

Exercice : Succession de tirages dans une urne (ccINP PC 2025, exercice 3)

Barème = 20 points

Q1) • $\bigcap_{k=1}^{n+1} B_k = \left(\bigcap_{k=1}^n B_k \right) \cap B_{n+1}$ donc $\bigcap_{k=1}^{n+1} B_k \subset \bigcap_{k=1}^n B_k$, donc par croissance de la probabilité :
 $P\left(\bigcap_{k=1}^{n+1} B_k\right) \leq P\left(\bigcap_{k=1}^n B_k\right)$ et donc $p_{n+1} \leq p_n$

On a bien : $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ décroissante.

Barème = 2 points : 1 pour l'inclusion, 1 pour l'argument décroissance de la probabilité

• Comme $p_n \geq 0$, la suite est décroissante minorée donc convergente.

Si on pose : $A_n = \bigcap_{k=1}^n B_k$, alors on a vu au début de la question que $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ était une suite décroissante d'événements.

Par le théorème de décroissance continue on a : $P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n)$

En remarquant que $E = \left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right)$ et que $p_n = P(A_n)$ alors on a :

$$(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est convergente et } P(E) = \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$$

Barème = 2 points : 1 pour reconnaître E, 1 pour décroissance continue
 (si juste (p_n) convergente 1 point)

Q2) • Si l'événement $\bigcap_{i=1}^k B_i$ est réalisé alors on a tiré que des boules blanches lors des k premier tirage.

Compte tenu du procédé utilisé, on a ajouté u_i boules blanches après le i -ième tirage pour $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$.
 Comme il y avait déjà une boule blanche avant le premier tirage alors, après le k -ième tirage, il y a
 $1 + \sum_{i=1}^k u_i = S_k$ boules blanches.

L'urne contient toujours exactement une boule rouge donc :

avant le $k+1$ -ième tirage l'urne est composée d'une boule rouge et de S_k boules blanches

Barème = 2 points : 1 pour le résultat, 1 pour l'explication

• On en déduit par équiprobabilité que $P\left(B_{k+1} \mid \bigcap_{i=1}^k B_i\right) = \frac{\text{nb de boules blanches}}{\text{nb de boules}} = \frac{S_k}{S_k+1}$

Bilan : $P\left(B_{k+1} \mid \bigcap_{i=1}^k B_i\right) = \frac{S_k}{S_k+1}$

Barème = 1 point : 0 si pas le mot "équiprobabilité" ou équivalent

Q3) Par la formule des probabilités composées :

$$p_n = P\left(\bigcap_{k=1}^{n+1} B_k\right) = P(B_1)P(B_2|B_1) \times \cdots \times P(B_{k+1}|\bigcap_{i=1}^k B_i) \times \cdots \times P(B_n|\bigcap_{i=1}^{n-1} B_i) \\ = \frac{1}{S_0+1} \frac{S_1}{1+S_1} \times \cdots \times \frac{S_k}{1+S_k} \times \cdots \times \frac{S_{n-1}}{1+S_{n-1}}$$

Donc : $\forall n \geq 1, p_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{S_k}{S_{k+1}}$

Barème = 2 points : formule des probabilités composées + bien écrite

Q4) Comme les u_k sont des entiers naturels non nuls alors $S_n = 1 + \sum_{k=1}^n \underbrace{u_k}_{\geq 1} \geq n+1$ et donc par

comparaison : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$

Bilan : la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$

Barème = 1 point : si bien argumentée, sinon 0

Q5) D'après Q4) : $S_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} +\infty$ et donc $\frac{1}{S_k} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$

Alors $\ln\left(\frac{S_k}{S_{k+1}}\right) = -\ln\left(\frac{S_{k+1}}{S_k}\right) = -\ln\left(1 + \frac{1}{S_k}\right) \sim \frac{-1}{S_k} < 0$

Par la règle de l'équivalent pour les séries de signe constant, on a que :

les séries $\sum \ln\left(\frac{S_k}{S_{k+1}}\right)$ et $\sum \frac{1}{S_k}$ sont de même nature.

