

exercice 1

1) Si $n = 2$, il n'y a que 2 possibilités :

cas 1 : le passager 1 s'assoit à sa place et donc 2 aussi puisque sa place est libre

cas 2 : le passager 1 ne s'assoit pas à sa place et prend donc la place de 2 qui ne peut que s'asseoir à la place 1 qui n'est pas la sienne.

On en déduit : $\boxed{u_2 = \frac{1}{2}}$

2) On remarque que $(A_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est un système complet d'événements.

Par la formule des probabilités totales sur ce système complet d'événements : $P(S) = \sum_{k=1}^n P(S|A_k)P(A_k)$

De plus, par équiprobabilité : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P(A_k) = \frac{1}{n}$

Donc $P(S) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P(S|A_k)$

On sépare les cas particuliers : $P(S) = \frac{1}{n} \left(P(S|A_1) + \left(\sum_{k=2}^n P(S|A_k) \right) + P(S|A_n) \right)$

- Si A_1 est réalisé, alors tout les passagers s'assoient à la bonne place et donc $P(S|A_1) = 1$

- Si A_n est réalisé, le dernier passager ne peut pas s'asseoir à sa place puisqu'elle est prise par le premier passager donc $P(S|A_n) = 0$

- Si A_k est réalisé avec $k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$:

alors, après l'arrivée de 1, seule la place $k \geq 2$ est prise, donc tout les passagers de 2 à $k-1$ peuvent s'asseoir à leur place.

Quand arrive le k -ième passager, sa place est prise.

Si on considère la place numéro 1 comme la sienne (ce qui ne change rien pour le passager n), alors la situation est la même que si le premier passager arrivait dans un avion à $n - (k-1) = n - k + 1$ places.

On a donc $P(S|A_k) = u_{n-k}$

Reporté dans la formule ci-dessus on obtient : $u_n = \frac{1}{n} \left(1 + \sum_{k=2}^{n-1} u_{n-k+1} + 0 \right) = \frac{1}{n} \left(1 + \sum_{k=2}^{n-1} u_{n-k+1} \right)$

Montrons maintenant par récurrence forte que : $\forall n \geq 2$, $u_n = \frac{1}{2}$

Initialisation : faite à la question 1)

Hérédité : On suppose le résultat vrai pour $n \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$ et on le montre au rang n

On a vu : $u_n = \frac{1}{n} \left(1 + \sum_{k=2}^{n-1} u_{n-k+1} \right)$

Comme $k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket \Rightarrow n - k + 1 \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$ alors $u_{n-k+1} = \frac{1}{2}$ par hypothèse de récurrence

Il reste : $u_n = \frac{1}{n} \left(1 + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{n-2}{2} \right) = \frac{1}{n} \frac{n}{2} = \frac{1}{2}$

Conclusion : $\boxed{\forall n \geq 2, u_n = \frac{1}{2}}$

Exercice 2

Comme on est en dimension n et que f admet n valeurs propres distinctes puisque $\text{card}(sp(f)) = n$, alors : f est diagonalisable.

Donc, il existe une base $B = (e_1, \dots, e_n)$ formée de vecteurs propres de f . On a donc $M_B(f)$ diagonale.

On note alors $(\lambda_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ les valeurs propres de f de telle sorte que : $f(e_k) = \lambda_k e_k$

Comme il y a n valeurs propres distinctes alors elles sont simples et donc : $\dim(E_k) = 1$ avec $E_k = \ker(f - \lambda_k)$ On a aussi : $E_k = \text{vect}(e_k)$

Comme f et g commutent, on a : $f(g(e_k)) = g(f(e_k)) \Rightarrow f(g(e_k)) = g(\lambda_k e_k) = \lambda_k g(e_k)$

Donc $g(e_k) \in E_k = \text{vect}(e_k) \Rightarrow \exists \mu_k \in \mathbb{R}, g(e_k) = \mu_k e_k$

Comme $e_k \neq 0$ alors e_k est un vecteur propre de g .

B est donc aussi une base de vecteurs propres de g , donc $M_B(g)$ est diagonale.

Bilan : il existe une base B de E telle que $M_B(f)$ et $M_B(g)$ soit diagonales.

Problème : adapté de Mines-Ponts 2023, MP

Q1) • Pour le domaine de définition de σ , considérons deux cas :

Cas 1 : $|x| > 1$

Alors $\left| \frac{x^n}{n^2} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et donc $\sigma(x)$ est grossièrement divergente et x ne fait pas parti du domaine de σ .

Cas 2 : $|x| \leq 1$

Alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $\left| \frac{x^n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$

Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, par comparaison on a : $\sigma(x)$ convergente.

Bilan : le domaine de définition de σ est $U = [-1, 1]$

• Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{array}{ccc} f_n & : & U \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x^n}{n^2} \end{array}$$

On a ainsi par construction et par le début de la question, que $(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n)$ converge simplement vers σ sur U .

On a de plus : $\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in U} |f_n(x)| = \frac{1}{n^2}$

Donc $\sum \|f_n\|_\infty$ est convergente (comme série de Riemann) et donc $(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n)$ converge normalement et donc uniformément sur U .

Comme les fonctions f_n sont clairement continues, alors, par théorème de transfert de continuité, σ est continue sur U .

