

Correction du devoir à la maison de Mathématiques n°11

EXERCICE 1 : e3a PC 2021 : exercice 1

1.) Comme on a : $\begin{cases} \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n} \text{ est une série alternée} \\ (\frac{1}{n}) \text{ est décroissante} \\ \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{cases}$, on peut appliquer le théorème spécial à certaines séries

alternées et on en déduit que $\boxed{\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n} \text{ converge.}}$

2.1) Posons $\forall n \in \mathbb{N} : \begin{array}{ccc} f_n & : & [0, 1[\longrightarrow \mathbb{R} \\ & & x \longmapsto x^{2n}(1-x) \end{array}$

• f_n est clairement intégrable sur $[0, 1]$ donc sur $[0, 1[$ comme une fonction continue.

• Pour tout $x \in [0, 1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}(1-x)$ qui est une série géométrique convergente de raison $|x^2| < 1$

On a alors : $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \frac{1-x}{1-x^2} = \frac{1}{1+x}$

La série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge donc simplement sur $[0, 1[$ vers $f : \begin{array}{ccc} [0, 1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{1+x} \end{array}$

• De plus $\int_0^1 |f_n(x)| dx = \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 x^{2n}(1-x) dx = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \sim \frac{1}{4n^2} > 0$

Comme $\sum \frac{1}{4n^2}$ est convergente, alors, par la règle de l'équivalent pour les séries à termes positifs $\sum \int_0^1 |f_n(x)| dx$ est convergente.

On a donc : $\begin{cases} \text{les } f_n \text{ sont continues par morceaux et intégrables sur } [0, 1[\\ \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ converge simplement vers } f \text{ sur } [0, 1[\text{ avec } f \text{ continue par morceaux sur } [0, 1[\\ \sum \int_0^1 |f_n(x)| dx \text{ est convergente} \end{cases}$

On a donc par le théorème d'intégration terme à terme : f est intégrable sur $[0, 1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x) dx$ est convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) dx = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$$

On a donc bien la convergence de la série et des intégrales et on a l'égalité : $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^1 x^{2n}(1-x) dx \right) = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx}$

2.2.) • $\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2)$

$$\bullet \sum_{n=0}^N \int_0^1 x^{2n}(1-x) dx = \sum_{n=0}^N \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \right) = \sum_{k=1}^{2N+2} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

En faisant tendre N vers $+\infty$ on obtient : $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 x^{2n}(1-x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

• En regroupant les deux résultats précédents on obtient : $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2)}$

3.) φ est une série entière.

On sait d'après le cours que : $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = \ln(1+x)$ sur $] -1, 1[$ et que le rayon de convergence vaut 1.

Donc φ est définie sur $] -1, 1[$ et n'est pas définie sur $\mathbb{R} \setminus] -1, 1[$

En $x = 1$: $\varphi(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = \ln(2)$ est convergente d'après le 2.)

En $x = -1$: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente.

On a donc : le domaine de définition de φ est $] -1, 1]$ et $\varphi(1) = \ln(2)$

$$4.1) \int_0^1 \frac{1-x}{1+x^2} dx = [\arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2}$$

On a donc : $\int_0^1 \frac{1-x}{1+x^2} dx = \frac{\pi - 2\ln(2)}{4}$

$$4.2) \left| \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} \right| \sim \frac{1}{4n^2} > 0 \text{ et } \sum \frac{1}{n^2} \text{ est une série de Riemann convergente.}$$

Donc, par la règle de l'équivalent, S est absolument convergente donc convergente.

L'existence de S est donc justifiée.

On va calculer S de deux manières.

• Méthode 1 : on commence par calculer l'intégrale dans la somme.

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\int_0^1 x^{2n} (1-x) dx \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \right) \quad (\text{calcul intermédiaire déjà fait en 2.2})$$

• Méthode 2 : on applique le théorème d'intégration terme à terme comme à la question 2.1).

$$\text{On a } \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n (1-x) = \frac{1-x}{1+x^2} \text{ sur } [0, 1[\text{ comme somme d'une suite géométrique.}$$

On reprend le travail effectué à la question 2.1) et on a :

$$\begin{cases} \text{les } (-1)^n f_n \text{ sont continues par morceaux et intégrables sur } [0, 1[\\ \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n f_n \text{ converge simplement vers } x \mapsto \frac{1-x}{1+x^2} \text{ sur } [0, 1[\text{ qui est continue par morceaux sur } [0, 1[\\ \sum_0^1 |(-1)^n f_n(x)| dx \text{ est convergente} \end{cases}$$

On a donc par le théorème d'intégration terme à terme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^n f_n(x) dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n f_n(x) dx = \int_0^1 \frac{1-x}{1+x^2} dx = \frac{\pi - 2\ln(2)}{4}$$

• En regroupant les résultats des deux méthodes on a : $S = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \right) = \frac{\pi - 2\ln(2)}{4}$

EXERCICE 2 : exercice oral 2025 - ccINP - Mathis

1) On pose $I =]0, 1]$ et $\forall t \in I$, $f(t) = \frac{\ln(t)}{1+t}$
 f est continue sur $]0, 1]$, A pose problème seulement en 0.

