

PSI* 2025-2026, Mathématiques DS n°6 CONCOURS BLANC, type ccINP-e3A , Correction

Exercice : série de Pile ou Face

1) On a : $J_n = \bigcap_{k=1}^n F_k$

Comme les F_k sont indépendants alors : $P(J_n) = \prod_{k=1}^n P(F_k) = \prod_{k=1}^n q = q^n$

On a donc : $J_n = \bigcap_{k=1}^n F_k$ et $P(J_n) = q^n = (1-p)^n$

2) On remarque que : $J = \bigcap_{n=1}^{+\infty} J_n$ et que $J_{n+1} \subset J_n$

On peut alors appliquer le théorème de la limite décroissante et on en déduit :
 $P(J) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(J_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$

On a donc : $J = \bigcap_{n=1}^{+\infty} J_n$ et $P(J) = 0$

Remarque : cf exo corrigés 16.6 qui ressemble beaucoup

3) Comme en 1) on a : $K_n = \left(\bigcap_{k=1}^{n-1} F_k \right) \cap \overline{F_n}$

Comme les F_k sont indépendants alors : $P(J_n) = \left(\prod_{k=1}^{n-1} P(F_k) \right) P(\overline{F_n}) = q^{n-1}p$

On a donc : $K_n = \left(\bigcap_{k=1}^{n-1} F_k \right) \cap \overline{F_n}$ et $P(K_n) = q^{n-1}p = p(1-p)^{n-1}$

4) Comme $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} K_{2n}$ alors, par incompatibilité : $P(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(K_{2n}) = \sum_{n=1}^{+\infty} pq^{2n-2}$

On reconnaît une série géométrique de raison q^2 avec $q^2 \in]-1, 1[$ donc convergente.

Alors : $P(A) = p \frac{1}{1-q^2} = \frac{p}{1-(1-2p+p^2)} = \frac{1}{2-p}$

On a donc : $P(A) = \frac{1}{2-p}$

5) Puisque que l'on ne peut pas obtenir la série PILE-PILE en un seul lancer on a clairement $u_1 = 0$

On a : $L_2 = \overline{F_1} \cap \overline{F_2}$ puis par indépendance : $u_2 = P(L_2) = P(\overline{F_1})P(\overline{F_2}) = p^2$

On a donc : $u_1 = 0$ et $u_2 = p^2$

6) a) $(F_1, \overline{F_1} \cap F_2, \overline{F_1} \cap \overline{F_2})$ est un système complet d'événement car $F_1 \cup (\overline{F_1} \cap F_2) \cup (\overline{F_1} \cap \overline{F_2}) = \Omega$ et que les événements sont incompatibles deux à deux.

Par la formule des probabilités totales sur ce système complet d'événements on a pour $n \geq 3$:

$$P(L_n) = P(L_n|F_1)P(F_1) + P(L_n|\overline{F_1} \cap F_2)P(\overline{F_1} \cap F_2) + P(L_n|\overline{F_1} \cap \overline{F_2})P(\overline{F_1} \cap \overline{F_2})$$

On a :

- $P(L_n|F_1) = P(L_{n-1}) = u_{n-1}$ car si on commence par un FACE, la série PILE-PILE n'est pas commencée et c'est comme si on recommençait
- $P(L_n|\overline{F_1} \cap \overline{F_2}) = 0$ car on a $n \geq 3$ et que la série PILE-PILE a déjà eu lieu lors des 2 premiers lancers.
- $P(L_n|\overline{F_1} \cap F_2) = P(L_{n-2}) = u_{n-2}$, comme ci-dessus mais avec PILE-FACE pour commencer.
- Par indépendance $P(\overline{F_1} \cap F_2) = pq$

$$\text{Il reste : } \boxed{\forall n \geq 3, u_n = qu_{n-1} + pq u_{n-2} = (1-p)u_{n-1} + p(1-p)u_{n-2}}$$

