

Devoir surveillé de Mathématiques n°7

La présentation, la qualité de la rédaction, la clarté des raisonnements, l'orthographe entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Si le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les changements que cette erreur implique.

LA CALCULATRICE N'EST PAS AUTORISEE

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Respecter impérativement l'ordre des questions.
- Écrire le mot **FIN** à la fin de votre composition
- Dessiner un fruit en dessous du mot **FIN**.
- Conclure chaque question, utiliser une argumentation précise, **encadrer les résultats**.

Exercice : Succession de tirages dans une urne

Présentation générale

On fixe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'entiers naturels non nuls. On suppose que l'on dispose d'un stock illimité de boules blanches et on considère une urne contenant initialement une boule blanche et une boule rouge indiscernables au toucher. On procède à des tirages successifs dans cette urne en respectant à chaque fois le protocole suivant pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

1. si la boule tirée est de couleur blanche lors du k -ième tirage, on la replace dans l'urne et on ajoute u_k boules blanches supplémentaires ;
2. si la boule tirée est de couleur rouge lors du k -ième tirage, on la replace dans l'urne.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par B_n l'événement «la boule tirée lors du n -ième tirage est blanche » et on note : $E = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n$

L'objectif principal de cet exercice est de déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ pour que la probabilité de l'événement E soit nulle.

On considère également la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $S_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = 1 + \sum_{k=1}^n u_k$

On rappelle que si A et C sont deux événements avec $P(C) > 0$, on note $P(A|C)$ ou $P_C(A)$ la probabilité conditionnelle de A sachant C .

Partie I - Probabilité de l'événement E

Dans cette partie, on considère la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $p_n = P\left(\bigcap_{k=1}^n B_k\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Q1) Montrer que la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

En déduire que cette suite est convergente, puis justifier que $P(E) = \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$

Q2) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Si l'événement $\bigcap_{i=1}^k B_i$ est réalisé, décrire la composition de l'urne en fonction de S_k

juste avant d'effectuer le $(k+1)$ -ième tirage. En déduire la probabilité $P\left(B_{k+1} \mid \bigcap_{i=1}^k B_i\right)$

Q3) Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ que : $p_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{S_k}{S_{k+1}}$

Partie II - Caractérisation de la propriété $P(E) = 0$

Q4) Montrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$

Q5) Montrer que les séries $\sum \ln\left(\frac{S_k}{S_{k+1}}\right)$ et $\sum \frac{1}{S_k}$ sont de même nature.

Q6) Montrer que $P(E) = 0$ si et seulement si la série $\sum \frac{1}{S_k}$ est divergente.

Q7) Dans cette question, on suppose que $u_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $P(E)$.

Q8) Proposer une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que $P(E) \neq 0$ en justifiant votre réponse.

Problème : Autour de la fonction sinus cardinal

Objectifs

Dans ce problème, on détermine dans la **Partie I** la valeur de la transformée de Laplace de la fonction sinus cardinal. On utilise ensuite dans la **Partie II** une variante de la formule de Viète pour exprimer la transformée de Laplace de la **Partie I** comme limite d'une suite d'intégrales.

Partie I – Transformée de Laplace de la fonction sinus cardinal

Pour $x > 0$, on note:

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx} dt, \quad G(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin(t) dt, \quad H(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \cos(t) dt.$$

Q9) Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}_+, |\sin(t)| \leq t$.

Q10) Montrer que les fonctions F , G et H sont bien définies sur $]0, +\infty[$.

Q11) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$.

Q12) Montrer que F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et exprimer F' à l'aide de la fonction G .

Q13) Trouver une expression simple pour G et pour H . On pourra calculer $H(x) + iG(x)$.

En déduire, pour $\alpha \in]0, +\infty[$, la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t\alpha} \cos(\alpha t) dt$.

Q14) En déduire une expression simple pour F . Que vaut $F(1)$?

Partie II – Autour de la formule de Viète

Q15) Montrer que pour tout $t > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{\sin(t)}{2^n \sin(t/2^n)}.$$

Q16) Montrer que pour tout $t > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right).$$

On pourra raisonner par récurrence et utiliser l'identité:

$$\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b)).$$

Q17) En déduire que pour tout $t > 0$:

$$\frac{\sin(t)}{t} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right).$$

Q18) Montrer que pour tout $x > 0$:

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n}t\right) e^{-tx} dt.$$

On pourra introduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par:

$$\forall t \in]0, +\infty[, f_n(t) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n}t\right) e^{-tx}.$$

Q19) En déduire que:

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{n+1} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}}.$$

L'objet des trois questions suivantes est de redémontrer le résultat précédent de façon plus élémentaire.

Q20) Déterminer:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}}$$

en écrivant cette quantité à l'aide d'une somme de Riemann.

Q21) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $k \in \llbracket 0, 2^{n-1} \rrbracket$:

$$\left| \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} - \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}} \right| \leq \frac{4 \times 2^{n-1} + 1}{1 + 2^{2n}} \times \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}}.$$

Q22) En déduire que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \left(\frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} - \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}} \right) = 0$$

et retrouver le résultat de la question Q19).