Au voisinage de $t = 0$:

$f(t) \sim \ln(t)$ et $t \mapsto \ln(t)$ est intégrable sur $]0, 1]$ d'après le cours.

Donc, par équivalent f est intégrable sur $]0, 1]$ et donc A est convergente.

2) On utilise le développement en série entière du cours : $\forall t \in [0, 1[$, $\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n$ et on a :

$$\forall t \in]0, 1[, f(t) = \ln(t) \frac{1}{1+t} = \ln(t) \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \ln(t) t^n$$

$$\text{On pose : } \forall n \in \mathbb{N} : \begin{array}{ccc} f_n &]0, 1[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & (-1)^n \ln(t) t^n \end{array}$$

$$\text{On a } \forall t \in]0, 1[, |f_n(t)| = -t^n \ln(t)$$

Pour $n = 0$ $t \mapsto -\ln(t)$ est intégrable d'après le cours.

Pour $n \geq 1$, $f_n(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$, donc f_n est prolongeable par continuité en 0 et donc f_n est intégrable sur $]0, 1[$

$$\begin{aligned} & \int_0^1 |f_n(t)| dt \\ &= \int_0^1 -t^n \ln(t) dt \text{ on intègre par partie (justifié car les limites aux bornes du crochet existe dans } \mathbb{R}) \\ &= \left[\frac{-t^{n+1}}{n+1} \ln(t) \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{n+1} \frac{1}{t} dt = \int_0^1 \frac{t^n}{n+1} dt = \frac{1}{(n+1)^2} \end{aligned}$$

Comme $\sum \frac{1}{(n+1)^2}$ est convergente alors $\sum \int_0^1 |f_n(t)| dt$ est convergente.

$$\text{On a alors : } \left\{ \begin{array}{l} \text{les } f_n \text{ sont continues par morceaux et intégrables sur }]0, 1[\\ \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ converge simplement vers } f \text{ sur }]0, 1[\text{ qui est continue par morceaux sur }]0, 1[\\ \sum \int_0^1 |f_n(t)| dt \text{ est convergente} \end{array} \right.$$

On peut donc appliquer le théorème d'intégration terme à terme et on a :

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt \\ & \Rightarrow \int_0^{+\infty} f(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2} dt \text{ comme } f_n \text{ est du même signe que } (-1)^{n+1} \\ & \Rightarrow A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} dt \end{aligned}$$

$$\bullet \text{ On sait que : } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \text{ on a donc : } A + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+(-1)^n}{n^2}$$

On remarque que : $1 + (-1)^n = 0$ si n impair et $1 + (-1)^n = 2$ si n pair ($n = 2k$). Alors : comme la série est absolument convergente par Riemann, on peut sommer par paquets en séparant les termes paires et les termes impaires. On obtient :

$$A + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{(2k)^2} \Rightarrow A + \frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \Rightarrow A + \frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{6} \Rightarrow A = \frac{-\pi^2}{12}$$

$$\text{On a donc : } \boxed{A = \frac{-\pi^2}{12}}$$

EXERCICE 3 : exercice oral 2025 - Mines-Télécom - Akram

a) Posons :
$$F : \mathbb{R} \times I \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) \longmapsto \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}} \text{ avec } I = [0, +\infty[\text{ pour avoir : } f(x) = \int_I F(x, t) dt$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto F(x, t)$ est continue sur I , l'intégrale $f(x)$ pose donc problème en $+\infty$.
- Si $x < 0$ alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(x, t) = +\infty$, donc $F(x, t) \geq 1 > 0$ au voisinage de $t = +\infty$, donc $\int_I F(x, t) dt$ est divergente.
- Si $x = 0$: $F(x, t) = F(0, t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \sim \frac{1}{t} > 0$, et comme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ est divergente, par équivalent, $f(0)$ est divergente.
- Si $x > 0$, $F(x, t) = o(\frac{1}{t^2})$ pour t au voisinage de $+\infty$ et donc, par négligeabilité, comme $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, $f(x)$ est convergente.
- BILAN : Le domaine de f est $D =]0, +\infty[$

b) Soit $a > 0$.

F est C^∞ sur son domaine et $\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times I$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\frac{\partial^k F}{\partial x^k}(x, t) = \frac{(-t)^k}{\sqrt{1+t^2}} e^{-xt}$

On a $\forall (x, t) \in [a, +\infty[\times I$, $\left| \frac{\partial^k F}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \frac{t^k}{\sqrt{1+t^2}} e^{-at}$

Comme $t \mapsto \frac{t^k}{\sqrt{1+t^2}} e^{-at}$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$ et que au voisinage de $+\infty$: $\frac{t^k}{\sqrt{1+t^2}} e^{-at} = o(\frac{1}{t^2})$ alors $t \mapsto \frac{t^k}{\sqrt{1+t^2}} e^{-at}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ donc par comparaison : $t \mapsto \frac{\partial^k F}{\partial x^k}(x, t)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :
$$\left\{ \begin{array}{l} \forall t \in [0, +\infty[, x \mapsto f(x, t) \text{ est de classe } C^n \text{ sur } [a, +\infty[\\ \forall x \in [a, +\infty[, \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket , t \mapsto \frac{\partial^k F}{\partial x^k}(x, t) \text{ est intégrable sur } [0, +\infty[\\ \forall x \in [a, +\infty[, t \mapsto \frac{\partial^n F}{\partial x^n}(x, t) \text{ est continue par morceaux sur } [0, +\infty[\\ \forall (x, t) \in [a, +\infty[\times [0, +\infty[, \left| \frac{\partial^n F}{\partial x^n}(x, t) \right| \leq \frac{t^n}{\sqrt{1+t^2}} e^{-at} \\ \text{avec } t \mapsto \frac{t^n}{\sqrt{1+t^2}} e^{-at} \text{ intégrable sur } [0, +\infty[\end{array} \right.$$

