

Feuille d'exercices n°58 : chap. 19

Exercice 468. Soit Y une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$. On dit que Y est **sans mémoire** si, pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, $P(Y > n) > 0$ et $P_{(Y > n)}(Y > n + m) = P(Y > m)$.

a) On suppose que Y suit une loi géométrique. Démontrer que Y est sans mémoire.

Interpréter ce résultat en considérant une suite d'épreuves répétées.

b) Réciproquement, on suppose que Y est sans mémoire. Démontrer que $P(Y > 0) = 1$ et qu'il existe $p \in]0; 1[$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $P(Y > n) = (1 - p)^n$

En déduire que Y suit une loi géométrique.

Exercice 469. On dispose d'une urne contenant N boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à N . On effectue, à partir de cette urne, n tirages successifs d'une boule, avec remise, et on note X le plus grand nombre obtenu.

a) Que vaut $P(X \leq k)$? En déduire la loi de X .

b) A l'aide des questions précédentes, donner la valeur de $E(X)$.

c) Démontrer que la suite $\frac{1}{N} \sum_{k=0}^N \left(\frac{k}{N}\right)^n$ admet une limite lorsque $N \rightarrow +\infty$ que l'on déterminera.

2°) d) Déterminer $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{E(X)}{N}$

Exercice 470. On jette 3600 fois un dé équilibré. Minorer la probabilité que le nombre d'apparitions du numéro 1 soit compris entre 480 et 720.

Exercice 471. Une usine fabrique des pièces dont une proportion inconnue p est défectueuse, et on souhaite trouver une valeur approchée de p . On effectue un prélèvement de n pièces. On suppose que le prélèvement se fait sur une population très grande, et donc qu'il peut s'apparenter à une suite de n tirages indépendants avec remise. On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses et on souhaite quantifier le fait que $\frac{X_n}{n}$ approche p .

a) Quelle est la loi de X_n ? Sa moyenne ? Sa variance ?

b) Démontrer que, pour tout $\epsilon > 0$, $P(|\frac{X_n}{n} - p| \geq \epsilon) \leq \frac{1}{4n\epsilon^2}$

c) En déduire une condition sur n pour que $\frac{X_n}{n}$ soit une valeur approchée de p à 10^{-2} près avec une probabilité supérieure ou égale à 95%.

Exercice 472. Une compagnie aérienne pratique le surbooking : elle vend plus de billets que ses avions peuvent contenir de passagers. Par exemple elle vend 390 billets pour un avion de 380 places.

On estime qu'un passager, indépendamment des autres, a une probabilité de 0,95 de se présenter à l'embarquement.

On cherche à calculer la probabilité qu'au moins un passager ne puisse pas embarquer.

On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de passagers présent à l'embarquement.

a) Déterminer la loi suivie par X et en déduire son espérance et sa variance.

b) Montrer que : $P(X \geq 381) \leq P(|X - E(X)| \geq 10, 5)$

c) Donner une majoration de $P(X \geq 381)$ avec l'inégalité de Tchebychev.

d) A la calculatrice donner une valeur approchée de $P(X \geq 381)$. Comparer c) et d).