I \\ \bullet \text{ il existe une fonction } \varphi \textbf{ intégrable} \text{ sur } I \text{ telle que :} \\ \forall (x,t) \in A \times I\ ,\ \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq \varphi(t) (\textbf{ Hypothèse de domination)} \end{cases}$$

alors

la fonction $g : x \mapsto \int\limits_I f(x,t)dt$ *est de classe* C^k *sur* A *et vérifie* $\forall x \in A\ \forall i \in [\![1; k]\!]\ ,\ g^{(i)}(x) = \int\limits_I \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x,t)dt$

Remarque. $g^{(k)}(x) = \frac{d^k}{dx^k}(g(x)) = \frac{d^k}{dx^k}(\int\limits_I f(x,t)dt) = \int\limits_I \frac{\partial^k}{\partial x^k} f(x,t)dt$
On dit que l'on dérive sous le signe somme.

preuve :

2.4.2 Exemple

Suite des exemples précédents

2.5 Théorème de convergence dominée à paramètre continue

2.5.1 Théorème

Théorème . *Soit A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$, soit a une borne de A et soit une application* $f \begin{array}{rcl} : & A \times I & \longrightarrow & K \\ & (x,t) & \mapsto & f(x,t) \end{array}$

$$\text{Si } \begin{cases} \bullet\ \forall t \in I\ ,\ f(x,t) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \lambda(t) \\ \bullet\ \forall x \in A\ ,\ t \mapsto f(x,t) \text{ est continue par morceaux sur } I \\ \bullet\ t \mapsto \lambda(t) \text{ est continue par morceaux sur } I \\ \bullet \text{ il existe une fonction } \varphi \textbf{ intégrable} \text{ sur } I \text{ telle que :} \\ \forall (x,t) \in A \times I\ ,\ |f(x,t)| \leq \varphi(t)\ \textbf{(Hypothèse de domination)} \end{cases}$$

alors

λ *est intégrable sur* I *et* $\int\limits_I f(x,t)dt \underset{x \to a}{\longrightarrow} \int\limits_I \lambda(t)dt$

Remarques. *Autre écriture :* $\lim\limits_{x \to a} \int\limits_I f(x,t)dt = \int\limits_I \lim\limits_{x \to a} f(x,t)dt$
Utile surtout si $a = +\infty$ ou $a = -\infty$, sinon c'est le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre, avec éventuellement un prolongement.

preuve :

2.5.2 Exemple

On pose $\forall x \in I =]0, +\infty[\ ,\ F(x) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}dt$

a) Définition de F
b) Limite en $+\infty$
c) Equivalent en $+\infty$ en étudiant $xF(x)$

Sommaire

preuve du 2.2.1. : Théorème de continuité sous le signe somme

- Commençons par montrer que $F : x \in A \mapsto \int_I f(x,t)dt$ est bien définie.

Soit $x \in A$ fixé, alors, par hypothèse de domination : $\forall t \in I$, $|f(x,t)| \leq \varphi(t)$
Comme φ est intégrable sur I alors, par comparaison, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I donc $\int_I f(x,t)dt$ est bien convergente et on peut définir F.

- Soit $a \in A$. Montrons maintenant que F est continue en a en utilisant la continuité séquentielle.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$

Posons : $\forall n \in \mathbb{N}$: $\begin{array}{cccc} f_n & : & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \longmapsto & f(x_n,t) \end{array}$

On a alors, avec les hypothèses de l'énoncé :
$$\begin{cases} \text{les fonctions } f_n \text{ sont continues par morceaux sur } I \\ \text{la suit de fonctions } (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge simplement vers } t \in I \mapsto f(x_0,t) \\ \forall n \in \mathbb{N} \text{ , } \forall t \in I \text{ , } |f_n(t)| = |f(x,t)| \leq \varphi(t) \end{cases}$$
On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et on obtient que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_I f(x_n,t)dt = \int_I \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n,t)dt$
Autrement dit que : $\lim\limits_{n\to+\infty} F(x_n) = \int_I \lim\limits_{n\to+\infty} f(a,t)dt = F(a)$

Alors, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} F(x_n) = F(a)$

Par continuité séquentielle on a donc F continue en a.

F est continue en tout point $a \in A$ et donc F est continue sur A.

Bilan : F est définie et continue sur A