

Correction du devoir à la maison de Mathématiques n°10

EPITA 2025 : exercice 3

20.) • Calculons le polynôme caractéristique de A .

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X & -1 & -2 \\ -1 & X & -1 \\ -2 & 1 & X \end{vmatrix} \text{ on fait } L_1 \leftarrow L_1 + L_3$$

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-2 & 0 & X-2 \\ -1 & X & -1 \\ -2 & 1 & X \end{vmatrix} \text{ on fait } C_3 \leftarrow C_3 - C_1$$

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-2 & 0 & 0 \\ -1 & X & 0 \\ -2 & 1 & X+2 \end{vmatrix}$$

On a alors, puisque la matrice est triangulaire : $\chi_A(X) = (X-2)X(X+2)$

Comme $\lambda \in sp(A) \Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0$ on en déduit : $sp(A) = \{-2, 0, 2\}$

• On cherche maintenant les sous-esapces propres.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-2} = \ker(A - (-2)I_3) = \ker(A + 2I_3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{cases} \text{ on fait } L_1 \leftarrow L_1 + L_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 4z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = -x \\ y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

On a donc $E_{-2} = Vect(e_1)$ avec $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2 = \ker(A - I_3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y + 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 2x - y - 2z = 0 \end{cases} \text{ on a } L1 = -L_3 \text{ et on fait } L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3y + 4z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

On a donc $E_2 = Vect(e_2)$ avec $e_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_0 = \ker(A) \Leftrightarrow \begin{cases} y + 2z = 0 \\ x + z = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2z \\ x = -z \end{cases}$$

On a donc $E_0 = \text{Vect}(e_3)$ avec $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

- $A \in M_3(\mathbb{R})$ et A admet 3 valeurs propres distinctes, donc A est diagonalisable.

On obtient une base diagonalisant A par réunion des bases des sous-espaces propres. Par la formule de changement

de bases : $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

21.) Soit C une colonne propre de A . Notons λ la valeur propre associée.

Alors $C \neq 0$ car on a un vecteur propre. Comme A admet n valeurs propres alors ces valeurs propres sont simples et donc $\ker(A - \lambda I_3) = \text{Vect}(C)$

Comme $AM = MA$ alors $AMX = MAX \Rightarrow A(MX) = M\lambda X \Rightarrow A(MX) = \lambda(MX)$

donc $MX \in \ker(A - \lambda X) = \text{Vect}(C)$

On a donc $\exists \mu \in \mathbb{R}, MX = \mu X$ et comme $X \neq 0$ alors X est colonne propre de M

Bilan : Toute colonne propre de A est aussi colonne propre de M .

22.) La matrice P de la question 20.) est formée de colonnes propres de A et donc, par 21.) de colonne propre de M . La base formée par les colonnes de P est donc une base diagonalisant M et on a alors $P^{-1}MP$ diagonale.

On a donc : il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$, $P^{-1}MP$ et $P^{-1}AP$ sont diagonales.

23.) $M^2 = A \Leftrightarrow P^{-1}M^2P = P^{-1}AP \Leftrightarrow P^{-1}MPP^{-1}MP = D$ (notations 20.)

On pose $Y = P^{-1}MP$ qui est diagonale par 22. et on note alors : $D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$

On a alors : $M^2 = A \Leftrightarrow Y^2 = D \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = -2 \\ b^2 = 2 \\ c^2 = 0 \end{cases}$

Il n'y a pas de solutions dans $M_3(\mathbb{R})$ à cause de $a^2 = -2$, par contre, il y a quatre solutions dans $M_2(\mathbb{C})$ correspondant à $(a, b, c) = (i\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$, $(a, b, c) = (i\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0)$, $(a, b, c) = (-i\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ et $(a, b, c) = (-i\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0)$

Bilan : $M^2 = A$ n'admet pas de solution dans $M_2(\mathbb{R})$ et 4 solutions dans $M_2(\mathbb{C})$

24.) Si $B \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique définie positive, alors on sait qu'il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in]0, +\infty[$ tels que ; $B = P \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^T$

On peut alors poser, puisque les λ_i sont strictement positifs : $M = P \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) P^T$

Alors $M^T = (P \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) P^T)^T = (P^T)^T \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})^T P^T = M$ donc M est symétrique réelle.

Par définition M est diagonalisable de spectre : $sp(M) = \{\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}\}$ donc $sp(M) \subset]0, +\infty[$

On a donc bien $\exists M \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive telle $M^2 = B$

EPITA 2025 : exercice 1

1. Comme f est bornée sur $\mathbb{R}$ alors il existe $M > 0$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq M$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $|\lambda^n f(x + na)| \leq M\lambda^n$

Comme $|\lambda| < 1$ alors $\sum \lambda^n$ est une série géométrique convergente

Donc, par comparaison $\sum \lambda^n f(x + na)$ est absolument convergente donc convergente.

Bilan : $\boxed{F \text{ est donc bien définie sur } \mathbb{R} \text{ si } f \text{ est bornée sur } \mathbb{R}.}$

2.a) Comme dans le 1., comme f est bornée sur $\mathbb{R}$ on a : $\exists M > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq M$

Si on pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \lambda^n f(x + na)$

Alors $\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| \leq M |\lambda|^n$

Comme $|\lambda| < 1$ alors $\sum M |\lambda|^n$ est une série géométrique convergente et on en déduit, par comparaison, que $\sum \|f_n\|_\infty$ est convergente.

On a donc que $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, donc que $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$

Comme de plus les f_n sont continue (car f continue), alors, par le théorème de transfert de continuité pour les séries de fonctions, on en déduit que :

$\boxed{F \text{ est définie et continue sur } \mathbb{R}}$

2.b) On a : $\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \ell \lambda^n$

De plus, par le a), $\sum f_n$ converge uniformément vers F , donc par le théorème de la double limite on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ell \lambda^n = \frac{\ell}{1-\lambda} \quad (\text{série géométrique de raison } \lambda \in]-1, 1[)$$

On a donc : $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \frac{\ell}{1-\lambda}}$

3) • La fonction nulle est clairement dans donc n'est pas vide.

• Soit $f, g \in \mathcal{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$f \in \mathcal{E} \Rightarrow \exists K_f > 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| \leq K_f |x - y|$

$g \in \mathcal{E} \Rightarrow \exists K_g > 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |g(x) - g(y)| \leq K_g |x - y|$

Alors : $|(f + \lambda g)(x) - (f + \lambda g)(y)| = |(f(x) - f(y)) + \lambda(g(x) - g(y))|$

Donc par inégalité triangulaire :

$$|(f + \lambda g)(x) - (f + \lambda g)(y)| \leq |f(x) - f(y)| + |\lambda| |g(x) - g(y)|$$

$$\Rightarrow |(f + \lambda g)(x) - (f + \lambda g)(y)| \leq K_f |x - y| + |\lambda| K_g |x - y| \leq (K_f + |\lambda| K_g) |x - y|$$

On a donc $f + \lambda g$ qui est $K_f + |\lambda| K_g$ lipschitzienne et donc dans

• est non vide et stable par combinaison linéaire donc $\boxed{\mathcal{E} \text{ est un } \mathbb{R} \text{ espace vectoriel.}}$

4) Par la deuxième inégalité triangulaire : $|f(x)| - |f(0)| \leq |f(x) - f(0)|$

Et puisque f est K_f lipschitzienne : $|f(x)| - |f(0)| \leq |f(x) - f(0)| \leq K_f |x - 0| = K_f |x|$

On en déduit : $|f(x)| \leq |f(0)| + K_f |x|$

Avec $A = K_f$ et $B = |f(0)|$ on a : $\boxed{\exists (A, B) \in [0, +\infty]^2, |f(x)| \leq A |x| + B}$

5) Si on fixe $x \in \mathbb{R}$ et que l'on pose $u_n = \lambda^n f(x + na)$ alors, avec la question 4) :

$$|u_n| \leq \lambda^n (A + B|x + na|)$$

Donc $\left| \frac{u_n}{\frac{1}{n^2}} \right| \leq \lambda^n (A + B|x + na|) n^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ car $|\lambda| < 1$ et par comparaison exp-puissance

On en déduit : $u_n = o(\frac{1}{n^2})$ et comme $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, alors, par négligeabilité $\sum u_n$ est convergente.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum \lambda^n f(x + na)$ est convergente et donc $\boxed{F \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$.