Barème = 3 points :

1 pour l'équivalent, 1 pour la justification de l'équivalent, 1 pour la règle de l'équivalent avec signe

Q6) En prenant l'exponentielle dans Q3) puisque tout les termes sont positifs :

$$p_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{S_k}{S_{k+1}} \Rightarrow \ln(p_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\ln\left(\frac{S_k}{S_{k+1}}\right)}_{<0}$$

Donc $P(E) = 0$ on utilise Q1)

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(p_n) = -\infty$$

$$\Leftrightarrow \sum \ln\left(\frac{S_k}{S_{k+1}}\right) \text{ divergente} \quad \text{par la relation ci-dessus et parce que les termes sont négatifs}$$

$$\Leftrightarrow \sum \frac{1}{S_k} \text{ divergente} \quad \text{par la question Q5)}$$

On a donc : $P(E) = 0$ si et seulement si la série $\sum \frac{1}{S_k}$ est divergente.

Barème = 3 points : 1 pour l'idée, 2 pour argumentations
(perte de 1 point si pas équivalences)

Q7) Si $u_n = 1$ alors on a directement $S_n = n + 1$

Donc $\sum \frac{1}{S_k} = \sum \frac{1}{k+1}$ et donc $\sum \frac{1}{S_k}$ est divergente par Riemann.

Avec la question Q6) on en déduit $P(E) = 0$

Donc : $\boxed{\left[\forall n \in \mathbb{N} , u_n = 1 \right] \Rightarrow P(E) = 0}$

Barème = 2 points : 1 pour calcul de S_n et série divergente, 1 pour utilisation de Q6)

Q8) Si on pose : $\forall k \in \mathbb{N}^* , u_k = k + 1$

Alors $S_n = 1 + \sum_{k=1}^n (k + 1) = \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \sim \frac{n^2}{2} > 0$

Donc $\frac{1}{S_n} \sim \frac{2}{n^2} > 0$ et donc par Riemann $\sum \frac{1}{S_k}$ est convergente.

Par contraposée de Q6) on a alors : $P(E) \neq 0$

$\boxed{\text{Si on pose : } \forall k \in \mathbb{N}^* , u_k = k + 1 \text{ alors } P(E) \neq 0}$

Barème = 2 points : 1 si la suite (u_n) trouvée convient, 1 pour la justification

Problème : Autour de la fonction sinus cardinal (ccINP PSI 2020, problème 1)

Barème = 48 points

Q9) La fonction $\sin$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ donc continue et dérivable sur tout intervalle et on peut appliquer le théorème des accroissements finis pour obtenir : $\forall t \in \mathbb{R}^+ , \sin(t) - \sin(0) = \sin'(c)(t - 0)$ avec $c \in [0, t]$ (valable en $t = 0$ sans soucis)

On a donc $\sin(t) = \cos(c)t$ et comme $|\cos(c)| \leq 1$ alors $|\sin(t)| \leq |t| = t$ ($|t| = t$ car $t \in \mathbb{R}^+$)

On a donc : $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}^+ , |\sin(t)| \leq t}$

Barème = 2 points : 1 pour idée TAF, 1 pour rédaction (2 points aussi si autre idée bien rédigée)

Q10) Soit $x > 0$.

• A l'aide de Q9) : $\forall t \in]0, +\infty[, \left| \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx} \right| \leq e^{-tx}$. Comme de plus, d'après le cours $t \mapsto e^{-tx}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ (comme $x > 0$), alors par comparaison pour des fonctions positives, on a : $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et donc $F(x)$ est convergente.

• On a aussi : $\forall t \in]0, +\infty[, |e^{-tx} \sin(t)| \leq e^{-tx}$ et $|e^{-tx} \cos(t)| \leq e^{-tx}$

On a donc, comme ci-dessus, $t \mapsto e^{-tx} \sin(t)$ et $t \mapsto e^{-tx} \cos(t)$ intégrable sur $]0, +\infty[$ et donc $G(x)$ et $H(x)$ sont des intégrales convergentes.

