

Chapitre 20 : Variables aléatoires partie 2 : espérance, variance, fonction génératrice, inégalités probabilistes

1 Espérance d'une variable aléatoire discrète réelle ou complexe

1.1 Définition pour une variable à valeurs dans $[0; +\infty]$

Définition. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X est une variable aléatoire discrète de Ω dans $[0; +\infty]$. Alors on pose : $\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}(X = x)$

Si $\mathbb{E}(X) < +\infty$ on dit que X est d'espérance finie.

Remarques. Convention, si $[x = +\infty \text{ et } \mathbb{P}(X = +\infty) = 0]$ alors on convient que : $x \mathbb{P}(X = x) = 0$
 Si la famille $(x \mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable on a : $\mathbb{E}(X) \in [0; +\infty[$.
 Si $X(\Omega)$ est fini et si $\mathbb{P}(X = +\infty) = 0$ alors $\mathbb{E}(X)$ est finie.

1.2 Généralisation

1.2.1 Définition

Définition. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X est une variable aléatoire discrète de Ω dans $\mathbb{C}$. Si $|X|$ est d'espérance finie on dit que X est d'espérance finie et on pose : $\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}(X = x)$

$\mathbb{E}(X)$ est appelée **espérance de X**

Remarques. C'est la somme d'une famille sommable.

L'espérance de X est la valeur moyenne des valeurs prises par X pondérées par la probabilité que X prenne cette valeur.

C'est la valeur moyenne attendu lors de l'expérience.

Pour un jeu l'espérance est le gain moyen.

L'espérance d'une variable aléatoire ne dépend que de sa loi.

1.2.2 Cas $X(\Omega)$ est fini

Si $X(\Omega)$ est fini dans $\mathbb{C}$, X est d'espérance finie et $\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}(X = x) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\})$

preuve :

1.2.3 Cas $X(\Omega)$ est dénombrable

Si $X(\Omega)$ est dénombrable dans $\mathbb{C}$, on note $X(\Omega) = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Alors : X est dite d'espérance finie

si et seulement si la série $\sum x_n \mathbb{P}(X = x_n)$ est absolument convergente

On a alors : $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \mathbb{P}(X = x_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \mathbb{P}(X = x_n)$

On admet que $\mathbb{E}(X)$ ne dépend pas de l'ordre d'énumération des x_n .

1.3 Exemples

1.3.1 Exemple 0 : loi certaine

1.3.2 Exemple 1 : loi liée à un événement

1.3.3 Exemple 2 : $X \hookrightarrow \mathcal{U}([1; n])$

1.3.4 Exemple 3 : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$

1.3.5 Exemple 4 : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$

1.3.6 Exemple 5 : $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$

1.3.7 Exemple 6 : $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$

1.4 Propriétés

1.4.1 Théorème du transfert

Théorème . Soit X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et f une fonction à valeurs complexes définies sur $X(\Omega)$.

Alors $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si $(f(x)\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est *sommable*.

Dans ce cas on a : $\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)}^{+\infty} f(x)\mathbb{P}(X = x)$

Remarques. Si $X(\Omega)$ est fini alors $(f(x)\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable.

Si $X(\Omega) = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dénombrable alors :

$(f(x)\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable si et seulement si $\sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n)\mathbb{P}(X = x_n)$ est absolument convergente.

preuve : H-P

1.4.2 Linéarité, croissance, positivité

Théorème . i) Si X est une variable aléatoire discrète admettant une espérance, à valeurs positives alors $\mathbb{E}(X) \geq 0$

ii) Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes admettant une espérance et si $\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2$ alors : $\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$

iii) Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes à valeurs positives admettant une espérance et si $X \leq Y$ (autrement dit : $\forall \omega \in \Omega, X(\omega) \leq Y(\omega)$) alors $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$

preuve : linéarité admise

1.4.3 Théorème

Théorème . Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ pour X et $\mathbb{R}^+$ pour Y , alors :

Si $|X| \leq Y$ et si $\mathbb{E}(Y) < +\infty$ alors X est d'espérance finie.

preuve :

1.5 Autres théorèmes

1.5.1 Nullité

Théorème . Soit X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

Alors $\begin{cases} X \geq 0 \\ \mathbb{E}(X) = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathbb{P}(X = 0) = 1$

preuve :

1.5.2 Cas où $X(\Omega) = \mathbb{N}$

Théorème . Soit X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$

Alors
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq n)$$

Remarques. On a alors : X est d'espérance finie si et seulement si $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq n)$ est convergente.