On peut donc appliquer la généralisation du théorème d'intégration terme à terme et on en déduit que f est de classe C^n sur $[a, +\infty[$

Comme $\bigcup_{a>0} [a, +\infty[= D$ et que la dérivation est une notion locale alors f est de classe C^n sur D .

Comme ce résultat est valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ alors f est C^∞ sur D .

Bilan : f est C^∞ sur D

c) On a :
$$\left\{ \begin{array}{l} \forall t \in]0, +\infty[, F(x, t) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \\ t \mapsto 0 \text{ est continue par morceaux sur }]0, +\infty[\\ \forall (x, t) \in [1, +\infty[\times]0, +\infty[, |F(x, t)| \leq \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} e^{-t} \\ \text{avec } t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} e^{-t} \text{ intégrable sur }]0, +\infty[\end{array} \right.$$

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée à paramètre continu et on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} F(x, t) dt = \int_0^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x, t) dt \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \int_0^{+\infty} 0 dt = 0$$

On a donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

EXERCICE 4 : exercice oral 2025 - ccINP - Matéo

1) Tirer une boule verte ou non est une épreuve de Bernoulli de paramètre p . Dans ce 1) on effectue cette épreuve jusqu'à l'obtention d'un premier succès. On reconnaît donc une loi géométrique de paramètre p et on a :

$$X \hookrightarrow G(p) \text{ et } E(X) = \frac{1}{p}$$

2) • On remarque que : $Y(\Omega) = \llbracket 2; +\infty \rrbracket$ ($+\infty$ impossible) et que :

$$\forall k \in Y(\Omega), (Y = k) = \bigcup_{i \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket} \left(\left(\bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k V_j \right) \cap \overline{V_i} \cap V_k \right)$$

avec V_i = "tirer une boule verte au i -ième tirage"

$$\text{Par incompatibilité on a : } P(Y = k) = \sum_{i=1}^{k-1} P\left(\left(\bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k V_j \right) \cap \overline{V_i} \cap V_k \right)$$

$$\text{Puis, par indépendance : } P(Y = k) = \sum_{i=1}^{k-1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k P(V_j) P(\overline{V_i}) P(V_k)$$

$$\Rightarrow P(Y = k) = \sum_{i=1}^{k-1} (1-p)^{k-2} p^2 = (k-1)(1-p)^{k-2} p^2$$

La loi de Y est donc donnée par :

$$Y(\Omega) = \llbracket 2, +\infty \rrbracket \text{ et } \forall k \in Y(\Omega), P(Y = k) = (k-1)(1-p)^{k-2} p^2$$

$$\bullet \text{ On a alors } E(Y) = \sum_{k=2}^{+\infty} k P(Y = k) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)(1-p)^{k-2} p^2$$

$$\text{Mais d'après le cours : } \forall x \in]-1, 1[, \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k$$

Comme on a une série entière, $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ est C^2 sur $] -1, 1[$ et on peut dériver deux fois termes à termes. On en déduit

$$: \forall x \in]-1, 1[, \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2}$$

On peut appliquer ceci en $1-p \in]-1, 1[$ et on a : $E(Y) = p^2 \frac{2}{(1-(1-p))^3} = \frac{2p^2}{p^3} = \frac{2}{p}$

$$Y \text{ admet une espérance et } E(Y) = \frac{2}{p}$$

MINES-PONTS, PSI, 2025, math II

Q1) • (E_ℓ) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients **continues**, d'après le cours, le problème de Cauchy (C_ℓ) admet une unique solution.

• On a : $(E_\ell) \Leftrightarrow u'(x) + \frac{1}{2}u(x) = \frac{-1}{2}$

Une solution particulière évidente est alors : $x \mapsto -1$

On résout l'équation homogène : $(E_\ell^0) \Leftrightarrow u'(x) + \frac{1}{2}u(x) = 0 \Leftrightarrow u(x) = a \exp(\frac{-x}{2})$ avec $a \in \mathbb{R}$ puisque l'on a une EDL_1 homogène à coefficient constants.

(E_ℓ) étant linéaire la solution générale s'écrit : solution particulière + solution de l'équation homogène, donc sous la forme : $u(x) = -1 + ae^{-x/2}$

La condition initiale $u(0) = 0$ donne $-1 + a = 0 \Leftrightarrow a = 1$

(C_ℓ) admet une unique solution :	u	:	$\mathbb{R}^+$	$\longrightarrow$	$\mathbb{R}$
	x	$\longmapsto$	$e^{-x/2} - 1$		

• u est C^∞ et $\forall x \geq 0$, $u'(x) = -\frac{1}{2}e^{-x/2} \leq 0$

On en déduit le tableau de variation suivant :

x	0	$+\infty$
$u(x)$	0	-1
	$\searrow$	

Q2) Si $x \mapsto \gamma$ est une solution constante de (E_ℓ) alors : $0 + \frac{1}{2}\gamma = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow \gamma = -1$

On remarque que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = -1$.