6)a) • Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

Comme les séries convergent : $F(x) - F(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n (f(x + na) - f(y + na))$

$$\text{Mais } |(f(x + na) - f(y + na))| \leq K_f |(x + na) - (y + na)| = K_f |x - y|$$

Comme les séries convergent on a : $|F(x) - F(y)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda|^n K_f |x - y|$

donc $|F(x) - F(y)| \leq \frac{K_f}{1-|\lambda|} |x - y|$, donc F est lipschitzienne et $\boxed{F \in \text{Lip}(\frac{K_f}{1-|\lambda|})}$

$$\begin{aligned} & \bullet F(x) - \lambda F(x + a) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n f(x + na) - \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n f(x + a + na) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n f(x + na) - \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{n+1} f(x + (n+1)a) \text{ changement d'indice dans la deuxième somme} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n f(x + na) - \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^n f(x + na) \text{ changement d'indice dans la deuxième somme} \\ &= f(x) \text{ par télescopage.} \end{aligned}$$

On a donc : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, F(x) - \lambda F(x + a) = f(x)}$

6)b) Supposons qu'il existe $G \in \text{Lip}(\frac{1}{1-|\lambda|})$, $\forall x \in \mathbb{R}, G(x) - \lambda G(x + a) = f(x)$

Alors en posant $H = F - G$ on a, en soustrayant les relations vérifiées par F et G :

$$\forall x \in \mathbb{R}, H(x) - \lambda H(x + a) = 0$$

$$\text{Ou encore } \forall x \in \mathbb{R}, H(x) = \lambda H(x + a)$$

Ensuite, par une récurrence immédiate : $H(x) = \lambda^n H(x + na)$

Mais $H \in \text{Lip}(\frac{1}{1-|\lambda|})$ donc avec la question 4) , $\exists (A, B) \in [0, +\infty[^2$, $\forall y \in \mathbb{R}, |H(y)| \leq A|y| + B$

$$\text{On en déduit : } \forall x \in \mathbb{R}, |H(x)| \leq |\lambda|^n |H(x + na)| \leq |\lambda|^n (A|x + na| + B) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

(On a utilisé la comparaison exp-puissance et $|\lambda| < 1$)

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, H(x) = 0$ et donc $G = F$

$\boxed{F \text{ est l'unique élément } G \in \text{Lip}(\frac{1}{1-|\lambda|}) \text{ tel que : } \forall x \in \mathbb{R}, G(x) - \lambda G(x + a) = f(x)}$

7) Avec le f donnée on a : $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n f(x + na) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n = \frac{1}{1-\lambda}$ (car $|\lambda| < 1$ série géométrique)

$\boxed{\text{Si } f \text{ est la fonction constante égale à } 1, \text{ alors } F \text{ existe et est la fonction constante égale à } \frac{1}{1-\lambda}}$

8) Dans ce 8), comme f est bornée, alors F est bien définie par la question 1).

$$\begin{aligned} \text{Alors : } F(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \cos(x + na) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n [\cos(x)\cos(na) - \sin(x)\sin(na)] \\ &= \cos(x) \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \cos(na) - \sin(x) \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \sin(na) \end{aligned}$$

où l'on s'est assuré de la convergence des intégrales.

On remarque que :

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \cos(na) + i \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \sin(na) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n (\cos(na) + i \sin(na)) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n e^{ina} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda e^{ia})^n \text{ série géométrique de raison } \lambda e^{ia} \text{ avec } |\lambda e^{ia}| < 1 \\ &= \frac{1}{1 - \lambda e^{ia}} = \frac{1}{1 - \lambda \cos(a) - i \lambda \sin(a)} = \frac{1 - \lambda \cos(a) + i \lambda \sin(a)}{(1 - \lambda \cos(a))^2 + (\lambda \sin(a))^2} = \frac{1 - \lambda \cos(a) + i \lambda \sin(a)}{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos(a)} \end{aligned}$$

$$\text{On en déduit, par partie réelle et imaginaire : } \begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \cos(na) = \frac{1 - \lambda \cos(a)}{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos(a)} \\ \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \sin(na) = \frac{\lambda \sin(a)}{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos(a)} \end{cases}$$

$$\text{Et donc : } \forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \frac{\cos(x)(1 - \lambda \cos(a)) - \sin(x)\lambda \sin(a)}{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos(a)} = \frac{\cos(x) - \lambda \cos(x-a)}{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos(a)}$$

$$\text{Et donc : } \boxed{\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \frac{\cos(x) - \lambda \cos(x-a)}{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos(a)}}$$

ccINP 2023, PSI :problème 2

Q18) Si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ alors $M(a, b)$ est une matrice symétrique réelle et on sait alors, d'après le cours, qu'elle est diagonalisable. On a donc : $M(a, b)$ diagonalisable.

Q19) Un calcul direct donne: $M(a, b)V = (b + (n-1)a)V$. Comme $V \neq 0$, on a donc :

V est un vecteur propre de $M(a, b)$ associé à la valeur propre $b + (n-1)a$.

Q20)

$$\begin{aligned}
 P_{1,0}(X) &= \det(XI_n - M_{1,0}) \\
 &= \begin{vmatrix} X & -1 & \dots & -1 \\ -1 & X & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \dots & -1 & X \end{vmatrix} \quad \text{on ajoute toute les colonnes dans la première} \\
 &= \begin{vmatrix} X - (n-1) & -1 & \dots & \dots & -1 \\ X - (n-1) & X & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ X - (n-1) & -1 & \dots & -1 & X \end{vmatrix} \quad \text{on retranche la première ligne aux autres} \\
 &= \begin{vmatrix} X - (n-1) & -1 & \dots & \dots & -1 \\ 0 & X+1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & X+1 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

On a le déterminant d'une matrice triangulaire donc : $P_{1,0}(X) = (X - (n-1))(X + 1)^{n-1}$

Q21) • On a dans cette question $a \neq 0$

$$\begin{aligned}
 &P_{a,b}(X) \\
 &= \det(XI_n - M(a, b)) \\
 &= \det(XI_n - bI_n - aM(1, 0)) \\
 &= \det((X-b)I_n - aM(1, 0)) = \det(a[\frac{X-b}{a}I_n - M(1, 0)]) = a^n \det(\frac{X-b}{a}I_n - M(1, 0)) \text{ par multilinéarité du déterminant} \\
 &\text{et donc } P_{a,b}(X) = a^n P_{0,1}(\frac{X-b}{a})
 \end{aligned}$$

$$\bullet P_{a,b}(X) = 0 \Leftrightarrow P_{0,1}(\frac{X-b}{a}) = 0 \Leftrightarrow \frac{X-b}{a} = -1 \text{ ou } \frac{X-b}{a} = (n-1) \Leftrightarrow X = b-a \text{ ou } X = b + (n-1)a$$

On en déduit :

Les valeurs propres de $M(a, b)$ sont $b-a$ d'ordre de multiplicité $n-1$ et $b + (n-1)a$ qui est valeur propre simple.

Q22) • $Q_{a,b}(M(a, b))$

$$\begin{aligned}
 &= (M(a, b) - (b-a)I_n)(M(a, b) - (b + (n-1)a)I_n) \\
 &= \begin{pmatrix} a & \dots & a \\ \vdots & & \vdots \\ a & \dots & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(n-1)a & a & \dots & a \\ a & -(n-1)a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \dots & a & -(n-1)a \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Tout les termes de cette matrice sont les mêmes et valent : $-(n-1)a^2 + \sum_{i=2}^n a^2 = 0$

On a donc $Q(M(a, b)) = 0$ et $Q_{a,b}$ est un polynôme annulateur de $M(a, b)$.