Bilan : $\boxed{F, G \text{ et } H \text{ sont bien définies sur }]0, +\infty[}$

Barème = 3 points : 1 point pour majoration utile à F , 1 points pour celles de G et H , 1 point pour utilisation de la règle de comparaison (-1 point si pas de conclusion claire)

Q11) On reprend l'inégalité $\left| \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx} \right| \leq e^{-tx}$ de Q10) et comme les intégrales sont convergentes on a (en utilisant l'inégalité de la moyenne) : $|F(x)| \leq \int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} \right| dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \left[\frac{-1}{x} e^{-xt} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x}$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, alors, par encadrements : $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0}$

Barème = 2 points : 1 point intégration justifiée de l'inégalité, 1 point pour passage à la limite

Q12) Posons $I =]0, +\infty[$ et
$$\begin{array}{ccc} f & : & I \times I \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & (x, t) \longmapsto \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} \end{array}$$
de telle sorte que : $\forall x > 0 , F(x) = \int_I f(x, t) dt$

f est C^∞ sur I^2 et $\forall (x, t) \in I^2 , \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -\sin(t) e^{-tx}$

Fixons $a > 0$ et montrons, par le théorème de dérivation de Leibniz, que F est C^1 sur $[a, +\infty[$
Posons
$$\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto e^{-at} ,$$
 on sait d'après le cours que φ est intégrable sur $]0, +\infty[$

De plus $\forall (x, t) \in I^2 , \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq e^{-tx} \leq e^{-at} = \varphi(t)$ pour $x > a$

On a donc l'hypothèse de domination.

On a : $\begin{cases} \bullet \forall t \in [a, +\infty[, x \mapsto f(x, t) \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } I \\ \bullet \forall x \in [a, +\infty[, t \mapsto f(x, t) \text{ est de continue par morceaux et intégrable sur } I \\ \bullet \forall x \in [a, +\infty[, t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \text{ est de continue par morceaux sur } I \\ \bullet \text{ il existe une fonction } \varphi \text{ intégrable sur } I \text{ telle que : } \forall (x, t) \in [a, +\infty[\times I , \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t) \end{cases}$
on peut donc appliquer le théorème de dérivation pour une intégrale à paramètre de Leibniz.

On en déduit que F est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ et que :

$$\forall x \in [a, +\infty[, F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt = \int_0^{+\infty} (-\sin(t)e^{-tx})(x, t) dt = -G(x)$$

Comme ce résultat est valable pour tout $a > 0$ et que $\bigcup_{a>0} [a, +\infty[=]0, +\infty[$ on a finalement :

$$F \text{ est de classe } C^1 \text{ sur }]0, +\infty[\text{ et } \forall x > 0, F'(x) = -G(x)$$

Barème = 8 points

connaissance du thm : 1 point pour les continuités partielle, 1 point pour $t \mapsto f(x, t)$ intégrable 1 point pour HD

1 point pour justification de intégrable, 1 point justif de HD démontrée , 1 point pour passage par $[a, +\infty[$, 1 point pour calcul et reconnaître -G, 1 point pour conclusion

$$Q13) \bullet H(x) + iG(x) = \int_0^{+\infty} e^{it} e^{-tx} dt = \int_0^{+\infty} e^{(i-x)t} dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^{(i-x)t} dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \left[\frac{1}{i-x} e^{(i-x)t} \right]_0^A$$

Comme $x > 0$ et que $\left| \frac{1}{i-x} e^{(i-x)A} \right| = \left| \frac{1}{i-x} \right| e^{-Ax}$ alors $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{i-x} e^{(i-x)A} = 0$ et donc

$$H(x) + iG(x) = \frac{1}{x-i} = \frac{x+i}{1+x^2}$$

En passant à la partie réelle et à la partie imaginaire, on obtient : $\forall x > 0 , H(x) = \frac{x}{1+x^2} \text{ et } G(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Barème = 3 points : calculs formel 2 point, justification et conclusion 1 point

