

Feuille d'exercices n°56 : chap. 19

Exercice 454. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que X est bornée.

Montrer que X admet une espérance finie.

Exercice 455. Un joueur tire sur une cible de 10cm de rayon, constituée de couronnes concentriques, délimitées par des cercles de rayons $1, 2, \dots, 10$ cm, et numérotées respectivement de 10 (au centre) à 1 (extérieur). La probabilité d'atteindre la couronne k est proportionnelle à l'aire de cette couronne, et on suppose que le joueur atteint sa cible à chaque lancer.

Soit X la variable aléatoire qui à chaque lancer associe le numéro de la cible.

a) Calculer l'aire de la couronne $k \in \llbracket 1; 10 \rrbracket$ en fonction de k .

b) Quelle est la loi de probabilité de X ?

c) Le joueur gagne k euros s'il atteint la couronne numérotée k pour $k \in \llbracket 6; 10 \rrbracket$, tandis qu'il perd 2 euros s'il atteint l'une des couronnes périphériques numérotées de 1 à 5.

Le jeu est-il favorable au joueur ?

Exercice 456. On lance deux fois de suite un dé équilibré à $n \geq 2$ faces et on appelle X la variable aléatoire correspondant au maximum des deux lancers.

a) Déterminer la loi de probabilité de X .

b) Déterminer $E(X)$

Exercice 457. Soit $X \hookrightarrow G(\frac{1}{4})$.

Calculer les probabilités $P(X \text{ est pair})$, $P(X \text{ est impair})$ et $P(X \geq k)$ pour $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 458. On joue à pile ou face avec une pièce non équilibrée. A chaque lancer, la probabilité d'obtenir pile est de $\frac{2}{3}$. Les lancers sont supposés indépendants, et on note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir, pour la première fois, deux piles consécutifs. Pour $n \geq 1$, on note u_n la probabilité $P(X = n)$.

On notera P_k l'événement obtenir pile au k -ième lancers et $F_k = \overline{P_k}$

a) Expliciter les événements $(X = 2)$, $(X = 3)$, $(X = 4)$, et déterminer les valeurs de u_2 , u_3 et u_4 .

b) Montrer que l'on a $\forall n \geq 4 \quad u_n = \frac{2}{9}u_{n-2} + \frac{1}{3}u_{n-1}$

c) En déduire l'expression de u_n pour tout $n \geq 2$

d) Calculer $E(X)$.

Exercice 459. (★) (Fonction de répartition)

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs réelles. On pose $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = P(X \leq x)$

F est appelée **fonction de répartition de F**

Montrer que :

$$\left\{ \begin{array}{l} F \text{ est croissante} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1 \\ \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b, P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) \end{array} \right.$$