• $b - a = b + (n - 1)a \Leftrightarrow na = 0 \Leftrightarrow a = 0$ On distingue donc deux cas :

Cas 1 : si $a \neq 0$, $Q_{a,b}$ est scindé simple sur $\mathbb{C}$ et est un polynôme annulateur de $M(a, b)$, on en déduit d'après le cours que $M_{a,b}$ est diagonalisable.

Cas 2 : si $a = 0$ alors $M(a, b) = bI_n$ est diagonale, donc $M(a, b)$ est diagonalisable.

Bilan : dans tous les cas $M(a, b)$ est diagonalisable.

Q23) • $a \neq 0$ donc $Q_{a,b}$ est scindé simple.

Par théorème sur la division euclidienne, on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \exists (c_k, d_k) \in \mathbb{C}^2, \exists Q \in \mathbb{C}[X], X^k = Q(X)Q_{a,b}(X) + c_k + d_k X$$

On évalue cette dernière relation aux valeurs qui annulent $Q_{a,b}$, on a alors :

$$\begin{cases} (b - a)^k = 0 + c_k + (b - a)d_k \\ (b + (n - 1)a)^k = 0 + c_k + (b + (n - 1)a)d_k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_k = \frac{(b + (n - 1)a)(b - a)^k - (b - a)(b + (n - 1)a)^k}{na} \\ d_k = \frac{(b + (n - 1)a)^k - (b - a)^k}{na} \end{cases}$$

Le reste de la division euclidienne de X^k par $Q_{a,b}$ est donc $\frac{((b + (n - 1)a)(b - a)^k - (b - a)(b + (n - 1)a)^k) + X((b + (n - 1)a)^k - (b - a)^k)}{na}$

• En utilisant $X^k = Q(X)Q_{a,b}(X) + c_k + d_k X$ pour $M_{a,b}$ on obtient, puisque $Q_{a,b}(M(a, b)) = 0$:

$$\forall k \in \mathbb{N}, M(a, b)^k = \frac{((b + (n - 1)a)(b - a)^k - (b - a)(b + (n - 1)a)^k)I_n + ((b + (n - 1)a)^k - (b - a)^k)M(a, b)}{na}$$

Q24) Si $|b - a| < 1$ et $|b + (n - 1)a| < 1$, alors par comparaison exponentielle puissance $c_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$ et $d_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$

et donc $\lim_{k \rightarrow +\infty} M(a, b)^k = O_n$ (matrice nulle de $M_n(\mathbb{C})$)

Q25) D'après la première colonne de $A = T$, on a $u(e_1) = \lambda_1 e_1$, puis par récurrence : $u^k(e_1) = \lambda_1^k e_1$, en passant à la norme : $\|u^k(e_1)\| = |\lambda_1|^k \|e_1\| \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$ puisque $|\lambda_k| < 1$

On en déduit : $\lim_{k \rightarrow +\infty} u(e_1) = 0$

Q26) • En "lisant" la $(i+1)$ ième colonne de T on a : $\exists x \in Vect((e_k)_{j \in \llbracket 1; i \rrbracket})$ tel que : $u(e_{i+1}) = \lambda_{i+1} e_{i+1} + x$

• Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ que $u^k(e_{i+1}) = \lambda_{i+1}^k e_{i+1} + \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x)$

Initialisation :

Si $k = 1$ on veut montrer : $u(e_{i+1}) = \lambda_{i+1} e_{i+1} + x$ ce qui est bien le cas par construction.

Hérédité :

On suppose que : $u^k(e_{i+1}) = \lambda_{i+1}^k e_{i+1} + \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x)$

On compose par u . Alors, par linéarité :

$$u^{k+1}(e_{i+1}) = \lambda_{i+1}^k u(e_{i+1}) + \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^{m+1}(x)$$

On utilise le résultat au rang 1 :

$$u^{k+1}(e_{i+1}) = \lambda_{i+1}^k (\lambda_{i+1} e_{i+1} + x) + \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-(m+1)} u^{m+1}(x)$$

Changement d'indice $M = m + 1$ dans la somme :

$$u^{k+1}(e_{i+1}) = \lambda_{i+1}^{k+1} e_{i+1} + \lambda_{i+1}^k x + \sum_{M=1}^{k+1-1} \lambda_{i+1}^{k-M} u^M(x)$$

On retrouve le terme pour $M = 0$ et on a : $u^{k+1}(e_{i+1}) = \lambda_{i+1}^{k+1} e_{i+1} + \sum_{M=0}^{k+1-1} \lambda_{i+1}^{k+1-M-1} u^M(x)$

et on a le résultat au rang $k + 1$

Conclusion : on a montrer par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}^* , u^k(e_{i+1}) = \lambda_{i+1}^k e_{i+1} + \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x)$

Q27) • Comme $x \in Vect((e_k)_{k \in \llbracket 1; i \rrbracket})$ on peut écrire $x = \sum_{j=1}^i x_j e_j$

Donc par linéarité : $u^k(x) = \sum_{j=1}^i x_j u^k(e_j)$, mais comme chaque $u^k(e_j)$ tend vers 0 (hypothèse) et que la somme est finie alors $\lim_{k \rightarrow +\infty} u^k(x) = 0$ et donc $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|u^k(x)\| = 0$

Soit $\varepsilon > 0$.

$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|u^k(x)\| = 0 \Rightarrow \exists K \in \mathbb{N} , [\forall m \in \mathbb{N} , m \geq K \Rightarrow \|u^m(x)\| \leq \varepsilon]$

Pour $k > K$, par inégalités triangulaires :

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) \right\| &\leq \left\| \sum_{m=0}^K \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) \right\| + \left\| \sum_{m=K+1}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) \right\| \\ \Rightarrow \left\| \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) \right\| &\leq |\lambda_{i+1}|^k \sum_{m=0}^K |\lambda_{i+1}|^{-m-1} \|u^m(x)\| + \sum_{m=K+1}^{k-1} |\lambda_{i+1}|^{k-m-1} \|u^m(x)\| \\ \Rightarrow \left\| \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) \right\| &\leq |\lambda_{i+1}|^k \sum_{m=0}^K |\lambda_{i+1}|^{-m-1} \|u^m(x)\| + \sum_{m=K+1}^{k-1} |\lambda_{i+1}|^{k-m-1} \varepsilon \text{ car } \|u^m(x)\| \leq \varepsilon \end{aligned}$$

Mais $\sum_{m=K+1}^{k-1} |\lambda_{i+1}|^{k-m-1} = \frac{1-|\lambda_{i+1}|^k}{1-|\lambda_{i+1}|}$ (somme des termes d'une suite géométrique de raison différente de 1 puisque

$|\lambda_{i+1}| < 1$), donc : $\left| \sum_{m=K+1}^{k-1} |\lambda_{i+1}|^{k-m-1} \right| \leq \frac{1-|\lambda_{i+1}|^k}{1-|\lambda_{i+1}|} \leq \frac{2}{1-|\lambda_{i+1}|}$ puisque $|\lambda_{i+1}| \leq 1$

Comme $\sum_{m=0}^K |\lambda_{i+1}|^{-m-1} \|u^m(x)\|$ ne dépend pas de k et que $|\lambda_{i+1}| < 1$ alors

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} |\lambda_{i+1}|^k \sum_{m=0}^K |\lambda_{i+1}|^{-m-1} \|u^m(x)\| = 0$$

donc $\exists K' > K$ tel que : $\forall k \in \mathbb{N} , k \geq K' \Rightarrow |\lambda_{i+1}|^k \sum_{m=0}^K |\lambda_{i+1}|^{-m-1} \|u^m(x)\| \leq \varepsilon$