6°) b) Si $p = \frac{2}{3}$ on a : $\forall n \geq 3, u_n - \frac{1}{3}u_{n-1} - \frac{2}{9}u_{n-2} = 0$
 (u_n) vérifie donc une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants d'équation caractéristique : $X^2 - \frac{1}{3}X - \frac{2}{9} = 0$

$$\Delta = \frac{1}{9} + \frac{8}{9} = 1$$

On a donc comme solution : $X_1 = \frac{\frac{1}{3}+1}{2} = \frac{2}{3}$ et $X_2 = \frac{\frac{1}{3}-1}{2} = \frac{-1}{3}$

D'après le cours : $\exists(A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall n \geq 1, u_n = A\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + B\left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1}$

Avec les valeurs trouvées en 5) :

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = \frac{4}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ \frac{2}{3}A - \frac{1}{3}B = \frac{4}{9} \end{cases} \Leftrightarrow A = \frac{4}{9} \text{ et } B = \frac{-4}{9} \quad \text{Donc } u_n = \frac{4}{9} \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1} \right)$$

$$\text{On a donc : } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{2^{n+1} + 4(-1)^n}{3^{n+1}}}$$

Problème 1 : Polynôme de Laguerre et méthode de quadrature de Gauss - (ccINP 2019 PC)

1) $t \mapsto e^{-t}P(t)Q(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$.

De plus $\frac{e^{-t}P(t)Q(t)}{e^{-t/2}} = e^{-t/2}P(t)Q(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ par comparaison exp-puissance, donc $e^{-t}R(t) = o(e^{-t/2})$ au voisinage de $+\infty$.

Comme $t \mapsto e^{-t/2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, alors, par négligeabilité $t \mapsto e^{-t}P(t)Q(t)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$

On en déduit que $\int_0^{+\infty} e^{-t}P(t)Q(t)dt$ est convergente.

$$\boxed{\text{L'intégrale définissant } (P|Q) \text{ est donc convergente.}}$$

Remarque : on peut aussi comparer à $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ en $+\infty$ (qui n'est pas intégrable en 0). Question à savoir faire par tous. Exo corrigé 7.4.

2) On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$

Soit $(P, Q, R) \in E^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

i) $\langle P, Q + \lambda R \rangle = \int_0^{+\infty} e^{-t}P(t)(Q(t) + \lambda R(t))dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}P(t)Q(t)dt + \lambda \int_0^{+\infty} e^{-t}P(t)R(t)dt$ car les intégrales sont convergentes Donc $\langle P, Q + \lambda R \rangle = \langle P, Q \rangle + \lambda \langle P, R \rangle$

ii) On a : $\langle P, Q \rangle = \langle Q, P \rangle$, évident par commutativité de la multiplication dans $\mathbb{R}$.

iii) $\langle P, P \rangle = \int_0^{+\infty} e^{-t} P(t)^2 dt \geq 0$ car $\forall t \geq 0$, $e^{-t} P(t)^2 \geq 0$ et positivité de l'intégrale.

iv) $\langle P, P \rangle = 0 \Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-t} P(t)^2 dt = 0$

Mais $t \mapsto e^{-t} P(t)^2$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$.

Donc par le théorème de l'intégrale nulle, on a $\forall t \geq 0$, $e^{-t} P(t)^2 = 0$ et donc $P(t) = 0$

P est alors un polynôme ayant une infinité de racines et donc $P = 0_E$

On a alors : $\forall (P, Q, R) \in E^3$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} i) \langle P, Q + \lambda R \rangle = \langle P, Q \rangle + \lambda \langle P, R \rangle \\ ii) \langle P, Q \rangle = \langle Q, P \rangle \\ iii) \langle P, P \rangle \geq 0 \\ iv) \langle P, P \rangle = 0 \Rightarrow P = 0_E \end{cases}$

et on en déduit que : $\langle, \rangle$ est un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}_n[X]$.

Remarque : Question classique à savoir faire par tous. Exo corrigé 7.4.