Il y a donc une unique solution constante de (E_ℓ) qui vaut $\gamma = -1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = -1 = \gamma$

Q3) • On commence par remarquer que : si $x \mapsto c$ est une solution constante de (E) alors : $0 + c + 1 = \frac{1}{2}e^c \Leftrightarrow c + 1 - \frac{e^c}{2} = 0$

• Soit y la solution de (C) .

Alors $y'(x) = -1 - y(x) + \frac{1}{2}e^{y(x)}$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = c$ alors, par continuité : $\lim_{x \rightarrow +\infty} y'(x) = -1 - c + \frac{1}{2}e^c$

y' admet donc une limite en $+\infty$ et on pose : $\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} y'(x)$

Par l'absurde : $\boxed{\text{Si}} \lambda > 0$

Alors $\exists x_0 > 0$, $\forall x \geq x_0$, $y'(x) \geq \frac{\lambda}{2}$

Pour $x \geq x_0$: $y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^x \underbrace{y'(t)}_{\geq \frac{\lambda}{2}} dt \geq (x - x_0) \frac{\lambda}{2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ On aurait alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = +\infty$ ce qui contredit

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = c$

$\boxed{\text{absurde}}$ donc $\lambda \leq 0$

On démontre de même que $\lambda \geq 0$ et finalement $\lambda = 0$ et donc $-1 - c + \frac{1}{2}e^c = 0$

Avec la remarque du début de question : $\boxed{x \mapsto c \text{ est une solution constante de } (E)}$

• Considérons l'équation $c + 1 - \frac{e^c}{2}$ et posons donc $\forall t \geq 0$, $a(t) = t + 1 - \frac{e^t}{2}$

Alors a est C^∞ sur $\mathbb{R}^+$ et $a'(t) = 1 - \frac{e^t}{2}$

$a'(t) = 0 \Leftrightarrow e^t = 2 \Leftrightarrow t = \ln(2)$

x	$-\infty$	$\ln(2)$	$+\infty$
$a'(x)$	$+$	0	$-$
$a(x)$	$\begin{array}{ccc} & \nearrow & \searrow \\ & \ln(2) > 0 & \\ -\infty & & -\infty \end{array}$		

On en déduit le tableau de variation suivant :

Avec le tableau de variation et le fait que $a(0) = \frac{1}{2} > 0$, on a que $a(t) = 0$ admet deux solutions c_1 et c_2 telles que : $c_1 < 0 < c_2$

Avec la remarque du début, ces valeurs correspondent à deux solutions constantes de (E).

Comme $y(0) = 0$ et que y est décroissante alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) \leq 0$ donc $c \leq 0$ et donc $c = c_1$.

Bilan : $\boxed{(E) \text{ admet exactement deux solutions constantes } c_1 \text{ et } c_2 \text{ et } c = c_1}$

Q4) $\lambda_n = O(n)$ donc $\exists M' > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\lambda_n| \leq nM'$

Donc $|\lambda_n^k a_n| \leq (nM')^k \frac{M}{2^n} = \frac{MM'^k n^k}{2^n}$

Par comparaison exp-puissance on en déduit $\lambda_n^k a_n = o(\frac{1}{n^2})$ et comme $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série à termes positifs convergente alors, par négligeabilité : $\sum \lambda_n^k a_n$ est convergente et donc $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, b_k \text{ est bien défini.}}$

Q5) • Pour $x \in \mathbb{R}^+$, comme $\lambda_n \geq 0$ alors $0 \leq e^{-\lambda_n x} \leq 1$ et donc $|f_n(x)| \leq |a_n| \leq \frac{M}{2^n}$

On en déduit $\|f_n\|_{\infty, \mathbb{R}^+} = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} |f_n(x)| \leq \frac{M}{2^n}$

Comme $\sum \frac{M}{2^n}$ est une série géométrique convergente alors par comparaison : $\sum \|f_n\|_{\infty, \mathbb{R}^+}$ est convergente.

La série de fonctions $\sum f_n$ converge donc normalement sur $\mathbb{R}^+$, et donc $\boxed{\sum f_n \text{ converge donc normalement sur } \mathbb{R}^+}$

• Comme les f_n sont continues et que la continuité est conservée par convergence uniforme alors : $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}^+}$

Q6) • Par définition : $f(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Comme $\lambda_n^0 = 0$ alors : $f(0) = b_0$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_0(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_0 = a_0$

Comme (λ_n) est une suite strictement croissante et que $\lambda_0 = 0$, alors $\lambda_n > 0$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_n e^{-\lambda_n x} = 0$

On a : $\left\{ \begin{array}{l} \sum f_n \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } \mathbb{R}^+ \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \begin{cases} a_0 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n > 0 \end{cases} \end{array} \right.$

Par le théorème de la double limite on a donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = a_0$

• Bilan : $\boxed{f(0) = b_0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a_0}$