Au bilan, on a : $\forall \varepsilon > 0 , \exists K' \in \mathbb{N} , k \geq K' \Rightarrow \left\| \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) \right\| \leq (1 + \frac{2}{1-|\lambda_{i+1}|}) \varepsilon$

A l'aide de la définition avec les quantificateurs on a donc : $\lim_{k \rightarrow +\infty} \left\| \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) \right\| = 0$

• Par inégalité triangulaire on a : $\|u^k(e_{i+1})\| \leq |\lambda_{i+1}|^k \|e_{i+1}\| + \left\| \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) \right\|$

Comme $|\lambda_{i+1}| < 1$ alors $\lim_{k \rightarrow +\infty} |\lambda_{i+1}|^k \|e_{i+1}\| = 0$ et avec le résultat ci-dessus et par comparaison :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|u^k(e_{i+1})\| = 0 \text{ et on en déduit que : } \lim_{k \rightarrow +\infty} u^k(e_{i+1}) = 0$$

Q28) Avec Q25) et Q26) on a montrer par itérations que : $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket , \lim_{k \rightarrow +\infty} u^k(e_i) = 0$

Comme $(e_1, \dots, e_n)$ est une base on écrit pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, donc, par linéarité $u^k(x) = \sum_{i=1}^n x_i u^k(e_i)$ et donc $u^k(x) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$

Comme T^k est la matrice de u^k relativement à cette base, on a donc : $\lim_{k \rightarrow +\infty} T^k = 0$

Q29) Si A n'est pas triangulaire, on utilise que $A \in M_n(\mathbb{C})$ et que donc A est trigonalisable.

Il existe donc $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et T du type déjà étudié (même valeurs propres que A) telles que : $A = PTP^{-1}$

On a $A^k = PT^k P^{-1}$ et $\lim_{k \rightarrow +\infty} T^k = 0$. Donc par continuité du produit on a : $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = 0$

Q30) M est triangulaire inférieure et ses termes diagonaux vérifient :

$$|a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{i,j}| \geq 0 \text{ et donc } |a_{i,i}| \neq 0 \text{ et donc } a_{i,i} \neq 0$$

On a donc $\det(M) = \prod_{i=1}^n a_{i,i} \neq 0$ et donc $\boxed{M \text{ est inversible.}}$

$$\text{Q31) } AX = Y$$

$$\Rightarrow (M - F)X = Y$$

$$\Rightarrow M^{-1}(M - F)X = M^{-1}Y$$

$$\Rightarrow X - M^{-1}FX = M^{-1}Y$$

$$\Rightarrow X - BX = M^{-1}Y$$

$$\Rightarrow X = BX + M^{-1}Y$$

$$\text{On a bien : } \boxed{X = BX + M^{-1}Y}$$

$$\text{Q32) } \bullet B = M^{-1}F \Rightarrow BV = M^{-1}FV \Rightarrow \lambda V = M^{-1}FV \Rightarrow \lambda MV = FV$$

$$\text{On a bien : } \boxed{FV = \lambda MV}$$

$$\bullet \text{ On remarque que : } A = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ a_{i,j} & & & \ddots \\ & & & & a_{n,n} \end{pmatrix}}_M - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & & & -a_{i,j} \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \ddots \\ & & & & 0 \end{pmatrix}}_F$$

Si on regarde la i ième coordonnée des vecteurs de la relation $FV = \lambda MV$ alors :

$$- \sum_{j=i+1}^n a_{i,j}v_j = \lambda \sum_{j=1}^i a_{i,j}v_j$$

$$\Rightarrow - \sum_{j=i+1}^n a_{i,j}v_j = \lambda \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}v_j + \lambda a_{i,i}v_i$$

$$\text{et donc } \boxed{\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \lambda a_{i,i}v_i = - \left(\sum_{j=i+1}^n a_{i,j}v_j + \lambda \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}v_j \right)}$$

Q33) $\bullet \max_{j \in \llbracket 1; n \rrbracket} |v_i|$ est un max sur un nombre finie de valeur, donc il est atteint et donc $\exists i_0 \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que :

$$\max_{j \in \llbracket 1; n \rrbracket} |v_i| = |v_{i_0}|$$

De plus $|v_{i_0}| = 0 \Rightarrow V = 0$ ce qui est impossible puisque V est un vecteur propre, donc $|v_{i_0}| \neq 0$

$$\text{On a donc : } \boxed{\exists i_0 \in \llbracket 1; n \rrbracket, |v_{i_0}| \neq 0 \text{ et } |v_{i_0}| = \max_{j \in \llbracket 1; n \rrbracket} |v_j|}$$

$$\bullet \text{ On écrit la relation de Q32) pour } i = i_0 : \lambda a_{i_0,i_0}v_{i_0} = - \left(\sum_{j=i_0+1}^n a_{i_0,j}v_j + \lambda \sum_{j=1}^{i_0-1} a_{i_0,j}v_j \right)$$

En prenant la valeur absolue et par inégalité triangulaire :

$$|\lambda a_{i_0,i_0}| |v_{i_0}| \leq \sum_{j=i_0+1}^n |a_{i_0,j}| |v_j| + |\lambda| \sum_{j=1}^{i_0-1} |a_{i_0,j}| |v_j|$$

Mais comme $|v_j| \leq |v_{i_0}|$:

$$|\lambda a_{i_0,i_0}| |v_{i_0}| \leq \sum_{j=i_0+1}^n |a_{i_0,j}| |v_{i_0}| + |\lambda| \sum_{j=1}^{i_0-1} |a_{i_0,j}| |v_{i_0}|$$

$$\text{On peut simplifier par } |v_{i_0}| \text{ qui est non nul et on a donc } \boxed{|\lambda a_{i_0,i_0}| \leq \sum_{j=i_0+1}^n |a_{i_0,j}| + |\lambda| \sum_{j=1}^{i_0-1} |a_{i_0,j}|}$$

Q34) • Comme A est à diagonale dominante alors : $|a_{i_0, i_0}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^n |a_{i_0, j}|$ et donc :

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^n |\lambda a_{i_0, j}| < |\lambda a_{i_0, i_0}| \leq \sum_{j=i_0+1}^n |a_{i_0, j}| + |\lambda| \sum_{j=1}^{i_0-1} |a_{i_0, j}| \\
\Rightarrow & |\lambda| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^n |a_{i_0, j}| < \sum_{j=i_0+1}^n |a_{i_0, j}| + |\lambda| \sum_{j=1}^{i_0-1} |a_{i_0, j}| \\
\Rightarrow & |\lambda| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^n |a_{i_0, j}| - |\lambda| \sum_{j=1}^{i_0-1} |a_{i_0, j}| < \sum_{j=i_0+1}^n |a_{i_0, j}| \\
\Rightarrow & |\lambda| \sum_{j=i_0+1}^n |a_{i_0, j}| < \sum_{j=i_0+1}^n |a_{i_0, j}| \\
\Rightarrow & 0 < (1 - |\lambda|) \sum_{j=i_0+1}^n |a_{i_0, j}| \text{ (les deux termes sont non nuls et de même signe)} \\
\Rightarrow & 0 < 1 - |\lambda| \\
\Rightarrow & |\lambda| < 1
\end{aligned}$$

• On vient de démontrer que toutes les valeurs propres de B sont de module strictement plus petit que 1, on en déduit avec la question Q29) que : $\lim_{k \rightarrow +\infty} B^k = 0$

Q35) Par définition et par Q31) : $\begin{cases} X_{k+1} = BX_k + M^{-1}Y \\ X = BX + M^{-1}Y \end{cases} \Rightarrow X_{k+1} - X = B(X_k - X)$