3) On remarque pour commencer que les intégrales de la relation demandée sont convergentes d'après la question 1) puisque l'on veut montrer que $(X^k|1) = k(X^{k-1}|1)$

On pose $\forall k \in \mathbb{N}$, $I_k = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = (X^k|1)$

Alors, pour $k \geq 1$ et par intégration par parties, comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^k e^{-t} = 0$ et que les intégrales sont convergentes : $I_k = [-e^{-t} t^k]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-t} k t^{k-1} dt$ et donc $I_k = k I_{k-1}$

On peut alors conclure : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = k \int_0^{+\infty} t^{k-1} e^{-t} dt$

Remarque : il s'agit encore de l'exercice 7.4, à savoir faire

4) Montrons par récurrence que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $I_k = k!$

Initialisation : $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1 = 0!$

Hérédité : $I_{k-1}(k-1)! \Rightarrow k I_{k-1} = k(k-1)! \Rightarrow I_k = k!$ avec la relation de la question 3)

Conclusion de la récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}$, $I_k = k!$

On en déduit en particulier que : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $(X^k|1) = k!$

Remarque : encore l'exo 7.4, ici on prouve un résultat sur $\mathbb{N}$ même si on en a besoin que sur $\llbracket 0, n \rrbracket$
A ce stade du devoir, mieux vaut rédiger la récurrence.

5) • Soit $P \in E = \mathbb{R}_n[X]$.

Alors $\deg(XP'') = 1 + (\deg(P) - 2) = \deg(P) - 1 \leq \deg(P)$

et $\deg((1-x)P') = 1 + (\deg(P) - 1) = \deg(P) \leq \deg(P)$

On en déduit $\deg(\alpha(P)) \leq \deg(P) \leq n$ et donc que α est à valeurs dans E

- Soit $(P, Q) \in E^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\alpha(P + \lambda Q) = X(P + \lambda Q)'' + (1 - X)(P + \lambda Q)' = (XP'' + (1 - X)P' + \lambda(XQ'' + (1 - X)Q')) = \alpha(P) + \lambda\alpha(P)$$

par linéarité de la dérivation

On a donc α linéaire.

- α est linéaire de E dans $E = \mathbb{R}_n[X]$, donc $\boxed{\alpha \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X]}$

Remarque : encore une question très classique, ne pas oublier la partie endo de endomorphisme.

$$6) \text{ Soit } k \in \llbracket 0, n \rrbracket : \alpha(X^k) = X(k(k-1)X^{k-2}) + (1-X)(kX^{k-1}) = -kX^k + k^2X^{k-1}$$

On en déduit que la matrice de α relativement à la base $B = (1, X, \dots, X^n)$ est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2^2 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & -2 & 3^2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & (n-1)^2 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & -(n-1) & n^2 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -n \end{pmatrix}$$

Remarque : ne pas hésiter à faire une grande matrice !!!

7) La matrice de α de la question 6) est triangulaire supérieure, donc ses valeurs propres (et donc celles de α) sont les termes de la diagonale.

On en déduit que $sp(\alpha) = \{-k, k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$

Donc α admet $n+1$ valeurs propres distinctes, comme $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$ alors on en déduit, d'après le cours, que α est diagonalisable.

Bilan : $\boxed{sp(\alpha) = \{-k, k \in \llbracket 0, n \rrbracket\} \text{ et } \alpha \text{ est diagonalisable.}}$

Remarque : il faut profiter du fait que la matrice est triangulaire.

8) Si $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ alors, d'après 7) : $-k$ est valeur propre simple de α , donc le sous espace propre associé est de dimension 1.

On a donc : $\boxed{\dim(ker(\alpha + kId_{\mathbb{R}_n[X]})) = 1}$

Remarque : question rapide

9) D'après sa dimension, il existe $Q_k \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $Q_k \neq 0$ et $ker(\alpha + kId_{\mathbb{R}_n[X]}) = Vect(Q_k)$
Les éléments de $ker(\alpha + kId_{\mathbb{R}_n[X]})$ s'écrivent donc μQ_k

Si on note $q \neq 0$ le coefficient dominant de Q_k alors $q\mu$ est le coefficient dominant de μQ_k

Pour que μQ_k soit unitaire il faut $\mu = \frac{1}{q}$ et il y a une unique solution.

