

Feuille d'exercices n°61 : chap. 19

Exercice 485. (★) (Conditionnement d'une loi binomiale par une loi géométrique)

Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soit $p \in]0, 1[$. On se donne une variable aléatoire $N : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ suivant la loi géométrique de paramètre p .

On définit maintenant une variable aléatoire $X : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ de la manière suivante :

- on fixe $\omega \in \Omega$;
- on pose $n = N(\omega)$;
- on lance n fois une pièce de monnaie équilibrée;
- on note $X(\omega)$ le nombre de pile obtenus.

a) Soit $n_0 \in \mathbb{N}^*$. Reconnaître la loi conditionnelle de X sachant $(N = n_0)$.

b) Soit $k \in \mathbb{N}$.

(i) Pour x réel et sous réserve d'existence on pose $f(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n$

Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.

Calculer $f(x)$ pour x dans l'intervalle ouvert de convergence.

(ii) Montrer que $\forall k \geq 1$, $P(X = k) = \frac{p}{1-p} \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{1-p}{2}\right)^n$

c) Déterminer la loi de X .

Exercice 486. On donne $p \in]0, \frac{1}{2}[$ et $q = 1 - p$

X et Y sont deux variables aléatoires réelles indépendantes telles que $X \hookrightarrow G(p)$ et $Y \hookrightarrow G(q)$.

On pose $Z = X + Y$

a) Montrer que: $\forall t \in [-1, 1]$, $\frac{t^2}{(1-pt)(1-qt)} = \frac{t^2}{q-p} \left(\frac{q}{1-qt} - \frac{p}{1-pt} \right) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{q^{k-1} - p^{k-1}}{q-p} t^k$

b) Trouver les fonctions génératrices de X , Y et Z .

c) En déduire la loi de Z .

Exercice 487. Une urne contient des boules de $N \geq 2$ types différents (des bleus, des vertes, des roses à rayures vertes, etc ...).

Chaque boule de type $i \in \llbracket 1; N \rrbracket$ se trouve dans l'urne en proportion $p_i \in]0; 1[$.

On a donc $\sum_{i=1}^N p_i = 1$

Soit $n \geq 2$. On tire, avec remise, n boules et on note X_i le nombre de boules de type i ainsi tirées.

a) Déterminer la loi de X_i , son espérance et sa variance.

Soit $(i, j) \in \llbracket 1; N \rrbracket$ tel que $i \neq j$.

b) Déterminer la loi de $Y_{ij} = X_i + X_j$

c) X_i et X_j sont-elles indépendantes ?

d) Montrer que $\text{cov}(X_i, X_j) = -np_i p_j$

Exercice 488. Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes suivant toutes la même loi de Poisson de paramètre λ . On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $Z_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{X_1 + \dots + X_n}$.

a) Trouver une constante C telle que $V(Z_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{C}{n}$.

b) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer que : $P\left(|Z_n - e^{-\lambda}| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.