Bilan : Le domaine de définition de σ est $U = [-1, 1]$ et σ est continue sur I

Q2) Soit α et β deux réels. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On va calculer l'intégrale avec deux intégrations par parties :

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi (\alpha t^2 + \beta t) \cos(nt) dt \\ &= \underbrace{[(\alpha t^2 + \beta t) \frac{\sin(nt)}{n}]_0^\pi}_{=0} - \int_0^\pi (2\alpha t + \beta) \frac{\sin(nt)}{n} dt \\ &= [(2\alpha t + \beta) \frac{\cos(nt)}{n^2}]_0^\pi - \int_0^\pi 2\alpha \frac{\cos(nt)}{n^2} dt = (2\alpha\pi + \beta) \frac{(-1)^n}{n^2} - \frac{\beta}{n^2} - \underbrace{[2\alpha \frac{\sin(nt)}{n^3}]_0^\pi}_{=0} \end{aligned}$$

$$\text{On résout : } \begin{cases} 2\alpha\pi + \beta = 0 \\ -\beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -1 \\ \alpha = \frac{1}{2\pi} \end{cases}$$

En prenant $\alpha = \frac{1}{2\pi}$ et $\beta = -1$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^\pi (\alpha t^2 + \beta t) \cos(nt) dt = \frac{1}{n^2}$

Q3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in]0, \pi[$. Alors :

$$\sum_{k=1}^n \cos(kt) = \sum_{k=1}^n \operatorname{Re}(e^{ikt}) = \operatorname{Re}(\sum_{k=1}^n e^{ikt}) = \operatorname{Re}(\sum_{k=1}^n (e^{it})^k)$$

somme des termes d'une suite géométrique de raison e^{it} ($e^{it} \neq 1$ puisque $t \in]0, \pi[$)

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \cos(kt) \\ &= \operatorname{Re}\left(e^{it} \frac{1 - (e^{it})^n}{1 - e^{it}}\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(e^{it} \frac{1 - e^{int}}{1 - e^{it}}\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(e^{it} \frac{e^{int/2}(e^{-int/2} - e^{int/2})}{e^{it/2}(e^{-it/2} - e^{it/2})}\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(e^{it(1+n/2-1/2)} \frac{-2i \sin(nt/2)}{-2i \sin(t/2)}\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(\left(\cos(t((n+1)/2)) + i \sin(t((n+1)/2))\right) \frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right) = \frac{\sin(nt/2) \cos(\frac{n+1}{2}t)}{\sin(t/2)} \end{aligned}$$

Mais $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\sin(a) \cos(b) = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

$$\text{Donc } \sum_{k=1}^n \cos(kt) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t) + \sin(-t/2)}{2 \sin(t/2)} = \frac{\sin(\frac{2n+1}{2}t)}{2 \sin(t/2)} - \frac{1}{2}$$

On obtient donc : $\forall t \in]0, \pi[$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n \cos(kt) = \frac{\sin(\frac{2n+1}{2}t)}{2 \sin(\frac{t}{2})} - \frac{1}{2}$

Q4) Soit φ une application de classe C^1 de $[0, \pi]$ dans $\mathbb{R}$

Alors, pour $x > 0$, par intégration par parties :

$$\int_0^\pi \varphi(t) \sin(xt) dt = [\varphi(t) \frac{-\cos(xt)}{x}]_0^\pi + \int_0^\pi \varphi'(t) \frac{\cos(xt)}{x} dt = \frac{-\varphi(\pi) \cos(x\pi)}{x} + \frac{\varphi(0)}{x} + \frac{1}{x} \int_0^\pi \varphi'(t) \cos(xt) dt$$

Comme φ est C^1 sur $[0, \pi]$, alors φ' est continue sur $[0, \pi]$ qui est un segment, donc, par le théorème des bornes atteintes : $\exists M > 0$, $\forall x \in [0, \pi]$, $|\varphi'(x)| \leq M$

Avec l'inégalité de la moyenne et l'inégalité triangulaire, on a, avec le calcul ci-dessus :

$$\left| \int_0^\pi \varphi(t) \sin(xt) dt \right| \leq \frac{|\varphi(\pi)|}{x} + \frac{|\varphi(0)|}{x} + \frac{M\pi}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

Donc, par comparaison : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \varphi(t) \sin(xt) dt = 0$

Q5) Pour $t \in]-\pi, \pi[$ tel que : $t \neq 0$ on a $\sin(\frac{t}{2}) \neq 0$ et donc S est C^∞ sur $]-\pi, \pi[\setminus \{0\}$

Pour $t \neq 0$: on utilise le développement en série entière en 0 de $\sin$ qui a pour rayon de convergence $+\infty$ Alors : $\forall t \in]-\pi, \pi[$, $S(t) = \frac{t}{\sin(\frac{t}{2})} = \frac{t}{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{2^{2n+1}(2n+1)!}} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{2^{2n+1}(2n+1)!}}$

On remarque que cette relation est valable en $t = 0$

Comme $t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{2^{2n+1}(2n+1)!}$ est une série entière de rayon de convergence $+\infty$ alors c'est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Comme de plus cette fonction est non nulle en 0 (puisque'elle vaut $\frac{1}{2}$), alors son inverse est C^∞ au voisinage de 0.

On en déduit que S est C^∞ au voisinage de 0 donc en 0.