Par analogie avec les suites géométriques $(X_k - X)$ serait une suite de raison B , on a donc :

$$\forall k \in \mathbb{N}, X_k - X = B^k(X_0 - X)$$

Comme, par Q34) , $\lim_{k \rightarrow +\infty} B^k = 0$ on en déduit alors : $\forall k \in \mathbb{N}, X_k = X$

X-ENS, PC 2025

1.) Si on note $v^T = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n)$ et C_k la k-ième colonne de M , alors : $C_k = v_k u$
 Comme u et v sont non nuls alors il existe au moins une colonne de M non nulle et on a alors :
 $Vect(C_1, \dots, C_n) = Vect(u)$ qui est de dimension 1 et donc : $\boxed{M \text{ est de rang } 1}$

2.) Si on pose $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ alors $J = uu^T$ avec $u \neq 0$ et donc avec le 1.) on a : $\boxed{rg(J) = 1}$

3.) Si on note C_k la k-ième colonne de K .
 Alors comme K est de rang 1 on a : $Im(K) = Vect(u)$ avec $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
 De plus, comme $Vect(K) = Vect(C_1, \dots, C_n) = Vect(u)$ alors : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\exists v_k \in \mathbb{R}$, $C_k = v_k u$

En posant $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ on remarque alors que : $K = uv^T$

v est non nul car sinon $K = 0$ et K n'est plus de rang 1.

Bilan : $\boxed{K \in M_n(\mathbb{R}) \text{ de rang } 1 \Rightarrow \exists u, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, K = uv^T}$

4.) Soit $(u, v, x, y) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

• Première implication :

On suppose que : $uv^T = xy^T$

Multiplions à gauche par u^T alors : $u^T uv^T = u^T xy^T \Leftrightarrow \underbrace{u^T u}_{\in \mathbb{R}^*} v^T - \underbrace{u^T x}_{\in \mathbb{R}} y^T = 0$

On a $u^T u \neq 0$ car $u \neq 0$ et donc la famille (v^T, y^T) est liée.

Comme les vecteurs sont non nuls : $\exists \mu \in \mathbb{R}^*$, $v^T = \mu y^T \Leftrightarrow v = \mu y$

De même en multipliant à droite par v la relation $uv^T = xy^T$ on obtient : $\exists \lambda \in \mathbb{R}^*$, $u = \lambda x$

En reportant $u = \lambda x$ et $v = \mu y$ dans la relation de départ on a : $\lambda \mu xy^T = xy^T$

Comme $xy^T \neq 0$ puisque c'est une matrice de rang 1 d'après la question 1. alors $\lambda \mu = 1$ et donc $\mu = \frac{1}{\lambda}$

Bilan : $\exists \lambda \in \mathbb{R}^*$, $u = \lambda x$ et $v = \frac{1}{\lambda} y$

• Réciproque :

On suppose : $\exists \lambda \in \mathbb{R}^*$, $u = \lambda x$ et $v = \frac{1}{\lambda} y$

Alors $uv^T = (\lambda x)(\frac{1}{\lambda} y) = xy^T$

• Bilan : $\boxed{\text{Pour } (u, v, x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \text{ on a : } uv^T = xy^T \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^*, u = \lambda x \text{ et } v = \frac{1}{\lambda} y}$

5.a) Si on note $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ et $K = uv^T = (k_{i,j})$ alors : $k_{i,j} = u_i v_j$

Donc $Tr(K) = \sum_{i=1}^n k_{i,i} = \sum_{i=1}^n u_i v_i = \langle v, u \rangle$ et a bien que : $\boxed{Tr(K) = \langle v, u \rangle}$

5.b) $K^2 = (uv^T)(uv^T)$, puis, par associativité : $K^2 = u \underbrace{(v^T u)}_{\langle v, u \rangle = Tr(K) \in \mathbb{R}} v^T = Tr(K) uv^T = Tr(K) K$

On a donc : $\boxed{K^2 = Tr(K) K}$

5.c) Distinguons deux cas.

Cas 1 : Si $Tr(K) \neq 0$

alors $X^2 - Tr(K)X = X(X - Tr(K))$ est un polynôme annulateur de K scindé simple donc K est diagonalisable.

Cas 2 : Si $Tr(K) = 0$

alors X^2 est un polynôme annulateur de K .

Comme $sp(K) \subset Rac(X^2) = \{0\}$ (avec $Rac(X^2)$ l'ensemble des racines de X^2)

Alors la seule valeur propre possible de K est 0.

Donc si K est diagonalisable alors K est semblable à $0I_n = 0$ donc K est nulle, ce qui n'est pas le cas puisque $rang(K) = 1$.

Donc K n'est pas diagonalisable.

• Par réunion des deux cas précédents : $\boxed{K \text{ diagonalisable si et seulement si } Tr(K) \neq 0}$

6.) Procédons par double implication.

• Si $P = yy^T$ avec $\|y\| = 1$ alors : P est de rang 1 par la question 1.

D'autre part : $P^2 = Tr(P)P = \langle y, y \rangle P = P$ par 5. et puisque $\langle y, y \rangle = \|y\|^2 = 1^2 = 1$.

Donc $P^2 = P$ et donc P est un projecteur.

De plus $P^T = (yy^T)^T = (y^T)^T y^T = yy^T = P$ donc $P = P^T$.

Comme on est dans la base canonique, alors P est autoadjoint.

P est la projection sur $A = \ker(P)$, parallèlement à $B = \ker(P - I_n)$

Soit $a \in A$ et $b \in B$. Alors $b \in B \Rightarrow PB = B$

Donc $\langle a, b \rangle = \langle a, Pb \rangle = \langle Pa, b \rangle = \langle 0, b \rangle = 0$ car P autoadjoint et que $Pa = 0$

On en déduit $A \perp B$ et donc P est une projection orthogonale.

Finalement P est bien un projecteur orthogonal de rang 1.

• Réciproquement :

Si P est un projecteur orthogonal de rang 1. On note (y) une base orthonormée de $Im(P)$, donc $y \in \mathbb{R}^n$ avec $\|y\| = 1$

Par le théorème de projection orthogonal : $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $Px = \langle x, y \rangle y = y \langle x, y \rangle = yy^T x$

Par identification : $P = yy^T$

• Bilan : $\boxed{P \text{ est un projecteur orthogonal de rang 1 si et seulement si } \exists y \in \mathbb{R}^n, \|y\| = 1 \text{ et } P = yy^T}$

7.) $\begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ v^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_n + uv^T & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ -v^T & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ v^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_n & u \\ -v^T & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 1 + v^T u \end{pmatrix}$

On a donc : $\boxed{\begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ v^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_n + uv^T & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ -v^T & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 1 + v^T u \end{pmatrix}}$

8.) En effectuant des déterminants par blocs dans les matrices triangulaires par blocs de la relation du 7. On obtient : $1 \times \det(1_n + uv^t) \times 1 = 1 \times (1 + v^T u) = 1 + \langle v, u \rangle$

$$\text{On a donc : } \boxed{\det(1_n + uv^t) = 1 + \langle v, u \rangle}$$

9.) Comme A est inversible : $A + uv^T = A(1_n + A^{-1}uv^T)$

On a, en utilisant le 8. que : $\det(1_n + A^{-1}uv^T) = \det(1_n + (A^{-1}u)v^T) = 1 + \langle v, A^{-1}u \rangle$

Comme le déterminant du produit de deux matrices est égal au produit des déterminants alors:

$$\boxed{\det(A + uv^T) = \det(A)(1 + \langle v, A^{-1}u \rangle)}$$

10.) On raisonne par équivalences :

$A + uv^T$ inversible

$\Leftrightarrow \det(A + uv^T) \neq 0$ on utilise la question 9.