Donc $\boxed{\text{il existe un unique polynôme unitaire } P_k \text{ de } \mathbb{R}_n[X] \text{ tel que } \alpha(P_k) = -kP_k}$

Remarque : assez évident mais il faut donner un argument ...

$$10) \alpha(P_k) = -kP_k \Rightarrow XP_k'' + (1-X)P_k' = -kP_k$$

Si on note p le degré de P_k et si on ne regarde que le terme en X^p alors : $0 - pX^p = -kX^p \Rightarrow p = k$

On a donc : $\boxed{P_k \text{ est de degré } k.}$

Remarque : technique du terme de plus haut degré déjà vue et souvent pratique ...

11) • On a déjà vu que $\alpha(1) = 0$ donc $P_0 = 1$

$$\bullet \alpha(X+a) = -(X+a) \Leftrightarrow X(X+a)'' + (1-X)(X+a)' = -(X+a) \Leftrightarrow 0 + (1-X) = -(X+a) \Leftrightarrow a = -1$$

On a donc $P_1 = X - 1$

$$\bullet \alpha(X^2 - 4X + 2) = X(2) + (1-X)(2X-4) = 2X + 2X - 4 - 2X^2 + 4X = -2X^2 + 8X - 4 = -2(X^2 - 4X + 2)$$

Alors $X^2 - 4X + 2$ est bien unitaire et vecteur propre de α associée à la valeur propre -2 .

Donc, par définition, on a bien $P_2 = X^2 - 4X + 2$

Bilan : $\boxed{P_0 = 1, P_1 = X - 1 \text{ et } P_2 = X^2 - 4X + 2}$

Remarque : à bien justifier pour P_2 ...

$$12) (\alpha(P)|Q) = \int_0^{+\infty} \alpha(P)(t)Q(t)e^{-t}dt = \int_0^{+\infty} (tP''(t) + (1-t)P'(t))Q(t)e^{-t}dt$$

On remarque que : $(tP'(t)e^{-t})' = P'(t)e^{-t} + tP''(t)e^{-t} - tP'(t)e^{-t} = (tP''(t) + (1-t)P'(t))e^{-t}$

$$\text{Alors : } (\alpha(P)|Q) = \int_0^{+\infty} Q(t)(tP'(t)e^{-t})'dt$$

On fait alors une intégration par partie, licite car on sait que la première intégrale est convergente et que la limite à la borne infinie du crochet va être nulle par comparaison exp-puissance.

$$(\alpha(P)|Q) = [Q(t)(tP'(t)e^{-t})]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} Q'(t)tP'(t)e^{-t}dt = 0 - \int_0^{+\infty} Q'(t)tP'(t)e^{-t}dt$$

$$\text{On a donc : } \boxed{(\alpha(P)|Q) = - \int_0^{+\infty} Q'(t)tP'(t)e^{-t}dt}$$

Remarque : question plus difficile et assez astucieuse, on peut s'en tirer par intégration par partie en partant du membre de droite et en primitivant P' , c'est moins rapide mais moins astucieux ...

13) Avec 12) : $(\alpha(P)|Q) = -(P', Q') = -(Q', P') = (\alpha(Q), P)$ par symétrie du produit scalaire et réutilisation de 12).

On a donc : $\boxed{\forall (P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2, (\alpha(P)|Q) = (\alpha(Q), P)}$

Remarque : question facile si on admet 12). On a que α est un endomorphisme autoadjoint.

