

Feuille d'exercices n°60 : chap. 19

Exercice 479. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de loi conjointe donnée par $\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ $P(X = i \cap Y = j) = \lambda ij$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

- a) Déterminer la valeur de λ
- b) Déterminer les lois marginales de X et de Y . Calculer leurs espérances.
- c) Les variables X et Y sont-elles des variables aléatoires indépendantes ?
- d) Donner la valeur de $\text{cov}(X, Y)$ et en déduire $E(XY)$.

Exercice 480. On considère une urne contenant $n \geq 2$ boules numérotées de 1 à n . On tire une boule, on note X son numéro et on remet la boule dans l'urne. Ensuite on retire toutes les boules dont le numéro est strictement plus grand que X . On tire alors une nouvelle boule dont le numéro est noté Y . Déterminer la loi conjointe et les lois marginales de (X, Y) .

Exercice 481. Un exemple avec X et Y deux variables aléatoires à valeur dans $\mathbb{N}$
On suppose que $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2$, $P(X = i, Y = j) = \frac{\lambda}{i!j!}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

- a) Déterminer la valeur de λ .
- b) Déterminer la loi de X et la loi de Y .
- c) X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 482. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètre respectif λ et μ .

Démontrer que $Z = X + Y$, suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

Exercice 483. Une secrétaire effectue n appels téléphoniques vers n personnes distinctes ($n \geq 2$). Pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est $p \in]0; 1[$. On note X la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus.

- a) Quelle est la loi de X ? Donner $E(X)$ et $V(X)$.
Après ses n recherches, la secrétaire demande une deuxième fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n - k$ correspondants qu'elle n'a pas réussi à joindre la première fois. Soit Y le nombre de correspondants obtenus dans la deuxième série d'appels et $Z = X + Y$, le nombre total de correspondants obtenus.
- b) Déterminer la loi de Y sachant $(X = k)$, pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$.
- c) En déduire la loi conjointe de (X, Y) .
- d) Montrer que Z suit une loi binomiale que l'on précisera.

Exercice 484. Une urne contient n jetons ($n \geq 2$). On tire une poignée de jetons (c'est-à-dire une partie de l'ensemble des jetons). On note N le nombre de jetons tirés, et S la somme des numéros des jetons tirés. Enfin, pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on note X_i la variable de Bernoulli qui vaut 1 si le i -ième jeton est tiré et 0 sinon. On suppose que toutes les poignées sont équiprobables.

- 1) Déterminer la loi de N , son espérance et sa variance.
- 2) Déterminer la loi de X_i . Montrer que les variables X_i sont 2 à 2 indépendantes.
- 3) Exprimer S en fonction des X_i . Calculer $E(S)$ et $V(S)$.