$\Leftrightarrow \det(A)(1 + \langle v, A^{-1}u \rangle) \neq 0$

$\Leftrightarrow (1 + \langle v, A^{-1}u \rangle) \neq 0$ car $\det(A) \neq 0$ puisque $A \in GL_n(\mathbb{R})$

$\Leftrightarrow \langle v, A^{-1}u \rangle \neq -1$

$$\text{On a bien : } \boxed{A + uv^T \text{ inversible si et seulement si } \langle v, A^{-1}u \rangle \neq -1}$$

11.) Puisque d'après la question 10. on a : $\langle v, A^{-1}u \rangle \neq -1$, on peut poser : $B = A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^T A^{-1}}{1 + \langle v, A^{-1}u \rangle}$

On a alors : $B = \left(1 - \frac{A^{-1}uv^T}{1 + \langle v, A^{-1}u \rangle}\right)A^{-1}$

Comme à la 9. : $A + uv^T = (1 + A^{-1}uv^T)A$

En posant $w = A^{-1}u$ on a : $B = \left(1 - \frac{wv^T}{1 + \langle v, w \rangle}\right)A^{-1}$ et $A + uv^T = (1 + wv^T)A$

En posant $\alpha = wv^T = \langle w, v \rangle$ on a : $B = \left(1 - \frac{\alpha}{1 + \alpha}\right)A^{-1} = \frac{1}{1 + \alpha}A^{-1}$ et $A + uv^T = (1 + \alpha)A$

$$\text{Alors : } (A + uv^T)B = \left(\frac{1}{1 + \alpha}A^{-1}\right)\left((1 + \alpha)A\right) = 1_n$$

$$\text{Donc } (A + uv^T)B = 1_n \text{ et donc } (A + uv^T)^{-1} = B$$

$$\text{En revenant à l'écriture de } B : \boxed{(A + uv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^T A^{-1}}{1 + \langle v, A^{-1}u \rangle}}$$

12.) Si on pose $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ alors $uv^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Si on pose $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ alors $\det(C) = 0$

De plus $C + uv^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\det(C + uv^T) = -1 \neq 0$

$$\boxed{\text{Si } C \in M_n(\mathbb{R}) \text{ telle que } \det(C) = 0 \text{ alors on a pas toujours } \det(C + uv^T) = 0}$$

13.) $B^T = (A + uu^T)^T = A^T + (uu^T)^T = A^T + (u^T)^T u^T = A + uu^T = B$ car $A = A^T$ puisque $A \in S_n(\mathbb{R})$ et donc $B \in S_n(\mathbb{R})$

14.) Posons : $C = 1_n - \sum_{k=1}^n v_k v_k^T$

Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on a :

$$Cv_i = v_i - \sum_{k=1}^n v_k v_k^T v_i = v_i - \sum_{k=1}^n v_k \langle v_k, v_i \rangle$$

Mais $\langle v_k, v_i \rangle = 0$ si $k \neq i$ et $\langle v_k, v_i \rangle = 1$ si $k = i$ puisque $(v_1, \dots, v_n)$ est orthonormale.

Donc $Cv_i = v_i - v_i = 0$, ceci sur tout les vecteurs d'une base donc $C = 0$

Donc : $1_n = \sum_{k=1}^n v_k v_k^T$

15.a) Comme en 14.) : $Aw_i - \sum_{k=1}^n \lambda_k w_k w_k^T w_i = \lambda_i w_i - \lambda_i w_i = 0$ et donc : $A = \sum_{k=1}^n \lambda_k w_k w_k^T$

15.b) Avec la question 14. et comme $(w_1, \dots, w_k, \dots, w_n)$ est orthonormée, on écrit : $1_n = \sum_{k=1}^n w_k w_k^T$

Avec la question 15.a) : $A = \sum_{k=1}^n \lambda_k w_k w_k^T$

Par combinaison linéaire de ces deux égalités : $x1_n - A = \sum_{k=1}^n (x - \lambda_k) w_k w_k^T$

Comme on a $x - \lambda_k \neq 0$ on peut considérer $\sum_{k=1}^n \frac{1}{x - \lambda_k} w_k w_k^T$ et on a alors :

$$\begin{aligned} & (x1_n - A) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x - \lambda_k} w_k w_k^T \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{x}{x - \lambda_k} w_k w_k^T - \sum_{k=1}^n \frac{1}{x - \lambda_k} A w_k w_k^T \text{ on utilise } A w_k = \lambda_k w_k \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{x}{x - \lambda_k} w_k w_k^T - \sum_{k=1}^n \frac{1}{x - \lambda_k} \lambda_k w_k w_k^T \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{x - \lambda_k}{x - \lambda_k} w_k w_k^T \\ &= \sum_{k=1}^n w_k w_k^T \\ &= 1_n \text{ par 14.)} \end{aligned}$$

On en déduit : $(x1_n - A)^{-1} = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x - \lambda_k} w_k w_k^T \right)$

16.a) D'après la formule de Grasmann :

$$\begin{aligned} \dim(E \cup \{u\}^\perp) &= \dim(E) + \dim(\{u\}^\perp) - \dim(E \cap \{u\}^\perp) \\ \Rightarrow \dim(E \cap \{u\}^\perp) &= \dim(E) + \dim(\{u\}^\perp) - \dim(E \cup \{u\}^\perp) \end{aligned}$$

Mais $\dim(E) = m$ car A est **diagonalisable** et que λ est d'ordre m
De plus $\dim(\{u\}^\perp) = \dim(\mathbb{R}^n) - \dim(\text{Vect}(u)) = n - 1$ (c'est un hyperplan)
et $\dim(E \cup \{u\}^\perp) \leq n$ donc $-\dim(E \cup \{u\}^\perp) \geq -n$

On a donc : $\dim(E \cap \{u\}^\perp) \geq m + (n - 1) - n = m - 1$

Bilan : $\dim(E \cap \{u\}^\perp) \geq m - 1$

16.b) • Soit $x \in E \cap \{u\}^\perp$

Alors $x \in E$ donc $AX = \lambda x$ et $uu^T x = u < u, x > = 0$ car $< u, x > = 0$ puisque $x \in \{u\}^\perp$.

Donc $Bx = Ax + uu^T x = \lambda x + 0 = \lambda x$

Donc $(E \cap \{u\}^\perp) \subset \ker(B - \lambda 1_n)$ et donc λ est valeur propre de B d'ordre de multiplicité au moins $\dim(E \cap \{u\}^\perp)$

Avec le (a) on a : $\boxed{\lambda \text{ est valeur propre de } B \text{ d'ordre de multiplicité au moins } m - 1}$

17.) Comme x n'est pas valeur propre de A , alors $x1_n - A$ est inversible et on peut considérer : $(x1_n - A)^{-1}$. On peut alors effectuer le calcul suivant :

$$\begin{aligned} & \chi_B(x) \\ &= \det(x1_n - B) \\ &= \det(x1_n - A - uu^T) \text{ par définition de } B \\ &= \det\left((x1_n - A)(1_n - (x1_n - A)^{-1}uu^T)\right) \\ &= \det(x1_n - A)\det\left((1_n - (x1_n - A)^{-1}uu^T)\right) \\ &= \chi_A(x)\det\left((1_n - (x1_n - A)^{-1}uu^T)\right) \end{aligned}$$

On notera (1) cette dernière relation.

$$\begin{aligned} & \text{Alors : } (1_n - (x1_n - A)^{-1}uu^T) \\ &= 1_n - \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x - \lambda_k} w_k w_k^T\right) uu^T \text{ avec 15.b) } \\ &= 1_n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{x - \lambda_k} w_k \underbrace{w_k^T u}_{< w_k, u >} u^T \\ &= 1_n + UV^T \text{ avec } U = - \sum_{k=1}^n \frac{1}{x - \lambda_k} < w_k, u > w_k \text{ et } V = u \end{aligned}$$

Avec la question 8.) on en déduit :

$$\det\left(1_n - (x1_n - A)^{-1}uu^T\right) = 1 + < V, U > = 1 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{x - \lambda_k} < w_k, u > < w_k, u > = 1 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{x - \lambda_k} < w_k, u >^2$$

