

Devoir surveillé de Mathématiques n°6

CONCOURS BLANC TYPE ccINP

La présentation, la qualité de la rédaction, la clarté des raisonnements, l'orthographe entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Si le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les changements que cette erreur implique.

LA CALCULATRICE N'EST PAS AUTORISEE

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Respecter impérativement l'ordre des questions.
- Écrire le mot **FIN** à la fin de votre composition
- Dessiner un bonhomme en dessous du mot **FIN**.
- Conclure chaque question, utiliser une argumentation précise, **encadrer les résultats**.

Exercice : série de Pile ou Face

On se place dans un univers probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

On considère une pièce qui donne PILE avec une probabilité $p \in]0, 1[$ et FACE avec une probabilité $q = 1 - p$.

On pourra utiliser q mais on donnera les résultats uniquement en fonction de p .

On lance indéfiniment cette pièce et les lancers sont indépendants.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on notera F_n l'événement obtenir FACE au n -ième lancer.

On a donc $\overline{F_n}$ qui est l'événement obtenir PILE au n -ième lancer.

Ne jamais obtenir PILE ...

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, J_n l'événement ne jamais obtenir PILE lors des n premiers lancers et J l'événement ne jamais obtenir PILE.

- 1) Ecrire l'événement J_n à l'aide des événements F_k et en déduire $P(J_n)$
- 2) Ecrire l'événement J à l'aide des événements J_k et en déduire $P(J)$

Premier PILE ...

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, K_n l'événement obtenir pour la première fois PILE au lancer n

On note A l'événement obtenir le premier PILE après un nombre pair de lancers.

3) Ecrire l'événement K_n à l'aide des événements F_k et en déduire $P(K_n)$

4) Calculer $P(A)$

Première apparition de PILE-PILE

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, L_n l'événement obtenir pour la première fois deux PILES consécutifs au n -ième lancer (un PILE au lancer $n - 1$ et un PILE au lancer n).

On pose $u_n = P(L_n)$

5) Calculer u_1 et u_2

6°) a) Déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

6°) b) Dans le cas particulier $p = \frac{2}{3}$, déterminer u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Problème 1 : Polynôme de Laguerre et méthode de quadrature de Gauss

Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie I - Produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

I.1 - Généralités

Pour tout couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, on note :

$$(P|Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt.$$

1. Justifier que l'intégrale définissant $(P|Q)$ est convergente
2. Montrer que l'application $(\cdot|\cdot) : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}$ est un produit scalaire.

I.2 - Calcul d'un produit scalaire

3. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. A l'aide d'une intégration par parties, établir que :

$$\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = k \int_0^{+\infty} t^{k-1} e^{-t} dt.$$

4. Conclure que $(X^k|1) = k!$ pour tout entier $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Partie II - Construction d'une base orthogonale

On considère l'application α définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \alpha(P) = XP'' + (1 - X)P'.$$

II.1 - Propriétés de l'application α

5. Montrer que α est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
6. Ecrire la matrice de α dans la base $(1, X, \dots, X^n)$.
7. En déduire que α est diagonalisable et que $sp(\alpha) = \{-k | k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$.

II. Vecteurs propres de l'application α

On fixe un entier $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

8. Quelle est la dimension de $\text{Ker}(\alpha + k\text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})$?
9. En déduire qu'il existe un unique polynôme $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1, vérifiant $\alpha(P_k) = -kP_k$.
10. Justifier que P_k est de degré k .
11. Déterminer P_0 et P_1 . Vérifier que $P_2 = X^2 - 4X + 2$.

II.3 - Orthogonalité de la famille $(P_0, \dots, P_n)$

On fixe un couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$.

12. Montrer que $(\alpha(P)|Q) = - \int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}dt$.
13. En déduire que $(\alpha(P)|Q) = (P|\alpha(Q))$.
14. Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.
On pourra utiliser les questions 9 et 13.

Partie III - Méthode de quadrature de Gauss

On admet que le polynôme P_n admet n racines réelles distinctes que l'on note $x_1, \dots, x_n$.

On souhaite montrer qu'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}dt = \sum_{i=1}^n \lambda_i P(x_i). \quad (*)$$

15. Montrer qu'un n -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifie $(*)$ si et seulement si :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ (n-1)! \end{pmatrix}.$$

16. En déduire qu'il existe un unique n -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifiant (*).

17. Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ tel que

$$\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}dt \neq \sum_{i=1}^n \lambda_i P(x_i).$$

Problème 2 : Fonction de Wallis

Dans tout le sujet, l'intervalle $] -1, +\infty[$ de $\mathbb{R}$ est appelé I et f est la fonction :

$$f(x) = \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^x dt$$

On se propose, dans ce problème d'étudier en partie f .

Q1) Déterminer le domaine de définition de f

Q2) Montrer que : $\forall x \in I, (x+1)f(x) = (x+2)f(x+2)$

Q3) Calculer $f(0)$, $f(1)$ et $f(2)$

Q4) a) Montrer que, au voisinage de 0^+ : $\ln(\sin(t)) \sim \ln(t)$

Q4) b) Soit $\alpha > -1$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

Montrer que : $t \mapsto (\ln(\sin(t)))^\beta t^\alpha$ est intégrable sur $]0, 1]$

On pourra utiliser un réel γ tel que : $-1 < \gamma < \alpha$

Q5) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$, décroissante et convexe sur I .

Q6) Donner un équivalent simple de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.

Q7) Montrer que pour tout entier naturel n ,

$$f(n)f(n+1) = \frac{\pi}{2(n+1)}$$

Q8) Montrer que : $\forall x \in I, f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$