Q7) • Les fonctions f_n sont C^∞ et $\forall i \in \mathbb{N}$, $f^{(i)}(x) = a_n (-\lambda_n)^i e^{-\lambda_n x}$

Comme en Q5) on montrer que $\sum f^{(i)}$ converge normalement et donc uniformément et simplement sur $\mathbb{R}^+$

On a donc, pour $k \in \mathbb{N}^*$: $\left\{ \begin{array}{l} \text{les fonctions } f_n \text{ sont de classe } C^k \text{ sur } \mathbb{R}^+ \\ \forall i \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket, \sum f^{(i)} \text{ converge simplement sur } \mathbb{R}^+ \\ \sum f^{(k)} \text{ converge uniformément sur } \mathbb{R}^+ \end{array} \right.$

Donc, par théorème sur les séries de fonctions : $\boxed{f \text{ est } C^k \text{ sur } \mathbb{R}^+ \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}^+, f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (-\lambda_n)^k e^{-\lambda_n x}}$

• Alors en $x = 0$: $f^{(k)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (-\lambda_n)^k = (-1)^k \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \lambda_n^k = (-1)^k b_k$

Donc $\boxed{f^{(k)}(0) = (-1)^k b_k}$

Q8) On suppose f nulle. Montrons alors par récurrence sur n que : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 0$

Initialisation :

D'après Q6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a_0$ et comme f est nulle alors $a_0 = 0$

Hérédité : Soit $n \geq 1$. On suppose que : $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, a_k = 0$

$$\text{Alors } f(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} a_k e^{-\lambda_k x} = e^{-\lambda_n x} \left(a_n + \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k e^{-(\lambda_k - \lambda_n)x} \right)$$

$$\text{Comme } f \text{ est nulle alors : } a_n + \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k e^{-(\lambda_k - \lambda_n)x} = 0$$

Comme (λ_n) est strictement croissante alors $\lambda_k - \lambda_n > 0$ pour $k \geq n+1$ et on peut démontrer avec le théorème de la double limite, comme en Q6) que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k e^{-(\lambda_k - \lambda_n)x} = 0$.

Comme on avait $a_n + \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k e^{-(\lambda_k - \lambda_n)x} = 0$, on en déduit $a_n = 0$

Conclusion : Si f est nulle alors : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 0$

Q9) On a vu en Q6) que : $y(0) = b_0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = a_0$

Comme $y(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = c$ (admis après Q2)) on en déduit : $b_0 = 0$ et $a_0 = c$

Q10) On a vu que $b_1 = -y'(0)$ en Q7).

Comme y est solution de (E) alors : $y'(0) + y(0) + 1 = \frac{1}{2}e^{-y(0)} \Rightarrow Y'(0) + 0 + 1 = \frac{1}{2}e^0 \Rightarrow y'(0) = \frac{-1}{2}$

On a donc : $b_1 = \frac{1}{2}$

Q11) • Pour commencer, on définit la suite $(d_k)_{k \in \mathbb{N}}$ par $\begin{cases} d_0 = 1 \\ \forall k \in \mathbb{N}^*, d_k = \sum_{i=1}^k \binom{k-1}{i-1} d_{k-i} b_i \end{cases}$

On pose aussi : $\forall k \in \mathbb{N}, d'_k = (-1)^k g^{(k)}(0)$ et on va essayer de montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, d_k = d'_k$

• y est C^∞ et donc g aussi. Comme $g(x) = e^{y(x)}$ alors : $g'(x) = y'(x)e^{y(x)} \Rightarrow g'(x) = y'(x)g(x)$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, dérivons cette formule $k-1$ fois avec la formule de Leibniz. On obtient :

$$g^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} (y')^{(j)}(x) g^{(k-1-j)}(x)$$

$$\text{On fait le changement d'indice } i = j+1 \text{ et on a : } g^{(k)}(x) = \sum_{i=1}^k \binom{k-1}{i-1} (y')^{(i-1)}(x) g^{(k-i)}(x)$$

$$\text{ou encore } g^{(k)}(x) = \sum_{i=1}^k \binom{k-1}{i-1} y^i(x) g^{(k-i)}(x)$$

En évaluant en $x = 0$, puisque $y^i(0) = (-1)^i b_i$ (par Q7)) et $g^{(k-i)}(0) = (-1)^{k-i} d'_{k-i}$:

$$\text{On obtient : } (-1)^k d'_k = \sum_{i=1}^k \binom{k-1}{i-1} (-1)^i b_i (-1)^{k-i} d'_{k-i}$$

$$\Rightarrow (-1)^k d'_k = (-1)^k \sum_{i=1}^k \binom{k-1}{i-1} b_i d'_{k-i} \Rightarrow d'_k = \sum_{i=1}^k \binom{k-1}{i-1} b_i d'_{k-i}$$

De plus $g(0) = \exp(y(0)) = \exp(0) = 1$ donc $d'_0 = 1$

Finalement $(d_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(d'_k)_{k \in \mathbb{N}}$ suivent la même relation de récurrence, avec la même condition initiale.

Comme ceci définit de manière unique une suite. On peut affirmer que :

$\forall k \in \mathbb{N}$, $d_k = d'_k$ et donc que $g^{(k)}(0) = (-1)^k d_k$ avec la suite (d_k) définie dans l'énoncé.

