Correction du devoir à la maison de Mathématiques n°11

EXERCICE 1 : e3a PC 2021 : exercice 1

1.) Comme on a : $\begin{cases} \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n} \text{ est une série alternée} \\ (\frac{1}{n}) \text{ est décroissante} \\ \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$, on peut appliquer le théorème spécial à certaines séries alternées et on en déduit que $\boxed{\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n} \text{ converge.}}$

2.1) Posons $\forall n \in \mathbb{N}$: $\begin{array}{cccc} f_n & : & [0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & x^{2n}(1-x) \end{array}$

- f_n est clairement intégrable sur $[0,1]$ donc sur $[0,1[$ comme une fonction continue.

- Pour tout $x \in [0,1[$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^{2n}(1-x)$ qui est une série géométrique convergente de raison $\left|x^2\right| < 1$

On a alors : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \frac{1-x}{1-x^2} = \frac{1}{1+x}$

La série de fonctions $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge donc simplement sur $[0,1[$ vers $\begin{array}{cccc} f & : & [0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \frac{1}{1+x} \end{array}$

- De plus $\int\limits_0^1 |f_n(x)|\, dx = \int\limits_0^1 f_n(x)dx = \int\limits_0^1 x^{2n}(1-x)dx = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \sim \frac{1}{4n^2} > 0$

Comme $\sum \frac{1}{4n^2}$ est convergente, alors, par la règle de l'équivalent pour les séries à termes positifs $\sum \int\limits_0^1 |f_n(x)|\, dx$ est convergente.

On a donc : $\begin{cases} \text{les } f_n \text{ sont continues par morceaux et intégrables sur } [0,1[\\ \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ converge simplement vers } f \text{ sur } [0,1[\text{ avec } f \text{ continue par morceaux sur } [0,1[\\ \sum \int\limits_0^1 |f_n(x)|\, dx \text{ est convergente} \end{cases}$

On a donc par le théorème d'intégration terme à terme : f est intégrable sur $[0,1[$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)dx$ est convergente et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)dx = \int\limits_0^1 \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)dx = \int\limits_0^1 f(x)dx = \int\limits_0^1 \frac{1}{1+x}dx$

On a donc bien la convergence de la série et des intégrales et on a l'égalité : $\boxed{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \Big(\int\limits_0^1 x^{2n}(1-x)dx \Big) = \int\limits_0^1 \frac{1}{1+x}dx}$

2.2.) • $\int\limits_0^1 \frac{1}{1+x}dx = [ln(1+x)]_0^1 = ln(2)$

- $\sum\limits_{n=0}^{N} \int\limits_0^1 x^{2n}(1-x)dx = \sum\limits_{n=0}^{N} (\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}) = \sum\limits_{k=1}^{2N+2} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$

En faisant tendre N vers $+\infty$ on obtient : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int\limits_0^1 x^{2n}(1-x)dx = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

- En regroupant les deux résultats précédents on obtient : $\boxed{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = ln(2)}$

3.) φ est une série entière.

On sait d'après le cours que : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} = ln(1+x)$ sur $]-1,1[$ et que le rayon de convergence vaut 1.

Donc φ est définie sur $]-1,1[$ et n'est pas définie sur $\mathbb{R}\backslash]-1,1[$

En $x=1$: $\varphi(1) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = ln(2)$ est convergente d'après le 2.)

En $x=-1$: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente.

On a donc : $\boxed{\text{le domaine de définition de } \varphi \text{ est }]-1,1] \text{ et } \varphi(1) = ln(2)}$

4.1) $\int\limits_0^1 \frac{1-x}{1+x^2}dx = [arctan(x) - \frac{1}{2}ln(1+x^2)]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{ln(2)}{2}$

On a donc : $\boxed{\int\limits_0^1 \frac{1-x}{1+x^2}dx = \frac{\pi - 2ln(2)}{4}}$

4.2) $\left|\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}\right| \sim \frac{1}{4n^2} > 0$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente.

Donc, par la règle de l'équivalent, S est absolument convergente donc convergente.