14) • Soit $(p, q) \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tel que $p \neq q$

Alors avec 13) :

$$(\alpha(P_p)|P_q) = (\alpha(P_q), P_p)$$

$$\Rightarrow \underbrace{(-pP_p|P_q)}_{Q^9)} = (P_p| -qP_q) \Rightarrow (p-q)(P_p|P_q) = 0 \Rightarrow (P_p|P_q) = 0 \text{ puisque } p \neq q$$

$(P_0, \dots, P_n)$ est donc une famille orthogonale, comme les vecteurs sont unitaires donc non nuls, et qu'il y a $\dim(\mathbb{R}_n[X])$ vecteurs alors : $\boxed{(P_0, \dots, P_n \text{ est une base orthogonale de } \mathbb{R}_n[X])}$

Remarque : on peut aussi utiliser le cours et que les sous-espaces propres d'un endomorphisme autoadjoint sont orthogonaux. J'ai fait la méthode qui me semblait attendue par l'énoncé.

15) Comme $(*)$ est une relation linéaire alors il suffit qu'elle soit vérifiée sur une base de $\mathbb{R}_n[X]$ pour être vérifiée sur $\mathbb{R}_n[X]$

Alors : $(*) \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}dt = \sum_{i=1}^n \lambda_i P(x_i)$ on utilise 4)

$$\Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket , k! = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^k$$

En écrivant matriciellement ces relations on a :

$$(*) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ (n-1)! \end{pmatrix}$$

Remarque : méthode : ne vérifier que sur une base et par linéarité ... base de l'algèbre linéaire ...

16) Le déterminant de la matrice ci-dessus est un déterminant de Vandermonde, comme les x_i sont distincts, on sait que ce déterminant est non nul, donc que la matrice est inversible ce qui donne une unique solution au système.

Conclusion : il existe un unique n -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ vérifiant $(*)$

Remarque : reconnaître Vandermonde ...

17) Si on prend $P = \left(\prod_{k=0}^n (X - x_k) \right)^2$ alors P est de degré $2n$

Dans $(*)$ le membre de gauche est strictement positif car P non nul et le membre de droite est nul car les $P(x_i)$ sont nuls. $(*)$ n'est pas vérifiée.

On a trouver un polynôme de $\mathbb{R}_{2n}[X]$ répondant aux critères souhaités.

Problème 2 : Fonction de Wallis (inspiré d'un tout petit bout de mines-ponts MP 2023)

Q1) Posons $A =]0, \frac{\pi}{2}]$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $\forall t \in A$, $a(t) = (\sin(t))^x = \exp(x \ln(\sin(t)))$
Comme $\sin(t) > 0$ sur A alors a est continue sur A et l'intégrale $f(x)$ ne pose problème que en $t = 0$.

Au voisinage de $t = 0$:

$$\begin{aligned} a(t) &= \exp(x \ln(t + o(t^2))) = \exp\left(x \ln\left(t(1 + o(t))\right)\right) = \exp\left(x \left(\ln(t) + \ln(1 + o(t))\right)\right) \\ &= \exp\left(x \ln(t)\right) \exp\left(x \ln(1 + o(t))\right) \\ &\sim \exp\left(x \ln(t)\right) \sim t^x > 0 \end{aligned}$$

Donc par règle de l'équivalent : $f(x)$ est de même nature que $\int_0^\pi t^x dt = \int_0^\pi \frac{1}{t^{-x}} dt$ qui est une intégrale de Riemann convergente si et seulement si $-x < 1 \Leftrightarrow -1 < x$

On en déduit que : le domaine de f est $I =]-1, +\infty[$

Q2) Pour $x \in I$, effectuons une intégration par partie dans $f(x+2)$.

IPP possible car les fonctions sont dérivables et que les limites aux bornes du crochet sont finies.

$$\begin{aligned} &f(x+2) \\ &= \int_0^\pi (\sin(t))^{x+2} dt \\ &= \int_0^\pi (\sin(t))^{x+1} \sin(t) dt \\ &= [-\cos(t)(\sin(t))^{x+1}]_0^\pi + \int_0^\pi (x+1)\cos(t)(\sin(t))^x \cos(t) dt \\ &= 0 - 0 + (x+1) \int_0^\pi (\sin(t))^x (1 - \sin^2(t)) dt \\ &= (x+1)(f(x) - f(x+2)) \end{aligned}$$

On a donc : $\forall x \in I$, $(x+2)f(x+2) = (x+1)f(x)$

Q3) • $f(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = \frac{\pi}{2}$ • $f(1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) dt = [-\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

