

Feuille d'exercices n°59 : chap. 19

Exercice 473. Lors d'une compétition de saut en hauteur un athlète tente de franchir des barres successives numérotées $1, 2, \dots, n, \dots$. Il n'a droit qu'à un essai par barre. On suppose que les sauts sont indépendants et que la probabilité de la réussite du n -ième saut vaut $r_n = \frac{1}{n}$.

a) On note X la variable aléatoire égale au numéro du dernier saut réussi.

Déterminer la loi de X .

b) Déterminer la fonction génératrice de X .

c) Montrer que $E(X)$ et $V(X)$ existent et les calculer.

Exercice 474. Pour fidéliser ses clients une entreprise décide de joindre à ses produits des cartes à collectionner de n type différent.

Il y a une carte jointe à chaque produit. On considère que les cartes jointes à chaque produit suivent des lois uniformes (sur l'ensemble des n possibles) indépendantes.

On note N la variable aléatoire représentant le nombre de produits à acheter pour avoir les n cartes (youpi collec complète!).

L'objectif de l'exercice est de déterminer l'espérance de N .

Pour cela on introduit, pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, N_i le nombre d'achat à effectuer pour avoir i cartes différentes.

1°) Déterminer N_1 et $E(N_1)$.

2°) Pour $i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, quelle est la loi de $N_{i+1} - N_i$? En déduire $E(N_{i+1} - N_i)$.

3°) Déterminer $E(N)$.

4°) Donner un équivalent, pour n au voisinage de $+\infty$, de $E(N)$. (On admettra que : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln(n)$)

Exercice 475. Une urne contient trois boules numérotées de 1 à 3. On en tire deux et l'on note X le premier numéro tiré, Y le second.

a) Déterminer la loi conjointe et les lois marginales dans le cas d'un tirage avec remise.

b) Déterminer la loi conjointe et les lois marginales dans le cas d'un tirage sans remise.

c) Que peut-on en conclure?

Exercice 476. Soit (Ω, P) un espace probabilisé. Soit X et Y deux variables aléatoires sur Ω telles que :

$X(\Omega) = \{-1; 1\}$, $Y(\Omega) = \{-1; 0; 1\}$ et $\forall (i, j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ $P(\{(X, Y) = (i, j)\}) = \frac{1}{8}$ sauf $P(\{(X, Y) = (1, 0)\}) = \frac{3}{8}$

Déterminer les lois de X et Y . Calculer la covariance de X et Y . X et Y sont-elles indépendantes?

Exercice 477. Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soient A et B deux événements.

Montrer que A et B sont indépendants si et seulement si les variables aléatoires réelles 1_A et 1_B sont indépendantes.

Exercice 478. Considérons un couple de variables aléatoires (X, Y) qui suit une loi uniforme sur $\{(0; 1); (0; -1); (1; 0); (-1; 0)\}$.

a) Calculer la covariance de (X, Y)

b) X et Y sont-elles des variables aléatoires indépendantes?