

Devoir surveillé de Mathématiques n°6

CONCOURS BLANC TYPE MINES-CENTRALE

La présentation, la qualité de la rédaction, la clarté des raisonnements, l'orthographe entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Si le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les changements que cette erreur implique.

LA CALCULATRICE N'EST PAS AUTORISEE

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
 - Ne pas utiliser de correcteur.
 - Respecter impérativement l'ordre des questions.
 - Écrire le mot **FIN** à la fin de votre composition
 - Dessiner un poisson en dessous du mot **FIN**.
 - Conclure chaque question, utiliser une argumentation précise, **encadrer les résultats**.
-

Exercice 1

On se place dans un univers probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

On considère un entier naturel $n \geq 2$

On considère n passagers, numérotés de 1 à n , ayant chacun une place dans un avion (le passager numéro n ayant la place numéro n qui lui est attribuée).

Les passagers embarquent dans l'ordre de leur numéro (le 1, puis le 2, puis le 3, ...)

On considère qu'ils respectent les règles suivantes :

- le premier passager choisit sa place de manière aléatoire et de manière uniforme parmi les n places proposées
- ensuite, le passager k (avec $k \geq 2$), s'assoit à sa place, si elle est libre, sinon il prend une place au hasard, de manière uniforme, parmi les places restantes

Le but de l'exercice est de calculer la probabilité que le dernier passager s'asseye à sa place. On notera u_n cette probabilité.

On notera A_k l'événement : le premier passager s'assoit à la place k

On notera S l'événement : le dernier passager s'assoit à sa place

1) Donner, avec justifications, la valeur de u_2

2) Déterminer u_n pour tout $n \geq 2$

Exercice 2

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension n . Soit $(f, g) \in L(E)^2$.

On suppose que : $f \circ g = g \circ f$ et que $\text{card}(\text{sp}(f)) = n$

Montrer qu'il existe une base B de E telle que $M_B(f)$ et $M_B(g)$ soit diagonales.

Remarque : $M_B(f)$ désigne la matrice de f relativement à B , et $M_B(g)$ celle de g

Problème : Fonction de Wallis

Préliminaires

Dans tout le sujet, l'intervalle $] -1, +\infty[$ de $\mathbf{R}$ est appelé I et σ et f sont les fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, définies par :

$$\sigma(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2}$$

et

$$f(x) = \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^x dt$$

On se propose, dans cette épreuve, d'étudier f (domaine de définition, régularité, variations, convexité, développement éventuel en série entière, ...).

1 Calcul de $\sigma(1)$

Q1) Déterminer le domaine de définition de σ puis justifier que σ est continue sur celui-ci.

Q2) Exhiber deux nombres réels α et β tels que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \int_0^\pi (\alpha t^2 + \beta t) \cos(nt) dt = \frac{1}{n^2}$$

Q3) Vérifier que si $t \in]0, \pi]$, alors :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \sum_{k=1}^n \cos(kt) = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}$$

Q4) Justifier que, si φ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0, \pi]$ dans $\mathbf{R}$, alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \varphi(t) \sin(xt) dt = 0$$

Q5) Montrer que la fonction

$$S :]-\pi, \pi[\longrightarrow \mathbf{R}$$

$$t \longmapsto \begin{cases} \frac{t}{\sin(\frac{t}{2})} & \text{si } t \neq 0 \\ 2 & \text{si } t = 0 \end{cases} \text{ est } \mathbb{C}^\infty \text{ sur }]-\pi, \pi[$$

Q6) Montrer que :

$$\sigma(1) = \frac{\pi^2}{6}$$

2 Équivalents

Q7) Déterminer le domaine de définition de f puis vérifier que :

$$\forall x \in I, (x+1)f(x) = (x+2)f(x+2)$$

Q8) Calculer $f(0)$, $f(1)$ et $f(2)$

Q9) Soit $\alpha > -1$ et $\beta \in \mathbf{R}$. Montrer que : $t \mapsto (\ln(\sin(t)))^\beta t^\alpha$ est intégrable sur $]0, 1]$

Q10) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$, décroissante et convexe sur I .

Q11) Donner un équivalent simple de $f(x)$ lorsque x tend vers -1 .

Q12) Montrer que pour tout entier naturel n ,

$$f(n)f(n+1) = \frac{\pi}{2(n+1)}$$

Q13) Montrer que :

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$$

3 Développement en série entière

Si $n \in \mathbf{N}$, on note D_n l'intégrale généralisée $\int_0^{\pi/2} (\ln(\sin(t)))^n dt$.

Q14) Justifier que, si $n \in \mathbf{N}$, l'intégrale généralisée D_n est convergente, puis montrer que

$$D_1 = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t)) dt$$

Q15) Calculer $f'(0)$

Q16) Montrer que si $n \in \mathbf{N}^*$, alors

$$(-1)^n D_n = \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{\sqrt{e^{2u} - 1}} du$$

Q17) On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, A_n est convergente et que $A_n = n!$

Q18) a) Montrer que : $\forall u \in \mathbf{R}$, $e^{2u} - 1 \geq 2u$

Q18) b) En étudiant $(-1)^n D_n - n!$ montrer que :

$$D_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (-1)^n n!$$

Q19) Démontrer que f est développable en série entière sur $] -1, 1[$.

4 Convergence de suite de fonctions

On se propose dans cette partie de calculer $f''(0)$. Dans ce but, on considère deux nombres réels strictement positifs a et b , et on pose

$$\rho = \frac{b-a}{b+a}$$

On appelle Ψ l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \Psi(x) = \ln(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x)$$

Q20) Montrer que Ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$, puis que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\Psi'(x) = 4 \sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k \sin(2kx)$$

Q21) En déduire que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\Psi(x) = 2 \ln \left(\frac{a+b}{2} \right) - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(2kx)}{k} \rho^k$$

Q22) a) Calculer $\int_0^{\pi} \cos(2nx) \cos(2kx) dx$ pour $(k, n) \in (\mathbf{N}^*)^2$

Q22) b) Montrer que :

$$\int_0^{\pi} \Psi(x)^2 dx = 4\pi \left(\ln \left(\frac{a+b}{2} \right) \right)^2 + 2\pi \sigma(\rho^2)$$

On définit les suites réelles $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ par

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, a_n = \frac{1}{n+1} \text{ et } b_n = \frac{n}{n+1}$$

Q23) a) Établir la convergence simple de la suite d'applications $(\Psi_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$, de $]0, \frac{\pi}{2}]$ dans $\mathbf{R}$, définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall t \in]0, \frac{\pi}{2}], \Psi_n(t) = \ln(a_n^2 \cos^2 t + b_n^2 \sin^2 t)$$

Q23) b) Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall t \in]0, \frac{\pi}{2}], |\Psi_n(t)| \leq \ln(4) - 2\ln(\sin(t))$

Q24) Calculer $f''(0)$.