• En effectuant le changement de variable C^1 bijectif $u = \alpha t$ on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx} \cos(\alpha t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{ux}{\alpha}} \cos(u) \frac{du}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} H\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha} \frac{\frac{x}{\alpha}}{1 + \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2} = \frac{x}{\alpha^2 + x^2}$$

$$\text{On a donc : } \forall x > 0 , \forall \alpha > 0 , \int_0^{+\infty} e^{-tx} \cos(\alpha t) dt = \frac{x}{\alpha^2 + x^2}$$

Barème = 3 points : 2 points pour le changement de variable dont 1 pour C^1 bijectif, 1 pour le calcul et le résultat

$$Q14) \text{ On a } \forall x > 0 : F'(x) = -G(x) = \frac{-1}{1+x^2}$$

En intégrant sur l'intervalle $I : \forall x > 0 , F(x) = -\arctan(x) + \theta$ avec $\theta \in \mathbb{R}$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$ alors $-\frac{\pi}{2} + \theta = 0$ donc $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\text{On en déduit : } \forall x > 0 , F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x) \text{ et directement : } F(1) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-t} dt = \frac{\pi}{4}$$

Remarque : on peut aussi écrire $F(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

Barème = 3 points : 1 point intégrée, 1 point pour la constante, 1 point $F(1)$

Q15) Soit $t > 0$. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que : $\prod_{k=1}^n \cos(\frac{t}{2^k}) = \frac{\sin(t)}{2^n \sin(\frac{t}{2^n})}$

Initialisation : Pour $n = 1$: $\prod_{k=1}^1 \cos(\frac{t}{2^k}) = \cos(\frac{t}{2})$ et $\frac{\sin(t)}{2^n \sin(\frac{t}{2^n})} = \frac{\sin(t)}{2 \sin(\frac{t}{2})} = \frac{2 \sin(t/2) \cos(t/2)}{2 \sin(\frac{t}{2})} = \cos(t/2)$

On a donc bien la formule voulue au rang 1

Hérédité on suppose la propriété vraie au rang n et on la montrer au rang $n + 1$

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n \cos(\frac{t}{2^k}) &= \frac{\sin(t)}{2^n \sin(\frac{t}{2^n})} \\ \Rightarrow \left(\prod_{k=1}^n \cos(\frac{t}{2^k}) \right) \cos(t/2^{n+1}) &= \left(\frac{\sin(t)}{2^n \sin(\frac{t}{2^n})} \right) \cos(t/2^{n+1}) \\ \Rightarrow \prod_{k=1}^{n+1} \cos(\frac{t}{2^k}) &= \left(\frac{\sin(t)}{2^n 2 \sin(\frac{t}{2^{n+1}}) \cos(\frac{t}{2^{n+1}})} \right) \cos(t/2^{n+1}) \\ \Rightarrow \prod_{k=1}^{n+1} \cos(\frac{t}{2^k}) &= \frac{\sin(t)}{2^{n+1} \sin(\frac{t}{2^{n+1}})} \quad \text{On a donc la propriété au rang } n + 1 \end{aligned}$$

Conclusion : on a montrer par récurrence que : $\forall t > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \prod_{k=1}^n \cos(\frac{t}{2^k}) = \frac{\sin(t)}{2^n \sin(\frac{t}{2^n})}$

Remarque : Il y a un problème lorsque $\sin(t/2^n)$ s'annule, c'est-à-dire si $t = 2^n k \pi$ avec $k \in \mathbb{N}^*$, mais dans ce cas, en passant à la limite on obtient 1 des deux côtés de l'égalité...

Barème = 3 points : 1 point pour récurrence annoncée et bien rédigée (avec conclusion), 1 pour initialisation, 1 pour hérédité

Q16) Soit $t > 0$. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que : $\prod_{k=1}^n \cos(\frac{t}{2^k}) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos(\frac{2k-1}{2^n} t)$

Initialisation : au rang 1, on veut montrer : $\cos(\frac{t}{2}) = \cos(\frac{2-1}{2^1} t)$ qui est vraie de manière évidente.