Reporté dans la relation (1) on a :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}, \chi_B(x) = \chi_A(x) \left(1 - \sum_{k=1}^n \frac{< w_k, u >^2}{x - \lambda_k}\right)}$$

18.a) Par l'absurde. Si $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $< u, w_k > = 0$ alors, comme $(w_1, \dots, w_n)$ est une base, par linéarité $u \in (\mathbb{R}^n)^\perp = \{0\}$ donc $u = 0$ ce qui est absurde puisque $\|u\| = 1$

Donc $\exists k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $< u, w_k > \neq 0$ et donc $\boxed{J \neq \emptyset}$

18.b) Si $\ell \notin J$ alors $< u, w_\ell > = 0$ donc

$$B\ell = Aw_\ell - uu^T w_\ell = \lambda_\ell w_\ell - \underbrace{u < w_\ell, u >}_{=0} = \lambda_\ell w_\ell$$

Comme $w_\ell \neq 0$ alors : $\boxed{\lambda_\ell \text{ est une valeur propre de } B}$

18.c) Dans cette question on suppose $J = \{j\}$.

Ecrivons u dans la base orthonormée $(w_1, w_2, \dots, w_n)$, alors, puisque $\langle u, w_k \rangle = 0$ pour $k \neq j$, on a :

$$u = \sum_{k=1}^n \langle u, w_k \rangle w_k = \langle u, w_j \rangle w_j$$

On fait le produit scalaire de cette égalité avec u et on a :

$$\langle u, u \rangle = \langle u, w_j \rangle \langle u, w_j \rangle \Rightarrow \langle u, u \rangle^2 = \langle u, w_j \rangle^2$$

Comme u est unitaire, on a alors $\langle u, w_j \rangle^2 = 1$ et donc $u = \epsilon w_j$ avec $\langle u, w_j \rangle = \epsilon \in \{-1, 1\}$

Alors on remplace u par $u = \epsilon w_j$ dans $Bw_j = Aw_j + uu^T w_j$

$$\text{Alors } Bw_j = \underbrace{Aw_j}_{\lambda_j w_j} + \underbrace{\epsilon^2}_{=1} w_j \underbrace{w_j^T w_j}_{=1} = (\lambda_j + 1)w_j$$

Avec 18.b) on a que $Bw_k = \lambda_k w_k$ pour $k \neq j$

On en déduit que $(w_1, \dots, w_n)$ est une matrice de vecteurs propres de B associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_j + 1, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_n$

Donc : Les valeurs propres de B sont $(\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_j + 1, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_n)$

19.a) • f est une fraction rationnelle, donc f est C^∞ en dehors de ses pôles, donc ici ;

f est C^∞ sur $D = \mathbb{R} \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$

• On a alors : $\forall x \in D, f'(x) = \sum_{k=1}^n \frac{-\langle w_k, u \rangle^2}{(x - \lambda_k)^2}$

19.b) • Pour $\ell \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ la restriction de f à $] \lambda_\ell, \lambda_{\ell+1} [$ est une application continue, strictement décroissante (car $f'(x) < 0$ d'après le (a)) et à valeurs dans $\mathbb{R}$ puisque $\lim_{x \rightarrow \lambda_\ell^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \lambda_{\ell+1}^-} f(x) = -\infty$; c'est donc une bijection de $] \lambda_\ell, \lambda_{\ell+1} [$ dans $\mathbb{R}$ et donc $f(x) = 1$ admet une unique solution sur $] \lambda_\ell, \lambda_{\ell+1} [$

• De même, la restriction de f à $] \lambda_n, +\infty [$ est une bijection à valeurs dans $] 0, +\infty [$ puisque :

$$\lim_{x \rightarrow \lambda_n^+} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

Comme $1 \in] 0, +\infty [$, f admet une unique solution sur $] \lambda_n, +\infty [$

Bilan : $f(x) = 1$ admet une unique solution dans chaque intervalle $] \lambda_\ell, \lambda_{\ell+1} [$ pour $\ell \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$

et dans $] \lambda_n, +\infty [$

19.c) D'après c) , les solutions de $f(x) = 1$ sont valeurs propres de B .

Avec le 19)b) , on en trouve ainsi n , dans chacun des intervalles voulu et que l'on nommera μ_n avec le a), comme B admet au plus n valeurs propres on a donc trouver toutes les valeurs propres et le b) permet de conclure que : $\lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \mu_2 < \dots < \lambda_n < \mu_n$

Bilan : Les n valeurs propres de B vérifient: $\lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \mu_2 < \dots < \lambda_n < \mu_n$

20.) Comme U prend un nombre fini de valeurs $\{u_1, \dots, u_n\}$, alors $\langle U, w \rangle^2$ prend un nombre fini de valeurs $\{\langle u_1, w \rangle^2, \dots, \langle u_n, w \rangle^2\}$

Donc, par définition de l'espérance, quand il y a un nombre fini de valeurs :

$$\mathcal{E}(|\langle U, w \rangle|^2) = \sum_{k=1}^n |\langle u_k, w \rangle|^2 \mathbb{P}(U = u_k)$$

Mais, comme U suit une loi uniforme sur n valeurs, alors : $\mathbb{P}(U = u_k) = \frac{1}{n}$

$$\text{Donc } \mathcal{E}(|\langle U, w \rangle|^2) = \sum_{k=1}^n |\langle u_k, w \rangle|^2 \frac{1}{n}$$

$$\text{Donc } \mathcal{E}(|\langle U, w \rangle|^2) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\langle u_k, w \rangle|^2$$

Comme les $\langle u, w_k \rangle$ sont les coordonnées de u dans la base $(w_1, \dots, w_n)$ qui est orthonormée alors $\sum_{k=1}^n |\langle u_k, w \rangle|^2 = \|w\|^2$

$$\text{Finalement on a : } \boxed{\mathcal{E}(|\langle U, w \rangle|^2) = \frac{1}{n} \|w\|^2}$$

21.) Avec la formule de 17.) et par formule de transfert :

$$\mathcal{E}(\chi_B(x)) = \chi_A(x) \left(1 - \sum_{k=1}^n \frac{\mathcal{E}(\langle w_k, U \rangle^2)}{x - \lambda_k}\right)$$

$$\text{En utilisant le 20.) : } \mathcal{E}(\chi_B(x)) = \chi_A(x) \left(1 - \sum_{k=1}^n \frac{\frac{1}{n} \|w_k\|^2}{x - \lambda_k}\right)$$

$$\text{On utilise que } \|w_k\| = 1 \text{ donc : } \mathcal{E}(\chi_B(x)) = \chi_A(x) \left(1 - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{x - \lambda_k}\right)$$

$$\text{Ou encore : } \mathcal{E}(\chi_B(x)) = \chi_A(x) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\chi_A(x)}{x - \lambda_k}$$

Mais χ_A est de degré n , unitaire et on connaît ses racines. On écrit donc : $\chi_A(x) = \prod_{k=1}^n (x - \lambda_k)$

$$\text{Donc } \chi'_A(x) = \sum_{k=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n (x - \lambda_j) = \sum_{k=1}^n \frac{\chi_A(x)}{x - \lambda_k}$$

$$\text{On a donc, en reportant ci-dessus : } \boxed{\mathcal{E}(\chi_B(x)) = \chi_A(x) - \frac{1}{n} \chi'_A(x)}$$

22.) Comme λ_k est valeur propre de A alors $\chi_A(\lambda_k) = 0$ et donc avec 21. On a :

$$\boxed{\mathcal{E}(\chi_B(\lambda_k)) = -\frac{1}{n} \chi'_A(\lambda_k)}$$

23.) Raisonnons par l'absurde et supposons que : $\forall x \in \mathbb{R}, \mathcal{E}(\chi_B(x)) = 0$