Bilan : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, g^{(k)}(0) = (-1)^k d_k}$

Q12) On a, d'après (E) : $y'(x) + y(x) + 1 = \frac{1}{2}g(x)$, en dérivant $k \in \mathbb{N}^*$ fois : $y^{(k+1)}(x) + y^{(k)}(x) + 0 = \frac{1}{2}g^{(k)}(x)$, en évaluant en $x = 0$: $(-1)^{k+1}b_{k+1} + (-1)^k b_k = \frac{1}{2}(-1)^k d_k \Rightarrow -b_{k+1} + b_k = \frac{1}{2}d_k \Rightarrow b_{k+1} = b_k - \frac{1}{2}d_k$

On a donc : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, b_{k+1} = b_k - \frac{1}{2}d_k}$

Q13) • $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $y(x) - y_N(x) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n e^{-\lambda_n x}$

Mais $0 \leq e^{-\lambda_n x} \leq 1$ et $|a_n| \leq \frac{M}{2^n}$ donc : $|y(x) - y_N(x)| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{M}{2^n} = \frac{M}{2^{N+1}} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{M}{2^N}$

En passant au sup sur $\mathbb{R}^+$, on obtient : $\boxed{\|y_N - y\|_{\infty, \mathbb{R}^+} \leq \frac{M}{2^N}}$

• On déduit de l'inégalité précédente et par comparaison que : $\lim_{N \rightarrow +\infty} \|y_N - y\|_{\infty, \mathbb{R}^+} = 0$ et donc que :

$\boxed{(y_N) \text{ converge uniformément vers } y \text{ sur } \mathbb{R}^+}$

• Si on prend $J = [a, +\infty[$ avec $a > 0$, alors pour $N \in \mathbb{N}$ et par croissance de (λ_n) :

$|y(x) - y_N(x)| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n| e^{-\lambda_{N+1} x} \leq e^{-\lambda_{N+1} a} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{M}{2^n}$ donc $\|y_N - y\|_{\infty, \mathbb{R}^+} \leq e^{-\lambda_{N+1} a} \frac{M}{2^N}$ qui est une majoration plus fine.

Q14) En écrivant matriciellement les équations : $\beta_k = \sum_{n=1}^N \lambda_n^k a_n$ on a :

$$VA = B \text{ avec } V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_N \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_N^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda_1^{N-1} & \lambda_2^{N-1} & \dots & \lambda_N^{N-1} \end{pmatrix}$$

Q15) On reconnaît en V une matrice de Vandermonde qui est inversible car les λ_k sont distincts puisque (λ_n) est strictement croissante.

On a donc $A = V^{-1}B$, donc $\boxed{VA = B \text{ admet une unique solution.}}$

Q16) • Analyse :

Vu que $S(0) = 0$ on peut supposer que $S(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ donc que $I'(x) = -I(x) \Rightarrow I(x) = I_0 e^{-x}$
Puis que : $R'(x) = I_0 e^{-x} \Rightarrow R(x) = R_0 + I_0 - I_0 e^{-x}$

• Synthèse :

On pose $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\begin{cases} S(x) = 0 \\ I(x) = I_0 e^{-x} \\ R(x) = R_0 + I_0 - I_0 e^{-x} \end{cases}$

Alors $I'(x) = 0$, $I'(x) = -I_0 e^{-x} = -I(x) = I(x)S(x) - I(x)$ et $R'(x) = I_0 e^{-x} = I(x)$

De plus $S(0) = 0 = S_0$, $I(0) = I_0$ et $R(0) = R_0$.

Donc (S, I, R) est bien solution de (F) et c'est la bonne solution car on sait qu'elle est unique.

$$\text{Bilan : } \boxed{\text{Si } S_0 = 0 \text{ alors : } \forall x \in \mathbb{R}^+, \begin{cases} S(x) = 0 \\ I(x) = I_0 e^{-x} \\ R(x) = R_0 + I_0 - I_0 e^{-x} \end{cases}}$$

Q17) Avec le théorème admis et la question Q16), on a que si $\exists x_0 \in \mathbb{R}^+, S(x_0) = 0$ alors $\forall x \in \mathbb{R}^+, S(x) = 0$
On en déduit que si $S(0) = S_0 > 0$ donc $S_0 \neq 0$ alors $\forall x \in \mathbb{R}^+, S(x) \neq 0$
Comme S ne s'annule pas et que S est continue, alors, par le TVI, S est de signe constant et comme $S(0) > 0$, alors S est toujours strictement positive.