Comme il n'y avait pas de problème ailleurs : $\boxed{S \text{ est } C^\infty \text{ sur }]-\pi, \pi[}$

Q6) Posons : $\forall t \in [0, \pi]$, $\varphi(t) = (\alpha t + \beta)S(t)$ Alors, avec Q5), φ est C^1 sur $[0, \pi]$

En utilisant Q4) on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \varphi(t) \sin((2n+1)t) dt = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi (\alpha t^2 + \beta t) \frac{\sin(\frac{2n+1}{2}t)}{2\sin(t/2)} dt = 0$

En utilisant Q3) : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi (\alpha t^2 + \beta t) \left(\sum_{k=1}^n \cos(kt) + \frac{1}{2} \right) dt = 0$

Par linéarité de l'intégrale : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \int_0^\pi (\alpha t^2 + \beta t) \cos(kt) dt + \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} (\alpha t^2 + \beta t) \right) dt = 0$

Donc en utilisant Q2) : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} + \frac{\alpha}{2} \frac{\pi^3}{3} + \frac{\beta}{2} \frac{\pi^2}{2} = 0$

Comme $\alpha = \frac{1}{2\pi}$ et $\beta = -1$ alors : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12} + \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{6}$

On en déduit donc que : $\boxed{\sigma(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$

Q7) • Posons $A =]0, \frac{\pi}{2}]$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $\forall t \in A$, $a(t) = (\sin(t))^x = \exp(x \ln(\sin(t)))$

Comme $\sin(t) > 0$ sur A alors a est continue sur A et l'intégrale $f(x)$ ne pose problème que en $t = 0$.

Au voisinage de $t = 0$:

$$\begin{aligned} a(t) &= \exp(x \ln(t + o(t^2))) = \exp\left(x \ln\left(t(1 + o(t))\right)\right) = \exp\left(x \left(\ln(t) + \ln(1 + o(t))\right)\right) \\ &= \exp\left(x \ln(t)\right) \exp\left(x \ln(1 + o(t))\right) \\ &\sim \exp\left(x \ln(t)\right) \sim t^x > 0 \end{aligned}$$

Donc par règle de l'équivalent : $f(x)$ est de même nature que $\int_0^\pi t^x dt = \int_0^\pi \frac{1}{t^{-x}} dt$ qui est une intégrale de Riemann convergente si et seulement si $-x < 1 \Leftrightarrow -1 < x$

On en déduit que : $\boxed{\text{le domaine de } f \text{ est } I =]-1, +\infty[}$

• Pour $x \in I$, effectuons une intégration par partie dans $f(x+2)$. IPP possible car les fonctions sont dérivables et que les limites aux bornes du crochet sont finies.

$$\begin{aligned} f(x+2) &= \int_0^\pi (\sin(t))^{x+2} dt = \int_0^\pi (\sin(t))^{x+1} \sin(t) dt \\ &= [-\cos(t)(\sin(t))^{x+1}]_0^\pi + \int_0^\pi (x+1)\cos(t)(\sin(t))^x \cos(t) dt \\ &= 0 - 0 + (x+1) \int_0^\pi (\sin(t))^x (1 - \sin^2(t)) dt \\ &= (x+1)(f(x) - f(x+2)) \end{aligned}$$

On a donc : $\boxed{\forall x \in I, (x+2)f(x+2) = (x+1)f(x)}$

Q8) • $f(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = \frac{\pi}{2}$ • $f(1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) dt = [-\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

• Avec la relation de Q7) en $x = 0 \in I$: $2f(2) = f(0) = \frac{\pi}{2}$ donc $f(2) = \frac{\pi}{4}$

Bilan : $\boxed{f(0) = \frac{\pi}{2}, f(1) = 1 \text{ et } f(2) = \frac{\pi}{4}}$

Q9) • Pour commencer, au voisinage de $t = 0$:

$$\ln(\sin(t)) = \ln(t + o(t^2)) = \ln(t(1 + o(t))) = \ln(t) + \ln(1 + o(t)) = \ln(t) + o(1) \sim \ln(t)$$

• $t \mapsto t \mapsto (\ln(\sin(t)))^\beta t^\alpha$ est continue par morceaux sur $]0, 1]$.

Fixons $\gamma \in]1, \alpha[$ ce qui est possible puisque $\alpha > 1$

Alors au voisinage de $t = 0$:

$$\frac{(\ln(\sin(t)))^\beta t^\alpha}{t^\gamma} = (\ln(\sin(t)))^\beta t^{\alpha-\gamma} \sim (\ln(t))^\beta t^{\alpha-\gamma} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \text{ par comparaison ln-puissance puisque } \alpha > \gamma$$

Alors $(\ln(\sin(t)))^\beta t^\alpha = o(t^\gamma)$

Comme $t \mapsto t^\gamma$ est intégrable sur $]0, 1]$ puisque $\gamma > -1$ alors, par négligeabilité :

$\boxed{t \mapsto (\ln(\sin(t)))^\beta t^\alpha \text{ est intégrable sur }]0, 1]}$

Q10) Posons :
$$\begin{array}{lll} g & : & I \times A \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & (x, t) \longmapsto (\sin(t))^x \end{array} \quad (\text{avec } A =]0, \frac{\pi}{2}], \text{ déjà posé})$$

On remarque que g est C^∞ sur $I \times A$.

• Comme $g(x, t) \geq 0$ (donc est de signe constant), on a déjà que : $\forall x \in I, t \mapsto g(x, t)$ est intégrable sur A avec le début de la question Q7)

• On a : $\forall (x, t) \in I \times A, \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = \ln(\sin(t)) \exp(x \ln(\sin(t))) = \ln(\sin(t)) t^x$
 $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est continue sur A donc l'intégrabilité sur A ne pose problème que en 0.

On utilise la question Q9) pour avoir $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est intégrable sur A .

• On a : $\forall (x, t) \in I \times A, \frac{\partial g^2}{\partial x^2}(x, t) = \ln(\sin(t))^2 \exp(x \ln(\sin(t))) = \ln(\sin(t))^2 t^x$

Fixons $a \in I$. On a donc $a > -1$.