Alors, avec la question 21.) : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ on a : $\chi_A(x) = \frac{1}{n} \chi'_A(x)$

Comme c'est une relation polynomiale valable sur une infinité de valeurs, alors, elle est valable pour tout $x \in \mathbb{R}$ et on a alors : $\chi_A = \frac{1}{n} \chi'_A$

Mais χ_A est de degré n et χ'_A de degré $n - 1$ donc $n = n - 1$!!! Absurde

$$\text{On a donc démontrer par l'absurde que : } \boxed{\exists x \in \mathbb{R}, \mathcal{E}(\chi_B(x)) \neq 0}$$

24.) Comme $\epsilon \in]0, \lambda_{m+1}[$ alors ϵ n'est pas valeur propre de A
donc $\chi_A(\epsilon) \neq 0$ et donc : $\det(A - \epsilon 1_n) \neq 0$ et donc : $\boxed{A - \epsilon 1_n \text{ est inversible.}}$

$$25.) B - \epsilon 1_n = A + uu^T - \epsilon 1_n = (A - \epsilon 1_n) + uu^T = (A - \epsilon 1_n)(1_n + (A - \epsilon 1_n)uu^T)$$

$$\text{Alors : } \det(B - \epsilon 1_n) = \det(A - \epsilon 1_n) \det(1_n + (A - \epsilon 1_n)uu^T)$$

Comme $A - \epsilon 1_n$ est inversible on peut utiliser la question 9. et on obtient :

$$\det(B - \epsilon 1_n) = \det(A - \epsilon 1_n)(1 + \langle (A - \epsilon 1_n)u, u \rangle)$$

D'après 24. on a $\det(A - \epsilon 1_n) \neq 0$
et d'après l'énoncé : $\langle (A - \epsilon 1_n)u, u \rangle < -1 \Rightarrow 1 + \langle (A - \epsilon 1_n)u, u \rangle \neq 0$

On a donc $\det(B - \epsilon 1_n) \neq 0$ et donc $\boxed{B - \epsilon 1_n \text{ est inversible.}}$

26.) Comme en début de Q25) : $B - \epsilon 1_n = (A - \epsilon 1_n) + uu^T$
Comme $A - \epsilon 1_n$ est inversible on peut utiliser la question 11., en remplaçant A par $A - \epsilon 1_n$ et v par u , et on a :
 $(B - \epsilon 1_n)^{-1} = (A - \epsilon 1_n)^{-1} - \frac{(A - \epsilon 1_n)^{-1}uu^T(A - \epsilon 1_n)^{-1}}{1 + \langle u, (A - \epsilon 1_n)^{-1}u \rangle}$

$$\text{Posons } v = (A - \epsilon 1_n)^{-1}u \text{ alors : } (B - \epsilon 1_n)^{-1} = (A - \epsilon 1_n)^{-1} - \frac{vu^T(A - \epsilon 1_n)^{-1}}{1 + \langle u, v \rangle}$$

Mais A est symétrique donc $A - \epsilon 1_n$ aussi et donc $(A - \epsilon 1_n)^{-1}$ aussi et
 $u^T(A - \epsilon 1_n)^{-1} = u^T((A - \epsilon 1_n)^{-1})^T = ((A - \epsilon 1_n)^{-1}u)^T = v^T$

$$\text{Donc } (B - \epsilon 1_n)^{-1} = (A - \epsilon 1_n)^{-1} - \frac{vv^T}{1 + \langle u, v \rangle}$$

On utilise maintenant la question 5.a) et on a :
 $Tr((B - \epsilon 1_n)^{-1}) = Tr((A - \epsilon 1_n)^{-1}) - \frac{Tr(vv^T)}{1 + \langle u, v \rangle} = Tr((A - \epsilon 1_n)^{-1}) - \frac{\langle v, v \rangle}{1 + \langle u, v \rangle}$

Mais, par hypothèse $1 + \langle u, v \rangle < 0$, de plus $\langle v, v \rangle = \|v\|^2 > 0$ (car $v \neq 0$ puisque $A - \epsilon 1_n$ inversible et $u \neq 0$)
donc $-\frac{\langle v, v \rangle}{1 + \langle u, v \rangle} > 0$

$$\text{On a alors : } Tr((B - \epsilon 1_n)^{-1}) = Tr((A - \epsilon 1_n)^{-1}) - \underbrace{\frac{\langle v, v \rangle}{1 + \langle u, v \rangle}}_{>0}$$

et on en déduit : $\boxed{Tr((B - \epsilon 1_n)^{-1}) > Tr((A - \epsilon 1_n)^{-1})}$

27.) • Les valeurs propre de A sont : $0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m < \lambda_{m+1} \leq \dots \leq \lambda_n$
donc les valeurs propre de $A - \epsilon 1_n$ sont : $\underbrace{-\epsilon}_{m \text{ fois}} < -\epsilon + \lambda_{m+1} \leq \dots \leq -\epsilon + \lambda_n$

Puisque $A - \epsilon 1_n$ est inversible :

$$\text{les valeurs propre de } (A - \epsilon 1_n)^{-1} \text{ sont : } \underbrace{\frac{-1}{\epsilon}}_{m \text{ fois}} > \frac{1}{\lambda_{m+1} - \epsilon} \geq \dots \geq \frac{1}{\lambda_n - \epsilon}$$

$$\text{On en déduit : } Tr((A - \epsilon 1_n)^{-1}) = \frac{-m}{\epsilon} + \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{\lambda_k - \epsilon}$$

- Comme $\lambda_1 \leq \mu_1 \leq \lambda_2 \leq \mu_2 \leq \mu_{m-1} \leq \lambda_m = 0 \leq \mu_m \leq \dots \leq \lambda_n$

On en déduit comme ci-dessus que : $Tr((B - \epsilon 1_n)^{-1}) = \frac{-(m-1)}{\epsilon} + \sum_{k=m}^n \frac{1}{\mu_k - \epsilon}$

et donc que $Tr((B - \epsilon 1_n)^{-1}) = \frac{-(m-1)}{\epsilon} + \frac{1}{\mu_m - \epsilon} + \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{\mu_k - \epsilon}$

- On utilise maintenant la question 26. et on a, avec les deux expressions de la trace :

$$\begin{aligned} & \frac{-(m-1)}{\epsilon} + \frac{1}{\mu_m - \epsilon} + \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{\mu_k - \epsilon} > \frac{-m}{\epsilon} + \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{\lambda_k - \epsilon} \\ \Rightarrow & \frac{-(m-1)}{\epsilon} + \frac{m}{\epsilon} > -\frac{1}{\mu_m - \epsilon} + \sum_{k=m+1}^n \left(\frac{1}{\lambda_k - \epsilon} - \frac{1}{\mu_k - \epsilon} \right) \\ \Rightarrow & \frac{1}{\epsilon} > \frac{1}{\epsilon - \mu_m} + \sum_{k=m+1}^n \frac{\mu_k - \lambda_k}{(\lambda_k - \epsilon)(\mu_k - \epsilon)} \end{aligned}$$

Mais par hypothèse : $\lambda_k - \mu_k \geq 0$, $(\lambda_k - \epsilon)(\mu_k - \epsilon) \geq 0$ et donc :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\epsilon} > \frac{1}{\epsilon - \mu_m} \\ \Rightarrow & \frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{\epsilon - \mu_m} > 0 \\ \Rightarrow & \frac{-\mu_m}{\epsilon(\epsilon - \mu_m)} > 0 \end{aligned}$$

Comme $\mu_m \geq 0$ et $\epsilon > 0$ on en déduit $\epsilon - \mu_m \geq 0$ donc $\mu_m \geq \epsilon$

On a pas égalité car $\epsilon \notin sp(B)$ puisque $B - \epsilon 1_n$ inversible et donc $\boxed{\mu_m > \epsilon}$