Bilan : $\boxed{\text{Si } S_0 > 0 \text{ alors } S \text{ ne s'annule jamais et } S \text{ est toujours strictement positive.}}$

Q18) Comme $S, I, R \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ alors : $(F) \Rightarrow S' = -IS \Rightarrow \frac{-S'}{S} = I$ (on peut diviser par S grâce à la remarque ci-dessus)

$$\text{En dérivant : } \left(\frac{-S'}{S}\right)' = I' = \underbrace{IS}_{-S'} - \underbrace{I}_{-S'/S} \Rightarrow \left(\frac{-S'}{S}\right)' = -S' + \frac{S'}{S}$$

$$\text{On a donc : } \boxed{\left(\frac{-S'}{S}\right)' = -S' + \frac{S'}{S}}$$

Q19) On a pas de problème pour dériver car les fonctions sont C^∞ et de plus on sait que $\forall x \in \mathbb{R}^+, S(x) > 0$ donc on peut diviser par $S(x)$.

$$\text{Alors } h(x) = \ln(S(x)) - \ln(S_0) = \ln(S(x)) + \ln(2) \text{ et } h'(x) = \frac{S'(x)}{S(x)}$$

$$\text{En intégrant Q18) (comme } S(x) > 0) \text{ on obtient : } \frac{-S'}{S} = -S + \ln(S) + \theta \text{ avec } \theta \in \mathbb{R}$$

$$\text{On a donc : } -h'(x) = -\frac{e^{h(x)}}{2} + h(x) - \ln(S_0) + \theta = -\frac{e^{h(x)}}{2} + h(x) + \ln(2) + \theta \Leftrightarrow (Z)$$

$$\text{Mais } S'(0) = -I(0)S(0) = -\frac{1}{4} \text{ et } S_0 = \frac{1}{2} \text{ donc } h'(0) = \frac{S'(0)}{S(0)} = \frac{-1}{2}, \text{ de plus } h(0) = \ln(1) = 0$$

$$\text{Donc, en évaluant } (Z) \text{ en } x = 0 \quad \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + 0 - \ln(1/2) + \theta \Rightarrow \theta + \ln(2) = 1$$

$$\text{On en déduit : } -h'(x) = -\frac{e^{h(x)}}{2} + h(x) + 1 \Rightarrow h'(x) + h(x) + 1 = \frac{e^{h(x)}}{2} \text{ (} h \text{ solution de } (E))$$

$$\text{De plus } h(0) = 0 \text{ donc } \boxed{h \text{ est bien solution de } (C)}$$

$$\text{Q20) } \bullet \text{ On a : } S_N(x) - S(x) = S_0 e^{y_N(x)} - S_0 e^{y(x)} = S_0 (e^{y_N(x)} - e^{y(x)}) \text{ donc } |S_N(x) - S(x)| \leq \frac{1}{2} |e^{y_N(x)} - e^{y(x)}|$$

• Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $0 < a < b$ alors, comme exp est croissante :

$$e^a \leq e^b \Rightarrow 0 \leq e^b - e^a = e^a(e^{b-a} - 1) = e^a(e^{b-a} - e^0)$$

Par le théorème des accroissements finis : $\exists c \in [0, b-a], e^{b-a} - e^0 = (b-a)e^c$

$$\text{On a alors : } 0 \leq e^b - e^a = e^a(b-a)e^c \text{ mais } c \in [0, b-a] \Rightarrow e^c \leq e^{b-a} \text{ donc } 0 \leq e^b - e^a = e^a(b-a)e^{b-a} \leq (b-a)e^b$$

• En revenant à $|S_N(x) - S(x)| \leq \frac{1}{2} |e^{y_N(x)} - e^{y(x)}|$ on a, avec le point qui précède :

$$|S_N(x) - S(x)| \leq \frac{1}{2} |y_N(x) - y(x)| \exp(\max(y_N(x), y(x)))$$

$$\text{Mais } \max(y_N(x), y(x)) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \times 1 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{M}{2^n} = 2M$$

$$\text{De plus, d'après Q13) : } \|y_N - y\|_{\infty, \mathbb{R}^+} \leq \frac{M}{2^N}$$

$$\text{On a enfin : } |S_N(x) - S(x)| \leq \frac{1}{2} \frac{M}{2^N} \exp(2M)$$

$$\text{En passant au sup, pour } x \in \mathbb{R}^+ : \boxed{\|S_N - S\|_{\infty, \mathbb{R}^+} \leq \frac{Me^{2M}}{2^{N+1}}}$$

Q21) On cherche dans cette question la probabilité pour une personne saine d'être infecté sachant qu'il y a i personne parmi les M qui sont infectées et qu'une personne rencontre K autres personnes.

Pour ne pas être infecté il faut rencontrer uniquement des personnes saines.

Donc $1 - p(i) = \frac{\binom{M-i}{K}}{\binom{M}{K}}$ car

$\binom{M}{K}$ est le nombre de rencontre de K personnes possible

$\binom{M-i}{K}$ est le nombre de rencontre de K personnes non infectées possible

$$\text{On en déduit : } \boxed{p(i) = 1 - \frac{\binom{M-i}{K}}{\binom{M}{K}}}$$

Remarque : question ambiguë, la personne doit-elle être saine ? considère-t-on que l'on peu se rencontrer ...

$$\text{Q22) Par définition : } E(Z) = \sum_{k=0}^M kP(Z = k)$$

(la somme étant finie on est certain de l'existence de $E(Z)$)

Mais par la formule des probabilités totales sur le s.c.e. $\left((\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s, i, r)\right)_{(s,i,r) \in E}$:

$$P(Z = k) = \sum_{(s,i,r) \in E} P\left(Z = k \mid (\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s, i, r)\right) P\left((\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s, i, r)\right)$$

$$\text{Donc } E(Z) = \sum_{k=0}^M k \sum_{(s,i,r) \in E} P\left(Z = k \mid (\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s, i, r)\right) P\left((\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s, i, r)\right)$$

Comme les sommes sont finies, on peut les intervertir et on obtient :

$$\boxed{E(Z) = \sum_{(s,i,r) \in E} \left(\sum_{k=0}^M kP(Z = k \mid (\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s, i, r)) \right) P\left((\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s, i, r)\right)}$$

Q23) Les variables aléatoires en question prennent un nombre finie de valeurs, elles ont donc une espérance finie.