$\boxed{\text{L'existence de } S \text{ est donc justifiée.}}$

On va calculer S de deux manières.

• Méthode 1 : on commence par calculer l'intégrale dans la somme.

$S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\int\limits_0^1 x^{2n}(1-x)dx\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}\right)$ (calcul intermédiaire déjà fait en 2.2)

• Méthode 2 : on applique le théorème d'intégration terme à terme comme à la question 2.1).

On a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n f_n(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-x^2)^n(1-x) = \frac{1-x}{1+x^2}$ sur $[0,1[$ comme somme d'une suite géométrique.

On reprend le travail effecctué à la question 2.1) et on a :

$$\begin{cases} \text{les } (-1)^n f_n \text{ sont continues par morceaux et intégrables sur } [0,1[\\ \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n f_n \text{ converge simplement vers } x \mapsto \frac{1-x}{1+x^2} \text{ sur } [0,1[\text{ qui est continue par morceaux sur } [0,1[\\ \sum \int\limits_0^1 |(-1)^n f_n(x)|\, dx \text{ est convergente} \end{cases}$$

On a donc par le théorème d'intégration terme à terme :

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\int\limits_0^1(-1)^n f_n(x)dx = \int\limits_0^1\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n f_n(x)dx = \int\limits_0^1 \frac{1-x}{1+x^2}dx = \frac{\pi-2ln(2)}{4}$

• En regroupant les résultats des deux méthodes on a : $\boxed{S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}\right) = \frac{\pi-2ln(2)}{4}}$

EXERCICE 2 : exercice oral 2025 - ccINP - Mathis

1) On pose $I =]0,1]$ et $\forall t \in I$, $f(t) = \frac{ln(t)}{1+t}$

f est continue sur $]0,1]$, A pose problème seulement en 0.

Au voisinage de $t=0$:

$f(t) \sim ln(t)$ et $t \mapsto ln(t)$ est intégrable sur $]0,1]$ d'après le cours.

Donc, par équivalent f est intégrable sur $]0,1]$ et donc $\boxed{A \text{ est convergente.}}$

2) On utilise le développement en série entière du cours : $\forall t \in [0,1[\ ,\ \frac{1}{1+t} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n$ et on a :

$\forall t \in]0,1[\ ,\ f(t) = ln(t)\frac{1}{1+t} = ln(t) \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n ln(t) t^n$

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$: $\begin{array}{cccc} f_n &]0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & (-1)^n ln(t) t^n \end{array}$

On a $\forall t \in]0,1[\ ,\ |f_n(t)| = -t^n ln(t)$

Pour $n = 0$ $t \mapsto -ln(t)$ est intégrable d'après le cours.

Pour $n \geq 1$, $f_n(t) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$, donc f_n est prolongeable par continuité en 0 et donc f_n est intégrable sur $]0,1[$

$\int\limits_0^1 |f_n(t)|\, dt$

$= \int\limits_0^1 -t^n ln(t) dt$ on intègre par partie (justifié car les limites aux bornes du crochet existe dans $\mathbb{R}$)

$= [\frac{-t^{n+1}}{n+1} ln(t)]_0^1 + \int\limits_0^1 \frac{t^{n+1}}{n+1}\frac{1}{t} dt = \int\limits_0^1 \frac{t^n}{n+1} dt = \frac{1}{(n+1)^2}$

Comme $\sum \frac{1}{(n+1)^2}$ est convergente alors $\sum \int\limits_0^1 |f_n(t)|\, dt$ est convergente.