Si $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq n)$ est divergente on a : $\mathbb{E}(X) = +\infty$

Attention, bien commencer à $n = 1$ et pas à $n = 0$

preuve :

2 Variance et écart type d'une variable aléatoire discrète réelle

2.1 Lemme préliminaire

Lemme. Soit X une variable aléatoire discrète à valeur réelles.

Alors X^2 est d'espérance finie $\Rightarrow X$ est d'espérance finie.

preuve :

2.2 Variance

Définition. Soit X une variable aléatoire discrète à valeur réelles.

Si X^2 est d'espérance finie alors on pose : $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$.

$\mathbb{V}(X)$ est appelée **variance de X**

Remarque. On peut interpréter $\mathbb{V}(X)$ comme la moyenne des carrés des écarts de X avec sa moyenne. Autrement dit on mesure la dispersion de X autour de sa moyenne.

2.3 Propriétés

Propriétés. Soit X une variable aléatoire discrète à valeur réelles telle que X^2 ait une espérance finie.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Alors :
$$\begin{cases} \mathbb{V}(aX + b) = a^2 \mathbb{V}(X) \\ \mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \end{cases}$$

Remarque. En particulier : $\mathbb{V}(ax) = a^2 \mathbb{V}(X)$ et $\mathbb{V}(X + b) = \mathbb{V}(X)$.

preuve :

2.4 Ecart type

Définition. Soit X une variable aléatoire telle que X^2 ait une espérance finie. Alors on pose $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$
 $\sigma(X)$ est appelé **écart type de X** .

Remarque. $\sigma(X)$ s'interprète de la même manière que $\mathbb{V}(X)$, la racine permettant d'avoir la même **homogénéité** que X .

2.5 Cas particulier

Définitions. Soit X une variable aléatoire.

Alors si $\mathbb{E}(X) = 0$ on dit que X est **centrée**, si de plus $\sigma(X) = 1$ on dit que X est **centrée réduite**.

Lemme. La variable aléatoire $X - \mathbb{E}(X)$ est centrée.

La variable aléatoire $\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.

preuve :

2.6 Exemples

2.6.1 Exemple 0 : loi certaine

2.6.2 Exemple 1 : $X \hookrightarrow \mathcal{U}([1; n])$

2.6.3 Exemple 2 : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$

2.6.4 Exemple 3 : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$

2.6.5 Exemple 4 : $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$

2.6.6 Exemple 5 : $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$

3 Fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$

3.1 Définition

Définition. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Alors on appelle **fonction génératrice de X** la série entière d'une variable réelle : $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)t^n$

3.2 Premières propriétés

Propriétés. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Soit G_X sa fonction génératrice et R_X son rayon de convergence. Alors :

- $G_X(t) = \mathbb{E}(t^X)$
- $R_X \geq 1$
- G_X converge normalement sur $[-1; 1]$
- G_X est continue sur $[-1; 1]$ et C^∞ sur $] -R_X, R_X[$

preuve :

3.3 Exemples

3.3.1 Exemple 1 : $X \hookrightarrow \mathcal{U}([1; n])$

3.3.2 Exemple 2 : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$

3.3.3 Exemple 3 : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$

3.3.4 Exemple 4 : $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$

3.3.5 Exemple 5 : $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$

3.4 Fonction génératrice et loi

Théorème . Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ et G_X sa fonction génératrice.

Alors G_X est C^∞ sur $] -R_X; R_X[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$

preuve :

Remarque. On peut donc dire que :

La loi d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est caractérisée par sa fonction génératrice G_X

3.5 Fonction génératrice et espérance

Théorème . Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ et G_X sa fonction génératrice. Alors : X est d'espérance finie si et seulement si G_X est dérivable à gauche en 1

Dans ce cas $\mathbb{E}(X) = G'_X(1)$

preuve :

3.6 Fonction génératrice et variance

Théorème . Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ et G_X sa fonction génératrice.

Alors : X^2 est d'espérance finie si et seulement si G_X est deux fois dérivable à gauche en 1

Dans ce cas $G_X''(1) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - (G_X'(1))^2$

preuve :

4 Inégalités probabilistes

4.1 Inégalité de Markov

Théorème . Soit X une variable aléatoire discrète réelle positive admettant une espérance.