Alors $\forall (x, t) \in [a, +\infty[\times I, \left| \frac{\partial g^2}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq (\ln(\sin(t)))^2 t^a$

On utilise la question Q9) pour avoir que $t \mapsto (\ln(\sin(t)))^2 t^a$ est intégrable sur A

$$\text{On a donc : } \begin{cases} \forall t \in A, x \mapsto g(x, t) \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } [a, +\infty[\\ \forall x \in [a, +\infty[, t \mapsto g(x, t) \text{ est intégrable sur } A \\ \forall x \in [a, +\infty[, t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \text{ est intégrable sur } A \\ \forall x \in [a, +\infty[, t \mapsto \frac{\partial g^2}{\partial x^2}(x, t) \text{ est continue par morceaux sur } A \\ \forall (x, t) \in [a, +\infty[\times I, \left| \frac{\partial g^2}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq (\ln(\sin(t)))^2 t^a \\ \text{avec } t \mapsto (\ln(\sin(t)))^2 t^a \text{ est intégrable sur } A \end{cases}$$

On peut alors, appliquer la généralisation du théorème de dérivation sous le signe somme et en déduit que $x \mapsto f(x) = \int_A g(x, t) dt$ est de classe C^2 sur $[a, +\infty[$ et que : $\forall x \in [a, +\infty[, f'(x) = \int_A \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) dt$ et $f''(x) = \int_A \frac{\partial g^2}{\partial x^2}(x, t) dt$

Comme $\bigcup_{a > -1} [a, +\infty[=] -1, +\infty[= I$ et comme la dérivation est une notion locale alors :

$$f \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } I \text{ et } \forall x \in I, \begin{cases} f'(x) = \int_A \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) dt \\ f''(x) = \int_A \frac{\partial g^2}{\partial x^2}(x, t) dt \end{cases}$$

- $\forall x \in I, f'(x) = \int_0^\pi \underbrace{\ln(\sin(t))}_{\leq 0} \underbrace{(\sin(t))^x}_{\geq 0} dt$ donc $f'(x) \leq 0$ et donc f est décroissante sur I .
- $\forall x \in I, f''(x) = \int_0^\pi \underbrace{\ln(\sin(t))^2}_{\geq 0} \underbrace{(\sin(t))^x}_{\geq 0} dt$ donc $f''(x) \geq 0$ et donc f est convexe sur I .
- Bilan : $\boxed{f \text{ est de classe } C^2, \text{ décroissante et convexe sur } I.}$

Q11) Comme f est continue en $x = -1$, alors :

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x+2) = f(-1+2) = f(1) = 2 \text{ (on utilise Q8)}$$

Donc, comme $\forall x > -1, (x+1)f(x) = (x+2)f(x+2)$ alors $\lim_{x \rightarrow -1} (x+1)f(x) = (-1+2)2 = 2$

$$\text{On en déduit : } \boxed{f(x) \underset{x \rightarrow -1}{\sim} \frac{2}{x+1}}$$

Q12) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que : $f(n)f(n+1) = \frac{\pi}{2(n+1)}$

Initialisation : pour $n = 0$

$$\text{Avec Q8) : } f(0)f(1) = \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2(0+1)}$$

On a bien la relation voulue au rang 0

Hérédité : On suppose la propriété vraie pour un rang $n \in \mathbb{N}$ à savoir : $f(n)f(n+1) = \frac{\pi}{2(n+1)}$

Alors avec Q7 et l'hypothèse de récurrence:

$$f(n+1)f(n+2) = f(n+1) \frac{n+1}{n+2} f(n) = \frac{n+1}{n+2} \frac{\pi}{2(n+1)} = \frac{\pi}{2(n+2)} \text{ et on a bien la relation au rang } n+1$$

Conclusion : On a montré par récurrence que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, f(n)f(n+1) = \frac{\pi}{2(n+1)}}$

Q13) • f est décroissante, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n+2) \leq f(n+1) \leq f(n)$

Comme $f(n) > 0$ alors $\frac{f(n+2)}{f(n)} \leq \frac{f(n+1)}{f(n)} \leq 1$

En utilisant Q7) : $\underbrace{\frac{n+2}{n+1}}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1} \leq \frac{f(n+1)}{f(n)} \leq 1$

Donc par encadrement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n+1)}{f(n)} = 1$ et donc $f(n+1) \sim f(n)$

Avec la relation précédent on obtient : $f(n)^2 \sim \frac{\pi}{2n}$ et comme $f(n) > 0$ on a : $f(n) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$

• Pour x au voisinage de $+\infty$: $\lfloor x \rfloor \leq x \leq \lfloor x \rfloor + 1$ et f décroissante donne :

$$f(\lfloor x \rfloor + 1) \leq f(x) \leq f(\lfloor x \rfloor)$$

Mais $\lfloor x \rfloor + 1 \in \mathbb{N}$ donc $f(\lfloor x \rfloor + 1) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2(\lfloor x \rfloor + 1)}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$ et de même : $f(\lfloor x \rfloor) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\lfloor x \rfloor}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$

Donc par encadrement : $\boxed{f(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}}}$

Q14) • $t \mapsto (\ln(t))^n$ est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.