• Avec la relation de Q2) en $x = 0 \in I$: $2f(2) = f(0) = \frac{\pi}{2}$ donc $f(2) = \frac{\pi}{4}$

Bilan : $f(0) = \frac{\pi}{2}$, $f(1) = 1$ et $f(2) = \frac{\pi}{4}$

Q4) a) Pour commencer, au voisinage de $t = 0$:

$$\ln(\sin(t)) = \ln(t + o(t^2)) = \ln(t(1 + o(t))) = \ln(t) + \ln(1 + o(t)) = \ln(t) + o(1) \sim \ln(t)$$

On a donc : $\ln(\sin(t)) \sim \ln(t)$

Q4) b) $t \mapsto t \mapsto (\ln(\sin(t)))^\beta t^\alpha$ est continue par morceaux sur $]0, 1]$.

Fixons $\gamma \in]1, \alpha[$ ce qui est possible puisque $\alpha > 1$

Alors au voisinage de $t = 0$:

$$\frac{(\ln(\sin(t)))^\beta t^\alpha}{t^\gamma} = (\ln(\sin(t)))^\beta t^{\alpha-\gamma} \sim (\ln(t))^\beta t^{\alpha-\gamma} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \text{ par comparaison ln-puissance puisque } \alpha > \gamma$$

Alors $(\ln(\sin(t)))^\beta t^\alpha = o(t^\gamma)$

Comme $t \mapsto t^\gamma$ est intégrable sur $]0, 1]$ puisque $\gamma > -1$ alors, par négligeabilité :

$$\boxed{t \mapsto (\ln(\sin(t)))^\beta t^\alpha \text{ est intégrable sur }]0, 1]}$$

Q5) Posons :
$$\begin{array}{ccc} g & : & I \times A \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & (x, t) \longmapsto (\sin(t))^x \end{array} \quad (\text{avec } A =]0, \frac{\pi}{2}], \text{ déjà posé})$$

On remarque que g est C^∞ sur $I \times A$.

• Comme $g(x, t) \geq 0$ donc est de signe constant, on a déjà que : $\forall x \in I$, $t \mapsto g(x, t)$ est intégrable sur A avec le début de la question Q1)

• On a : $\forall (x, t) \in I \times A$, $\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = \ln(\sin(t)) \exp(x \ln(\sin(t))) = \ln(\sin(t)) t^x$
 $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est continue sur A donc l'intégrabilité sur A ne pose problème que en 0.

On utilise la question Q5)b) pour avoir $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est intégrable sur A .

• On a : $\forall (x, t) \in I \times A$, $\frac{\partial g^2}{\partial x^2}(x, t) = \ln(\sin(t))^2 \exp(x \ln(\sin(t))) = \ln(\sin(t))^2 t^x$

Fixons $a \in I$. On a donc $a > -1$.

Alors $\forall (x, t) \in [a, +\infty[\times I$, $\left| \frac{\partial g^2}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq (\ln(\sin(t)))^2 t^a$

On utilise la question Q5)b) pour avoir que $t \mapsto (\ln(\sin(t)))^2 t^a$ est intégrable sur A

$$\text{On a donc : } \left\{ \begin{array}{l} \forall t \in A, x \mapsto g(x, t) \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } [a, +\infty[\\ \forall x \in [a, +\infty[, t \mapsto g(x, t) \text{ est intégrable sur } A \\ \forall x \in [a, +\infty[, t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \text{ est intégrable sur } A \\ \forall x \in [a, +\infty[, t \mapsto \frac{\partial g^2}{\partial x^2}(x, t) \text{ est continue par morceaux sur } A \\ \forall (x, t) \in [a, +\infty[\times I, \left| \frac{\partial g^2}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq (\ln(\sin(t)))^2 t^a \\ \text{avec } t \mapsto (\ln(\sin(t)))^2 t^a \text{ est intégrable sur } A \end{array} \right.$$