Hérédité : supposons l'égalité vraie au rang n et montrons là au rang $n + 1$

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n \cos(\frac{t}{2^k}) &= \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos(\frac{2k-1}{2^n} t) \\ \text{On multiplie par } \cos(\frac{t}{2^{n+1}}) & \\ \prod_{k=1}^{n+1} \cos(\frac{t}{2^k}) &= \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos(\frac{2k-1}{2^n} t) \cos(\frac{t}{2^{n+1}}) \\ \text{On utilise l'égalité trigonométrique donnée dans l'énoncé :} & \\ \prod_{k=1}^{n+1} \cos(\frac{t}{2^k}) &= \frac{1}{2^{n-1}} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} [\cos(\frac{2k-1}{2^n} t + \frac{t}{2^{n+1}}) + \cos(\frac{2k-1}{2^n} t - \frac{t}{2^{n+1}})] = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} [\cos(\frac{4k-1}{2^{n+1}} t) + \cos(\frac{4k-3}{2^{n+1}} t)] \end{aligned}$$

Lorsque k parcourt $\llbracket 1, 2^{n-1} \rrbracket$, on a : $2k-1$ et $2k-3$ qui parcourent les nombres impairs de 1 à $2 \cdot 2^{n-1} - 1$

On a alors : $\prod_{k=1}^{n+1} \cos(\frac{t}{2^k}) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} \cos(\frac{2k-1}{2^{n+1}} t)$ qui est l'égalité au rang $n + 1$

Conclusion : on a montrer par récurrence que :

$$\forall t > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \prod_{k=1}^n \cos(\frac{t}{2^k}) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos(\frac{2k-1}{2^n} t)$$

Barème = 3 points : 1 pour récurrence bien rédigée, 2 points pour hérédité dont 1 pour nombres impairs bien expliqué ...

Q17) Avec Q15) et Q16) on a : $\frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n}t\right) = \frac{\sin(t)}{2^n \sin(\frac{t}{2^n})}$

Mais $\frac{\sin(t)}{2^n \sin(\frac{t}{2^n})} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sin(t)}{2^n \frac{t}{2^n}} = \frac{\sin(t)}{t}$

On a donc : $\forall t > 0, \frac{\sin(t)}{t} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n}t\right)$

Barème = 2 points : Q15 et Q16 : 1 point, passage à la limite 1 point

Q18) On travaille avec $x > 0$ fixé.

Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(t) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n}t\right)e^{-xt}$

On remarque que : $|f_n(t)| \leq \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} 1e^{-xt} = e^{-xt}$

On pose $\forall t \in I, \psi(t) = e^{-xt}$ qui est intégrable sur $I =]0, +\infty[$ d'après le cours puisque $x > 0$
On remarque de plus, en utilisant Q17) que $\forall t \in I, f_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} = f(x, t)$ (notation de la question Q12)

On a donc (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux sur I telle que :

- (f_n) converge simplement sur I vers $t \mapsto f(x, t)$
- il existe une fonction ψ intégrable sur I telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in I, |f_n(t)| \leq \psi(t)$

on peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et on en déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt$$

ou encore :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n}t\right)e^{-xt} dt = \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x, t) dt$$

Comme à gauche on a une somme finie et par définition de $F(x)$ on obtient :

$$\forall x > 0, F(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n}t\right)e^{-xt} dt$$

Barème = 5 points : CS 1 point, HD 2 points, connaissance du théorème de convergence dominée 1 points, application 1 point

Q19) On applique la formule de Q18), avec $x = 1$ qui vérifie bien $x > 0$, et on en déduit :

$$F(1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n}t\right)e^{-t} dt$$

On retrouve alors la formule de Q13) avec $\alpha = \frac{2k-1}{2^n}$ et $x = 1$, et on a vu en Q14) que $F(1) = \frac{\pi}{4}$.

$$\text{Donc : } \frac{\pi}{4} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{1 + \left(\frac{2k-1}{2^n}\right)^2}$$

$$\text{et après simplification : } \frac{\pi}{4} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{2^{n+1}}{(2k-1)^2 + 2^{2n}}$$