L'intégrale D_n ne pose problème que en 0

Comme $\ln(\sin(t)) \sim \ln(t)$ (déjà vu) alors, au voisinage de 0 : $(\ln(\sin(t)))^n = o(\frac{1}{\sqrt{t}})$

$t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ étant intégrable sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ alors par négligeabilité $t \mapsto (\ln(t))^n$ est intégrable sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ et donc

$\boxed{D_n \text{ est convergente.}}$

• Comme D_1 est convergente on peut effectuer le changement de variable C^1 bijectif $u = \frac{\pi}{2} - t$

On a alors : $D_1 = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \ln(\sin(\frac{\pi}{2} - u))(-du) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(u))du$

En reposant $t = u$ on a bien : $\boxed{D_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t))dt}$

Q15) • D'après l'expression trouvée en Q10) : $f'(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))dt = D_1$

• Calculons D_1 avec les deux expressions connues.

On a $2D_1 = D_1 + D_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t))dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))dt$

En regroupant les intégrales, puis, par propriété du $\ln$:

$$2D_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t)\sin(t))dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\frac{1}{2}\sin(2t))dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\frac{1}{2})dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2t))dt$$

Changement de variable C^1 bijectif $u = 2t$ dans la seconde intégrale et calcul de la première :

$$2D_1 = -\frac{\pi \ln(2)}{2} + \int_0^{\pi} \ln(\sin(u))\frac{du}{2}$$

On remarque que : $\int_0^{\pi} \ln(\sin(u))du = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(u))du = 2D_1$

Reporté ci-dessus : $2D_1 = -\frac{\pi \ln(2)}{2} + D_1$ et on en déduit $\boxed{f'(0) = D_1 = \frac{-\pi}{2\ln(2)}}$

Q16) On effectue dans D_n le changement de variable C^1 bijectif :

$$u = -\ln(\sin(t)) \Leftrightarrow e^{-u} = \sin(t) \Leftrightarrow t = \arcsin(e^{-u}) \text{ (vu les intervalles considérés)}$$

$$\text{Alors } dt = \frac{-e^{-u}}{\sqrt{1-(e^{-u})^2}} du$$

$$\text{et donc } D_n = \int_{+\infty}^0 (-1)^n u^n \frac{-e^{-u}}{\sqrt{1-(e^{-u})^2}} du = \int_0^{+\infty} (-1)^n \frac{u^n e^{-u}}{\sqrt{1-e^{-2u}}} du = (-1)^n \int_0^{+\infty} \frac{u^n e^{-u}}{\sqrt{e^{-2u}(e^{2u}-1)}} du = (-1)^n \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{\sqrt{e^{2u}-1}} du$$

$$\text{On a bien : } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, (-1)^n D_n = \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{\sqrt{e^{2u}-1}} du}$$

Q17) • Pour $n \in \mathbb{N}$, $t \mapsto t^n e^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$ donc l'intégrale A_n ne pose problème que en $+\infty$.

Mais au voisinage de $+\infty$: $t^n e^{-t} = o(e^{-t/2})$ et $t \mapsto e^{-t/2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ d'après le cours.

On en déduit $t \mapsto t^n e^{-t}$ intégrable sur $[0, +\infty[$ et donc A_n convergente.

• On intègre maintenant A_n par parties, possible puisque les limites du crochet aux bornes sont finies. Alors : $A_n = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} e^{-t} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1} e^{-t} dt \Rightarrow A_n = 0 - 0 + \frac{A_{n+1}}{n+1} \Rightarrow A_{n+1} = (n+1)A_n$

$$\text{Or } A_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1$$

On reconnaît la définition récursive de l'exponentielle, on a donc par récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, A_n \text{ est convergente et } A_n = n!}$$

Q18) a) $\frac{d^2}{du^2}(e^{2u}) = 4e^{2u} > 0$ donc $u \mapsto e^{2u}$ est convexe.

De plus $v = 2u - 1$ est l'équation de la tangente à la représentation graphique de $u \mapsto e^{2u}$ en $u = 0$

On en déduit par convexité que : $\boxed{\forall u \in \mathbb{R}, e^{2u} - 1 \geq 2u}$

Q18) b) On utilise Q17). Alors :

$$\begin{aligned} (-1)^n D_n - n! &= \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{\sqrt{e^{2u}-1}} du - \int_0^{+\infty} u^n e^{-u} du = \int_0^{+\infty} u^n \left(\frac{1}{\sqrt{e^{2u}-1}} - \frac{1}{e^u} \right) du \\ &= \int_0^{+\infty} u^n \left(\frac{(e^u - \sqrt{e^{2u}-1})(e^u + \sqrt{e^{2u}-1})}{e^u \sqrt{e^{2u}-1} (e^u + \sqrt{e^{2u}-1})} \right) du \\ &= \int_0^{+\infty} u^n \left(\frac{e^{2u} - (e^{2u}-1)}{e^u \sqrt{e^{2u}-1} (e^u + \sqrt{e^{2u}-1})} \right) du \\ &= \int_0^{+\infty} u^n \left(\frac{1}{e^u \sqrt{e^{2u}-1} (e^u + \sqrt{e^{2u}-1})} \right) du \end{aligned}$$

Mais comme $e^u + \sqrt{e^{2u}-1} \geq \sqrt{e^{2u}-1}$ alors :

$$0 \leq (-1)^n D_n - n! \leq \int_0^{+\infty} u^n \left(\frac{1}{e^u \sqrt{e^{2u}-1} \sqrt{e^{2u}-1}} \right) du = \int_0^{+\infty} u^n \left(\frac{1}{e^u (e^{2u}-1)} \right) du$$

