

Feuille d'exercices n°57 : chap. 19

Exercice 460. Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs réelles telle X^2 et Y^2 admettent une espérance finie.

Montrer alors que : XY est d'espérance finie et $|E(XY)| \leq \sqrt{E(X^2)}\sqrt{E(Y^2)}$

Exercice 461. On effectue des lancers successifs d'une pièce de monnaie telle que la probabilité d'obtenir face est de $p \in]0; 1[$.

On note X la variable aléatoire correspondant à la longueur de la première série de lancers identiques et Y la variable aléatoire correspondant à la longueur de la deuxième série de lancers identiques.

Par exemple pour la suite de lancers $FFPPPFPPFPFFPP...$ on a $X = 2$ et $Y = 3$, ou encore pour la suite de lancers $PFFPPPFPPFPFFPP...$ on a $X = 1$ et $Y = 2$.

- a) Déterminer la loi de probabilité de X .
- b) Calculer $E(X)$.
- c) Déterminer la loi de probabilité de Y .
- d) Calculer $E(Y)$.
- e) Pour quelles valeurs de p a-t-on : $E(X) = E(Y)$?

Exercice 462. Soit N et n deux entiers naturels tels que : $0 < n < N$.

Un joueur prélève n boules simultanément dans une urne contenant N boules numérotées de 1 à N . On considère la variable aléatoire réelle X égale au plus grand numéro des n boules prélevées.

- a) Déterminer la loi de X .
- b) Montrer que : $\forall (k, n) \in \mathbb{N}^2 / n \leq k \quad k \binom{k-1}{n-1} = n \binom{k}{n}$ et calculer l'espérance de X .

Exercice 463. Le facteur distribue 4 lettres au hasard (de manière équiprobable) à 4 destinataires différents recevant chacun une et une seule lettre.

On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de destinataire ayant reçu la bonne lettre. Déterminer la loi de X et le nombre moyen de destinataires recevant la bonne lettre.

Exercice 464. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n . On les extrait successivement sans remise. On dit qu'il y a rencontre au i -ième tirage si la boule tirée porte le numéro i .

Déterminer le nombre moyen de rencontre.

Exercice 465. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifiant :

$$\exists a > 0, \forall n \in \mathbb{N}, P(X = n + 1) = \frac{a}{n+1} P(X = n) \quad \text{Reconnaitre } X.$$

Exercice 466. On suppose que dans un pays donné, tous les couples enfantent jusqu'à obtenir un garçon. Le but de cet exercice est de trouver la proportion ρ de garçons dans la population (en supposant que garçon et fille sont équiprobable à la naissance).

- 1) Soit X le nombre d'enfants dans un couple. Donner la loi de la variable aléatoire X .
- 2) Calculer ρ en fonction de X , puis $E(\rho)$.

Exercice 467. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi géométrique de paramètre $p \in]0; 1[$.

Quelle est la probabilité que $A = \begin{pmatrix} X_1 & 1 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}$ soit diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$?