Barème = 2 points : 1 point pour $x = 1$, utilisation de Q13) 1 point

$$\text{Q20)} \quad 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{4k^2+2^{2n}} = \frac{2^{n+1}}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{1+\frac{4k^2}{2^{2n}}} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{1+(\frac{2k}{2^n})^2} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{1+(\frac{k}{2^{n-1}})^2}$$

Si on pose $N = 2^{n-1}$ et $a : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ alors : $2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{4k^2+2^{2n}} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N a(\frac{k}{N})$ et on reconnaît la somme

de Riemann, approximation de : $\int_0^1 a(t)dt = \int_0^1 \arctan'(t)dt = \frac{\pi}{4}$ On a donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{4k^2+2^{2n}} = \frac{\pi}{4}$

Barème = 3 points : 2 points pour le calcul permettant de mettre sous forme d'une somme de Riemann, 1 point pour finir la question

Q21) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 0; 2^{n-1} \rrbracket$. Alors :

$$\left| \frac{1}{4k^2+2^{2n}} - \frac{1}{(2k-1)^2+2^{2n}} \right| = \left| \frac{((2k-1)^2+2^{2n}) - (4k^2+2^{2n})}{(4k^2+2^{2n})((2k-1)^2+2^{2n})} \right| = \left| \frac{-4k+1}{(4k^2+2^{2n})((2k-1)^2+2^{2n})} \right|$$

Comme $k \in \mathbb{N}$ alors $2k-1 \neq 0$ (impair) et donc $(2k-1)^2 \geq 1$, qui donne $(2k-1)^2 + 2^{2n} \geq 1 + 2^{2n}$ et en inversant (nombres positifs) on a : $\frac{1}{(2k-1)^2+2^{2n}} \leq \frac{1}{1+2^{2n}}$

D'autre part : $|-4k+1| = 4k-1 \leq 4k+1 \leq 4 \times 2^{n-1} + 1$ puisque $k \in \llbracket 0; 2^{n-1} \rrbracket$.

En reportant les deux dernières résultats dans l'inégalité précédente on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \llbracket 0; 2^{n-1} \rrbracket, \left| \frac{1}{4k^2+2^{2n}} - \frac{1}{(2k-1)^2+2^{2n}} \right| \leq \frac{4 \times 2^{n-1} + 1}{1+2^{2n}} \frac{1}{4k^2+2^{2n}}$$

Barème = 2 points : 1 point pour chaque intermédiaire

Q22) • Avec l'inégalité triangulaire et l'inégalité de Q21) on a :

$$\begin{aligned} \left| 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \left(\frac{1}{4k^2+2^{2n}} - \frac{1}{(2k-1)^2+2^{2n}} \right) \right| &\leq 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{4 \times 2^{n-1} + 1}{1+2^{2n}} \frac{1}{4k^2+2^{2n}} \\ &\leq \frac{4 \times 2^{n-1} + 1}{1+2^{2n}} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} 2^{n+1} \frac{1}{4k^2+2^{2n}} \sim \frac{4 \times 2^{n-1}}{2^{2n}} \frac{\pi}{4} \sim \frac{\pi}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

On a utilisé le résultat de Q20)

$$\text{Mais } \frac{\pi}{2^{n+1}} \xrightarrow[n \rightarrow 0]{} 0 \text{ et donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \left(\frac{1}{4k^2+2^{2n}} - \frac{1}{(2k-1)^2+2^{2n}} \right) = 0$$

Barème = 2 points : utilisation de Q21) et Q20), passage à la limite

$$\bullet \text{ Comme } 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \left(\frac{1}{4k^2+2^{2n}} - \frac{1}{(2k-1)^2+2^{2n}} \right) = 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{4k^2+2^{2n}} - 2^{n+1} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{(2k-1)^2+2^{2n}}$$

Alors avec la limite précédente et Q20), on trouve : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{4k^2+2^{2n}} = \frac{\pi}{4} = 2^{n+1} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{(2k-1)^2+2^{2n}}$
(au passage au redémontre la convergence de la deuxième somme)

Et donc on retrouve le résultat de Q19).

Barème = 2 points : 1 point égalité des deux limites et 1 point pour utiliser Q20)