Par inégalité de convexité : $e^{2u} - 1 \geq 2u > 0 \Rightarrow \frac{1}{e^{2u}-1} \leq \frac{1}{2u}$ et donc :

$$\begin{aligned} 0 \leq (-1)^n D_n - n! &\leq \int_0^{+\infty} u^n \left(\frac{1}{e^u 2u} \right) du \Rightarrow 0 \leq (-1)^n D_n - n! \leq \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} u^{n-1} e^{-u} du \\ &\Rightarrow 0 \leq (-1)^n D_n - n! \leq \frac{1}{2} (n-1)! \end{aligned}$$

Donc $(-1)^n D_n - n! = O((n-1)!)$

$$\Rightarrow (-1)^n D_n = n! + O((n-1)!) \Rightarrow \frac{(-1)^n D_n}{n!} = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

et donc $\boxed{(-1)^n D_n \sim n!}$

Q19) • Pour l'instant on fixe $x \in]-1, 1[$ et on utilise le développement en série entière de $\exp$

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^x dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp(x \ln(\sin(t))) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\ln(\sin(t)))^n x^n}{n!} dt$$

Posons : $\forall n \in \mathbb{N} : \begin{array}{ccc} f_n & : &]0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & t \longmapsto \frac{(\ln(\sin(t)))^n x^n}{n!} \end{array}$

• On a vu en Q14) que $t \mapsto (\ln(\sin(t)))^n$ était intégrable sur $]0, \frac{\pi}{2}]$, on en déduit donc que f_n est CPM et intégrable sur $]0, \frac{\pi}{2}]$

• Par construction on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge simplement sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ vers $t \mapsto (\sin(t))^x$ qui est continue par morceaux sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.

• $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f_n(x)| dx \\ &= \frac{|x|^n}{n!} \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ln(\sin(t)))^n dt \right| \text{ car } t \mapsto (\ln(\sin(t)))^n \text{ est de signe constant sur }]0, \frac{\pi}{2}] \quad (\text{signe de } (-1)^n) \\ &= \frac{|x|^n}{n!} |D_n| \sim |x|^n \text{ puisque } D_n \sim n! \text{ d'après Q18)} \end{aligned}$$

Comme $|x| < 1$ alors $\sum |x|^n$ est convergente, donc par équivalent : $\sum \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f_n(x)| dx$ est convergente.

• On a bien vérifiée toutes les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme et on en déduit :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x) dx \Rightarrow f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^x dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D_n}{n!} x^n$$

• On en déduit que : f est développable en série entière sur $] -1, 1[$

Q20) • Pour $x \in \mathbb{R}$ on distingue 2 cas :

cas 1 : $\cos(x) = 0 \Rightarrow \sin^2(x) = 1 \Rightarrow a^2 \cos^2(x) + b^2 \sin^2(x) = b^2 > 0$

cas 2 : $\cos(x) \neq 0 \Rightarrow \cos^2(x) > 0 \Rightarrow a^2 \cos^2(x) > 0 \Rightarrow a^2 \cos^2(x) + b^2 \sin^2(x) > 0$

Dans tout les cas $a^2 \cos^2(x) + b^2 \sin^2(x) > 0$ et donc Ψ est bien C^1 sur $\mathbb{R}$

• Alors, pour $x \in \mathbb{R}$, $\Psi'(x) = \frac{a^2(-2\sin(x)\cos(x)) + b^2 2\cos(x)\sin(x)}{a^2 \cos^2(x) + b^2 \sin^2(x)} = \frac{(b^2 - a^2)\sin(2x)}{a^2 + (b^2 - a^2)\sin^2(x)}$

• D'autre part :

$\rho = \frac{b-a}{b+a} \Rightarrow |\rho| \leq \frac{|a|+|b|}{a+b} = \frac{a+b}{a+b} = 1$ par inégalité triangulaire et puisque $a > 0$ et $b > 0$.

De plus $|\rho| = 1 \Rightarrow b - a = a + b$ ou $a - b = a + b \Rightarrow b = 0$ ou $a = 0$ ce qui est impossible

Donc $|\rho| < 1$

$$\begin{aligned}
\text{Alors : } & 4 \sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k \sin(2kx) \\
&= 4 \sum_{k=0}^{+\infty} \rho^k \operatorname{Im}(e^{2ikx}) \text{ puisque le terme pour } k=0 \text{ est nul} \\
&= 4 \operatorname{Im} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (\rho e^{2ix})^k \right) \text{ série géométrique de raison } \rho e^{2ix} \text{ avec } |\rho e^{2ix}| \leq |\rho| < 1 \\
&= 4 \operatorname{Im} \left(\frac{1}{1 - \rho e^{2ix}} \right) \\
&= 4 \operatorname{Im} \left(\frac{1}{1 - \rho \cos(2x) - i \rho \sin(2x)} \right) \\
&= 4 \operatorname{Im} \left(\frac{1 - 2\rho \cos(2x) + i \rho \sin(2x)}{1 - 2\rho \cos(2x) + \rho^2 \cos^2(2x) + \rho^2 \sin^2(2x)} \right) \\
&= 4 \frac{\rho \sin(2x)}{1 - 2\rho \cos(2x) + \rho^2} \\
&= 4 \frac{b-a}{b+a} \frac{\sin(2x)}{1 - 2 \frac{b-a}{b+a} \cos(2x) + \frac{(b-a)^2}{(b+a)^2}} \\
&= 4(b^2 - a^2) \frac{\sin(2x)}{(a+b)^2 - 2(b-a)(b+a)(1 - 2\sin^2(x)) + (b-a)^2} \\
&= \frac{4(b^2 - a^2) \sin(2x)}{a^2 + b^2 + 2ab - 2(b^2 - a^2) + b^2 + a^2 - 2ab + 4(b^2 - a^2) \sin^2(x)} \\
&= \frac{4(b^2 - a^2) \sin(2x)}{4a^2 + 4(b^2 - a^2) \sin^2(x)} \\
&= \frac{(b^2 - a^2) \sin(2x)}{a^2 + (b^2 - a^2) \sin^2(x)} = \Psi'(x)
\end{aligned}$$