Q24) $\Delta \tilde{R}_n = R_{n+1} - R_n$ représente le nombre de personnes infectées ($\tilde{I}_n = N$) qui se rétablissent entre la journée n et la journée $n + 1$.

Chaque personne ayant, indépendamment des autres une probabilité de ρ de se rétablir, on reconnaît que : $\Delta \tilde{R}_n \Big|_{\tilde{I}_n = N} \hookrightarrow B(N, \rho)$

On utilise Q23) avec $Z = \Delta \tilde{R}_n$ qui ne dépend que de la valeur de $\tilde{I}_n$ donc :

$$\begin{aligned} E(\Delta \tilde{R}_n) &= \sum_{(s,i,r) \in E} \left(\sum_{k=0}^M kP(\Delta \tilde{R}_n = k \mid (\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s, i, r)) \right) P\left((\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s, i, r)\right) \\ \Rightarrow E(\Delta \tilde{R}_n) &= \sum_{i=0}^M \left(\sum_{k=0}^M kP(\Delta \tilde{R}_n = k \mid \tilde{I}_n = i) \right) P\left(\tilde{I}_n = i\right) \end{aligned}$$

Vu que $\Delta \tilde{R}_n \Big|_{\tilde{I}_n = N} \hookrightarrow B(N, \rho)$, on a que : $\sum_{k=0}^M kP(\Delta \tilde{R}_n = k \mid \tilde{I}_n = i) = i\rho$ et donc :

$$E(\Delta \tilde{R}_n) = \sum_{i=0}^M i\rho P\left(\tilde{I}_n = i\right) \text{ et donc } \boxed{E(\Delta \tilde{R}_n) = \rho E(\tilde{I}_n)}$$

Q25) $-\Delta \tilde{S}_n = S_n - S_{n+1}$ représente le nombre de personnes saines qui deviennent infectées entre la journée n et la journée $n + 1$.

Si on sait que $(\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s, i, r)$ alors on sait qu'il y a s personnes saines qui ont, chacune, indépendamment des autres, une probabilité $p(i)$ d'être infecté.

$$\text{Donc } (-\Delta \tilde{S}_n) \Big|_{(\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s, i, r)} \hookrightarrow B(s, p(i)) \text{ et donc : } \boxed{P(\Delta \tilde{S}_n = -k \mid (\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s, i, r)) = \binom{s}{k} (p(i))^k (1 - p(i))^{s-k}}$$

Q26) • On utilise Q23) avec $Z = \Delta\tilde{S}_n$

$$E(\Delta\tilde{S}_n) = \sum_{(s,i,r) \in E} \left(\sum_{k=0}^M (-k) P(\Delta\tilde{S}_n = -k \mid (\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s, i, r)) \right) P((\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s, i, r))$$

$$\Rightarrow E(\Delta\tilde{R}_n) = \sum_{(s,i,r) \in E} \left(\sum_{k=0}^M (-k) \binom{s}{k} (p(i))^k (1-p(i))^{s-k} \right) P((\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s, i, r))$$

Mais $\sum_{k=0}^M \left[\left((-k) \binom{s}{k} (p(i))^k (1-p(i))^{s-k} \right) \right] = - \sum_{k=0}^M \left[\left(k \binom{s}{k} (p(i))^k (1-p(i))^{s-k} \right) \right]$ est l'opposé de l'espérance d'une loi binomiale de paramètre $(s, p(i))$ donc vaut $sp(i)$

$$\text{On a alors : } E(\Delta\tilde{S}_n) = - \sum_{(s,i,r) \in E} sp(i) P((\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s, i, r))$$

$$\text{et donc } \boxed{E(\Delta\tilde{S}_n) = -E(\tilde{S}_n p(\tilde{I}_n))}$$

• Comme $\tilde{S}_n + \tilde{I}_n + \tilde{R}_n = M$ alors on a aussi $\tilde{S}_{n+1} + \tilde{I}_{n+1} + \tilde{R}_{n+1} = M$ et donc $\Delta\tilde{S}_n + \Delta\tilde{I}_n + \Delta\tilde{R}_n = 0$
 Par linéarité de l'espérance on obtient : $E(\Delta\tilde{S}_n) + E(\Delta\tilde{I}_n) + E(\Delta\tilde{R}_n) = 0$
 qui donne $E(\Delta\tilde{I}_n) = -E(\Delta\tilde{S}_n) - E(\Delta\tilde{R}_n)$

En utilisant les résultats de Q24) et le début de cette question Q26) :

$$\boxed{E(\Delta\tilde{I}_n) = E(\tilde{S}_n p(\tilde{I}_n)) - \rho E(\tilde{I}_n)}$$