Alors : $\forall a > 0$, $\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$

preuve :

4.2 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Théorème . Soit X une variable aléatoire d'espérance finie et admettant une variance. Alors :

$$\forall \epsilon > 0 \text{ , } \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\epsilon^2}$$

Remarques. Comme $|X - \mathbb{E}(X)| < \epsilon$ est l'événement contraire de $|X - E(X)| \geq \epsilon$ alors :

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| < \epsilon) \geq 1 - \frac{\mathbb{V}(X)}{\epsilon^2}$$

Cette inégalité tend à montrer que X prend des valeurs proche de $\mathbb{E}(X)$ avec une forte probabilité (dotant plus que $\mathbb{V}(X)$ est petit).

Si ϵ est proche de 0, l'inégalité n'a aucun intérêt car $\frac{\mathbb{V}(X)}{\epsilon^2} > 1$.

On verra une application de cette inégalité avec la loi faible des grands nombres dans le prochain chapitre.

preuve :

Sommaire

1	Espérance d'une variable aléatoire discrète réelle ou complexe	1
1.1	Définition pour une variable à valeurs dans $[0; +\infty]$	1
1.2	Généralisation	1
1.2.1	Définition	1
1.2.2	Cas $X(\Omega)$ est fini	1
1.2.3	Cas $X(\Omega)$ est dénombrable	1
1.3	Exemples	2
1.3.1	Exemple 0 : loi certaine	2
1.3.2	Exemple 1 : loi liée à un événement	2
1.3.3	Exemple 2 : $X \hookrightarrow \mathcal{U}([1; n])$	2
1.3.4	Exemple 3 : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$	2
1.3.5	Exemple 4 : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$	2
1.3.6	Exemple 5 : $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$	2
1.3.7	Exemple 6 : $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$	2
1.4	Propriétés	2
1.4.1	Théorème du transfert	2
1.4.2	Linéarité, croissance, positivité	2
1.4.3	Théorème	2
1.5	Autres théorèmes	2
1.5.1	Nullité	2
1.5.2	Cas où $X(\Omega) = \mathbb{N}$	3
2	Variance et écart type d'une variable aléatoire discrète réelle	3
2.1	Lemme préliminaire	3
2.2	Variance	3
2.3	Propriétés	3
2.4	Ecart type	3
2.5	Cas particulier	3
2.6	Exemples	4
2.6.1	Exemple 0 : loi certaine	4
2.6.2	Exemple 1 : $X \hookrightarrow \mathcal{U}([1; n])$	4
2.6.3	Exemple 2 : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$	4
2.6.4	Exemple 3 : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$	4
2.6.5	Exemple 4 : $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$	4
2.6.6	Exemple 5 : $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$	4
3	Fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$	4
3.1	Définition	4
3.2	Premières propriétés	4
3.3	Exemples	4
3.3.1	Exemple 1 : $X \hookrightarrow \mathcal{U}([1; n])$	4
3.3.2	Exemple 2 : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$	4
3.3.3	Exemple 3 : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$	4
3.3.4	Exemple 4 : $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$	4
3.3.5	Exemple 5 : $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$	4
3.4	Fonction génératrice et loi	4
3.5	Fonction génératrice et espérance	4
3.6	Fonction génératrice et variance	5
4	Inégalités probabilistes	5
4.1	Inégalité de Markov	5
4.2	Inégalité de Bienaymé-Tchebychev	5

preuve du 1.5.2. : Propriété de l'espérance pour $X(\Omega) \subset \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$

- On commence par remarquer que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $(X \geq k) = (X \geq k+1) \cup (X = k)$

Comme les événements $(X \geq k+1)$ et $(X = k)$ sont incompatibles, alors, par σ additivité : $\mathbb{P}(\geq k) = \mathbb{P}(X \geq k+1) + \mathbb{P}(X = k)$ donc $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \geq k) - \mathbb{P}(X \geq k+1)$