On a donc : Ψ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\Psi'(x) = 4 \sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k \sin(2kx)$

Q21) • On fixe $x \in \mathbb{R}$. On pose : $\forall k \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
h_k &: [0, x] \longrightarrow \mathbb{R} \\
t &\longmapsto 4\rho^k \sin(2kx) \quad \text{avec la convention que : } [0, x] = [-x, 0] \text{ si } x < 0
\end{aligned}$$

$$\text{On a alors : } \|h_k\|_{\infty} = \sup_{t \in [0, x]} |h_k(t)| \leq 4|\rho|^k$$

Puisque l'on a vu que $|\rho| < 1$, alors $\sum |\rho|^k$ est convergente et, par comparaison, $\sum \|h_k\|_{\infty}$ est convergente et donc $\sum h_k$ converge normalement (et donc uniformément) sur $[0, x]$

Les h_k sont continues sur $[0, x]$ et $\sum h_k$ converge uniformément sur $[0, x]$ qui est segment.

On peut donc appliquer le théorème d'intégration d'une série de fonctions sur un segment et on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^x \sum_{k=1}^{+\infty} h_k(t) dt &= \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^x h_k(t) dt \Rightarrow \int_0^x \Psi'(t) dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^x 4\rho^k \sin(2kt) dt \\
&\Rightarrow \Psi(x) - \Psi(0) = \sum_{k=1}^{+\infty} 4\rho^k \frac{1 - \cos(2kx)}{2k} \\
&\Rightarrow \Psi(x) - \ln(a^2) = 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\rho^k}{k} - 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \rho^k \frac{\cos(2kx)}{k} \\
&\Rightarrow \Psi(x) - \ln(a^2) = 2(-\ln(1 - \rho)) - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k \frac{\cos(2kx)}{k} \\
&\Rightarrow \Psi(x) = 2\ln(a) - 2\ln(1 - \rho) - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(2kx)}{k} \rho^k \\
&\Rightarrow \Psi(x) = 2\ln\left(\frac{a}{1 - \frac{b-a}{b+a}}\right) - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(2kx)}{k} \rho^k \Rightarrow \Psi(x) = 2\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(2kx)}{k} \rho^k
\end{aligned}$$

• On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\Psi(x) = 2\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(2kx)}{k} \rho^k$

$$\text{Q22) a) } \cos(2nx)\cos(2kx) = \frac{1}{2} \left(\cos\left(\frac{2nx+2kx}{2}\right) + \cos\left(\frac{2nx-2kx}{2}\right) \right) = \frac{1}{2} \left(\cos((n+k)x) + \cos((n-k)x) \right)$$

Mais $\int_0^\pi \cos(Kx)dx = 0$ si $K \in \mathbb{N}^*$ et $\int_0^\pi \cos(Kx)dx = \pi$ si $K = 0$ donc, comme $n+k \geq 1+1 \geq 2 > 0$ et

$$n+k \neq 0 \text{ on a : } \boxed{\forall (k, n) \in (\mathbb{N}^*)^2, \int_0^\pi \cos(2nx)\cos(2kx)dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq k \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } n = k \end{cases}}$$

$$\text{Q22) b) } \bullet \text{ On remarque que : } \Psi^2(x) = 2\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\Psi(x) - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \Psi(x) \frac{\cos(2kx)}{k} \rho^k$$

$\bullet \Psi$ est de classe C^1 donc continue sur $[0, \pi]$ et donc bornée sur $[0, \pi]$ (segment).

Donc $\exists M > 0$, $\forall x \in [0, \pi]$, $|\psi(x)| \leq M$ et on a alors : $\left| \Psi(x) \frac{\cos(2kx)}{k} \rho^k \right| \leq \frac{M\rho^k}{k}$

Comme $\sum \frac{M\rho^k}{k}$ est convergente (cours $-\ln(1-)$ et $|\rho| < 1$),

on en déduit que $\sum_{k=0}^{+\infty} \Psi(x) \frac{\cos(2kx)}{k} \rho^k$ converge uniformément sur $[0, \pi]$

Comme ce sont des fonctions continues on peut, comme en Q14), intervertir $\sum$ et $\int$.

$$\text{On en déduit : } \int_0^\pi \sum_{k=1}^{+\infty} \Psi(x) \frac{\cos(2kx)}{k} \rho^k dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^\pi \Psi(x) \frac{\cos(2kx)}{k} \rho^k dx \Leftrightarrow (22)$$

$\bullet$ On réutilise la même méthode et Q21) pour avoir :