On peut alors, appliquer la généralisation du théorème de dérivation sous le signe somme et en déduit que $x \mapsto f(x) = \int_A g(x, t) dt$ est de classe C^2 sur $[a, +\infty[$ et que : $\forall x \in [a, +\infty[$, $f'(x) = \int_A \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) dt$ et $f''(x) = \int_A \frac{\partial g^2}{\partial x^2}(x, t) dt$

Comme $\bigcup_{a > -1} [a, +\infty[=]-1, +\infty[= I$ et comme la dérivation est une notion locale alors :

$$f \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } I \text{ et } \forall x \in I, \left\{ \begin{array}{l} f'(x) = \int_A \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) dt \\ f''(x) = \int_A \frac{\partial g^2}{\partial x^2}(x, t) dt \end{array} \right.$$

• $\forall x \in I$, $f'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\ln(\sin(t))}_{\leq 0} \underbrace{(\sin(t))^x}_{\geq 0} dt$ donc $f'(x) \leq 0$ et donc f est décroissante sur I .

- $\forall x \in I$, $f''(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\ln(\sin(t))^2}_{\geq 0} \underbrace{(\sin(t))^x}_{\geq 0} dt$ donc $f''(x) \geq 0$ et donc f est convexe sur I .
- Bilan : $\boxed{f \text{ est de classe } C^2, \text{ décroissante et convexe sur } I.}$

Q6) Comme f est continue en $x = -1$, alors :

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x+2) = f(-1+2) = f(1) = 2 \text{ (on utilise Q2)}$$

Donc, comme $\forall x > -1$, $(x+1)f(x) = (x+2)f(x+2)$ alors $\lim_{x \rightarrow -1} (x+1)f(x) = (-1+2)2 = 2$

On en déduit : $\boxed{f(x) \underset{x \rightarrow -1}{\sim} \frac{2}{x+1}}$

Q7) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $f(n)f(n+1) = \frac{\pi}{2(n+1)}$

Initialisation : pour $n = 0$

Avec Q3) : $f(0)f(1) = \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2(0+1)}$

On a bien la relation voulue au rang 0

Hérédité : On suppose la propriété vraie pour un rang $n \in \mathbb{N}$ à savoir : $f(n)f(n+1) = \frac{\pi}{2(n+1)}$

Alors $f(n+1)f(n+2)$ avec Q7)

$$= f(n+1) \frac{n+1}{n+2} f(n) \text{ on utilise l'hypothèse de récurrence}$$

$$= \frac{n+1}{n+2} \frac{\pi}{2(n+1)}$$

$$= \frac{\pi}{2(n+2)} \text{ et on a bien la relation au rang } n+1$$

Conclusion : on a montré par récurrence que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, f(n)f(n+1) = \frac{\pi}{2(n+1)}}$

Q8) • f est décroissante, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n+2) \leq f(n+1) \leq f(n)$

Comme $f(n) > 0$ alors $\frac{f(n+2)}{f(n)} \leq \frac{f(n+1)}{f(n)} \leq 1$

En utilisant Q2) : $\underbrace{\frac{n+2}{n+1}}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1} \leq \frac{f(n+1)}{f(n)} \leq 1$

Donc par encadrements : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n+1)}{f(n)} = 1$ et donc $f(n+1) \sim f(n)$

Avec la relation précédent on obtient : $f(n)^2 \sim \frac{\pi}{2n}$ et comme $f(n) > 0$ on a : $f(n) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$

• Pour x au voisinage de $+\infty$: $\lfloor x \rfloor \leq x \leq \lfloor x \rfloor + 1$ et f décroissante donne :

$$f(\lfloor x \rfloor + 1) \leq f(x) \leq f(\lfloor x \rfloor)$$

Mais $\lfloor x \rfloor + 1 \in \mathbb{N}$ donc $f(\lfloor x \rfloor + 1) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2(\lfloor x \rfloor + 1)}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$ et de même : $f(\lfloor x \rfloor) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\lfloor x \rfloor}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$

Donc par encadrement : $\boxed{f(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}}}$