- Alors pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=0}^n k\mathbb{P}(X = k) \\
 = & \sum_{k=1}^n k\mathbb{P}(X = k) \text{ puisque le terme est nul pour } k = 0 \\
 = & \sum_{k=1}^n k(\mathbb{P}(X \geq k) - \mathbb{P}(X \geq k+1)) \text{ avec la relation ci-dessus} \\
 = & \sum_{k=1}^n k\mathbb{P}(X \geq k) - \sum_{k=1}^n k\mathbb{P}(X \geq k+1) \text{ car somme finie} \\
 = & \sum_{p=1}^n p\mathbb{P}(X \geq p) - \sum_{p=2}^{n+1} (p-1)\mathbb{P}(X \geq p) \text{ changements d'indices } p = k \text{ dans la première et } p = k+1 \text{ dans la seconde} \\
 = & \mathbb{P}(X \geq 1) + \sum_{p=2}^n p\mathbb{P}(X \geq p) - \sum_{p=2}^n (p-1)\mathbb{P}(X \geq p) - n\mathbb{P}(X \geq n+1) \\
 = & \mathbb{P}(X \geq 1) + \sum_{p=2}^n (p\mathbb{P}(X \geq p) - (p-1)\mathbb{P}(X \geq p)) - n\mathbb{P}(X \geq n+1) \\
 = & \mathbb{P}(X \geq 1) + \sum_{p=2}^n \mathbb{P}(X \geq p) - n\mathbb{P}(X \geq n+1) \\
 = & \sum_{p=1}^n \mathbb{P}(X \geq p) - n\mathbb{P}(X \geq n+1)
 \end{aligned}$$

On a donc établi la formule : $(A) \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{p=1}^n \mathbb{P}(X \geq p) - n\mathbb{P}(X \geq n+1)$

- Si on suppose que X est d'espérance finie. Alors :

$$n\mathbb{P}(X \geq n+1) = n\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n+1}^{+\infty} X = k\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} n\mathbb{P}(X = k)$$

Comme $k \geq n+1 \geq n$ alors : $0 \leq n\mathbb{P}(X \geq n+1) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k)$

Mais $\sum_{k=n+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ puisque c'est le reste d'une série convergente, étant donné que X est d'espérance finie.

Par encadrement on en déduit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n\mathbb{P}(X \geq n+1) = 0$

Comme on a supposé que $\sum k\mathbb{P}(X = k)$ était convergente, alors avec (A) on a : $\sum k\mathbb{P}(X = k)$ est convergente et $\sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq k)$

Donc X est d'espérance finie et $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq n)$

- On suppose maintenant que : $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq n)$ converge.

Alors avec (A), comme $n\mathbb{P}(X \geq n+1) \geq 0$ on a : $\sum_{k=0}^n k\mathbb{P}(X = k) \leq \sum_{p=1}^n \mathbb{P}(X \geq p)$

Comme les séries sont à termes positifs, alors, la convergence admise implique celle de $\sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k)$ et donc X est d'espérance finie.

On a donc : $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq n)$ converge $\Rightarrow X$ est d'espérance finie.

Par contraposée : X n'est pas d'espérance finie $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq n)$ diverge et on a alors :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq k) = +\infty$$

• Dans tout les cas : $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq n)$

preuve du 2.1. :

On a pour $a \in \mathbb{R}$:
$$\begin{cases} 0 \leq (a-1)^2 = a^2 - 2a + 1 \\ 0 \leq (a+1)^2 = a^2 + 2a + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a \leq 1 + a^2 \\ -2a \leq 1 + a^2 \end{cases} \Rightarrow |a| \leq \frac{1+a^2}{2}$$

Comme X^2 a une espérance finie et 1 aussi, alors $\frac{1+X^2}{2}$ aussi. Et comme $|X| \leq \frac{1+X^2}{2}$, par comparaison $|X|$ a une espérance finie et donc X est d'espérance finie.

preuve du 4.1. : Inégalité de Markov

Soit $a > 0$ et X une variable aléatoire à valeurs positives admettant une espérance.

Définissons Y par $\forall \omega \in \Omega$, $Y(\omega) = \begin{cases} a & \text{si } X(\omega) \geq a \\ 0 & \text{si } X(\omega) < a \end{cases}$

Alors, par construction : $0 \leq Y \leq X$ et donc par croissance de l'espérance : $\mathbb{E}(Y) \leq \mathbb{E}(X)$

Mais $\mathbb{E}(Y) = a\mathbb{P}(X \geq a)$ donc $a\mathbb{P}(X \geq a) \leq \mathbb{E}(X)$ et donc $\boxed{\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}}$

preuve du 4.1. : Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

On a : $\left(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \epsilon \right) = \left(|X - \mathbb{E}(X)|^2 \geq \epsilon^2 \right)$

Donc $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \epsilon) = \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)|^2 \geq \epsilon^2)$

On applique Markov : $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(|X - \mathbb{E}(X)|^2)}{\epsilon^2} = \frac{V(X)}{\epsilon^2}$

On a donc : $\boxed{\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \leq \frac{V(X)}{\epsilon^2})}$

preuve du ??. :