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \Psi(x) \frac{\cos(2kx)}{k} \rho^k dx \\ &= \underbrace{\int_0^\pi 2\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \frac{\cos(2kx)}{k} \rho^k dx}_{=0} - 2 \int_0^\pi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{k} \left(\rho^k \frac{\cos(2kx)}{k} \rho^k \right) dx \\ &= 0 - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \rho^{2k} \int_0^\pi \frac{\cos(2nx)\cos(2kx)}{k^2} dx \text{ mais par le a) } \int_0^\pi \cos(2nx)\cos(2kx)dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq k \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } n = k \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \int_0^\pi \Psi(x) \frac{\cos(2kx)}{k} \rho^k dx = -\pi \frac{(\rho^2)^k}{k^2}$$

$$\bullet \text{ En reportant en (22) : } \int_0^\pi \sum_{k=1}^{+\infty} \Psi(x) \frac{\cos(2kx)}{k} \rho^k dx = \sum_{k=1}^{+\infty} -\pi \frac{(\rho^2)^k}{k^2} = -\pi \sigma(\rho^2)$$

$$\bullet \int_0^\pi \Psi(x) dx \text{ en utilisant Q21}$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^\pi \left(2\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(2kx)}{k} \rho^k \right) dx \text{ interversion justifiée comme ci-dessus} \\ &= \int_0^\pi 2\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) dx - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^\pi \underbrace{\frac{\cos(2kx)}{k}}_0 dx \rho^k = \pi 2\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\bullet \text{ A partir de } \Psi^2(x) = 2\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\Psi(x) - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \Psi(x) \frac{\cos(2kx)}{k} \rho^k$$

$$\text{on a : } \int_0^\pi \Psi^2(x) dx = 2\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_0^\pi \Psi(x) dx - 2 \int_0^\pi \sum_{k=1}^{+\infty} \Psi(x) \frac{\cos(2kx)}{k} \rho^k dx$$

$$\text{Avec les résultats précédents : } \int_0^\pi \Psi^2(x) dx = 2\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \pi 2\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) - 2(-\pi \sigma(\rho^2))$$

$$\text{On a donc : } \boxed{\int_0^\pi \Psi^2(x) dx = 4\pi \left(\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \right)^2 \pi 2\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) + 2\pi \sigma(\rho^2)}$$

Q23) a) Soit $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$ donc $\sin(t) > 0$. Alors :

$$\Psi_n(t) = \ln\left(\frac{\cos^2(x)}{(n+1)^2} + \frac{n^2 \sin^2(x)}{(n+1)^2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(\sin^2(x)) = 2\ln(\sin(t))$$

Donc (Ψ_n) converge simplement sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ vers $t \mapsto 2\ln(\sin(t))$

$$\text{Q23) b) } \bullet 0 < a_n^2 \cos^2(t) + b_n^2 \sin^2(t) \leq a_n^2 + b_n^2 \leq \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{1+n^2}{(1+n)^2} \leq \frac{1+2n+n^2}{1+2n+n^2} = 1$$

$$\text{Donc } \ln(a_n^2 \cos^2(t) + b_n^2 \sin^2(t)) \leq 0$$

$$\text{Donc } |\Psi_n(t)| = -\ln(a_n^2 \cos^2(t) + b_n^2 \sin^2(t))$$

$$\bullet b_n = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1 + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\leq 1}} \geq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow b_n^2 \sin^2(t) \geq \frac{1}{4} \sin^2(t)$$

$$\Rightarrow a_n^2 \cos^2(t) + b_n^2 \sin^2(t) \geq \frac{1}{4} \sin^2(t)$$

$$\Rightarrow -\ln(a_n^2 \cos^2(t) + b_n^2 \sin^2(t)) \leq \ln(4) - 2\ln(\sin(t)) \text{ car } u \mapsto -\ln(u) \text{ est décroissante.}$$

$$\text{On a donc : } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in]0, \frac{\pi}{2}], |\Psi_n(t)| \leq \ln(4) - 2\ln(\sin(t))}$$

$$\text{Q24) On a : } \begin{cases} t \mapsto \Psi_n(t)^2 \text{ est continue par morceaux sur }]0, \frac{\pi}{2}] \\ (\Psi_n^2) \text{ converge simplement vers } t \mapsto 4(\ln(\sin(t)))^2 \text{ sur }]0, \frac{\pi}{2}] \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in]0, \frac{\pi}{2}], |\Psi_n(t)| \leq (\ln(4) - (\ln(4) - 2\ln(\sin(t)))^2 2\ln(\sin(t)))^2 \\ \text{avec } t \mapsto (\ln(4) - 2\ln(\sin(t)))^2 \text{ qui est intégrable sur }]0, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\Psi_n(t))^2 dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim_{n \rightarrow +\infty} (\Psi_n(t))^2 dt \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\Psi_n(t))^2 dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4(\ln(\sin(t)))^2 dt$$

$$\text{On remarque que comme } \psi(\pi - t) = \psi(t) \text{ alors : } \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\Psi_n(t))^2 dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (\Psi_n(t))^2 dt$$

$$\text{Alors avec Q22) : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2\pi \left(\ln\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \right)^2 + \pi \sigma\left(\frac{b_n-a_n}{a_n+b_n}\right) \right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4(\ln(\sin(t)))^2 dt$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2\pi \left(\ln\left(\frac{1+n}{2(1+n)}\right) \right)^2 + \pi \sigma\left(\frac{n-1}{n+1}\right) \right) = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ln(\sin(t)))^2 dt$$

$$\Rightarrow 2\pi \left(\ln\left(\frac{1}{2}\right) \right)^2 + \pi \sigma(1) = 4D_2 \text{ ou on a utilisé la continuité de } \sigma \text{ en } 1$$

$$\Rightarrow 4D_2 = 2\pi (\ln(2))^2 + \frac{\pi^3}{6} \text{ car } \sigma(1) = \frac{\pi^2}{6} \text{ par Q6)}$$

$$\Rightarrow D_2 = \frac{\pi^3}{24} + \frac{1}{2} \pi (\ln(2))^2$$

$$\bullet \text{ Comme on a vu que } f''(0) = D_2 \text{ alors : } \boxed{f''(0) = \frac{\pi^3}{24} + \frac{\pi (\ln(2))^2}{2}}$$