On a alors : $\begin{cases} \text{les } f_n \text{ sont continues par morceaux et intégrables sur }]0,1[\\ \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ converge simplement vers } f \text{ sur }]0,1[\text{ qui est continue par morceaux sur }]0,1[\\ \sum \int\limits_0^1 |f_n(t) dt| \text{ est convergente} \end{cases}$

On peut donc appliquer le théorème d'intégration terme à terme et on a :

$\int\limits_0^{+\infty} \big(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\big) dt = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int\limits_0^{+\infty} f_n(t) dt$

$\Rightarrow \int\limits_0^{+\infty} f(t) dt = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2} dt$ comme f_n est du même signe que $(-1)^{n+1}$

$\Rightarrow A = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} dt$

- On sait que : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, on a donc : $A + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1+(-1)^n}{n^2}$

On remarque que : $1 + (-1)^n = 0$ si n impair et $1 + (-1)^n = 2$ si n pair $(n = 2k)$. Alors : comme la série est absolument convergente par Riemann, on peut sommer par paquets en séparant les termes paires et les termes impaires. On obtient :

$A + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 0 + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{(2k)^2}\ ) \Rightarrow A + \frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \Rightarrow A + \frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{2}\frac{\pi^2}{6} \Rightarrow A = \frac{-\pi^2}{12}$

On a donc : $\boxed{A = \frac{-\pi^2}{12}}$

EXERCICE 3 : exercice oral 2025 - Mines-Télécom - Akram

a) Posons : $\begin{array}{cccc} F & : & \mathbb{R}\times I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,t) & \mapsto & \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}} \end{array}$ avec $I = [0,+\infty[$ pour avoir : $f(x) = \int\limits_I F(x,t)dt$

• Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto F(x,t)$ est continue sur I, l'intégrale $f(x)$ pose donc problème en $+\infty$.

• Si $x < 0$ alors $\lim\limits_{t\to+\infty} F(x,t) = +\infty$, donc $F(x,t) \geq 1 > 0$ au voisinage de $t = +\infty$, donc $\int\limits_I F(x,t)dt$ est divergente.

• Si $x = 0$: $F(x,t) = F(0,t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \sim \frac{1}{t} > 0$, et comme $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{t}dt$ est divergente, par équivalent, $f(0)$ est divergente.

• Si $x > 0$, $F(x,t) = o(\frac{1}{t^2})$ pour t au voisinage de $+\infty$ et donc, par négligeabilité, comme $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, $f(x)$ est convergente.

• BILAN : $\boxed{\text{Le domaine de } f \text{ est } D =]0,+\infty[}$

b) Soit $a > 0$.

F est C^∞ sur son domaine et $\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times I$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\frac{\partial^k F}{\partial x^k}(x,t) = \frac{(-t)^k}{\sqrt{1+t^2}}e^{-xt}$

On a $\forall (x,t) \in [a,+\infty[\times I$, $\left|\frac{\partial^k F}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq \frac{t^k}{\sqrt{1+t^2}}e^{-at}$

Comme $t \mapsto \frac{t^k}{\sqrt{1+t^2}}e^{-at}$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$ et que au voisinage de $+\infty$:
$\frac{t^k}{\sqrt{1+t^2}}e^{-at} = o(\frac{1}{t^2})$ alors $t \mapsto \frac{t^k}{\sqrt{1+t^2}}e^{-at}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ donc par comparaison :
$t \mapsto \frac{\partial^k F}{\partial x^k}(x,t)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a : $\begin{cases} \forall t \in [0,+\infty[\ ,\ x \mapsto f(x,t) \text{ est de classe } C^n \text{ sur } [a,+\infty[\\ \forall x \in [a,+\infty[\ ,\ \forall k \in [\![0,n-1]\!]\ ,\ t \mapsto \frac{\partial^k F}{\partial x^k}(x,t) \text{ est intégrable sur } [0,+\infty[\\ \forall x \in [a,+\infty[\ ,\ t \mapsto \frac{\partial^n F}{\partial x^n}(x,t) \text{ est continue par morceaux sur } [0,+\infty[\\ \forall (x,t) \in [a,+\infty[\times[0,+\infty[\ ,\ \left|\frac{\partial^k F}{\partial x^n}(x,t)\right| \leq \frac{t^n}{\sqrt{1+t^2}}e^{-at} \\ \text{ avec } t \mapsto \frac{t^n}{\sqrt{1+t^2}}e^{-at} \text{ intégrable sur } [0,+\infty[\end{cases}$

On peut donc appliquer la généralisation du théorème d'intégration terme à terme et on en déduit que f est de classe C^n sur $[a,+\infty[$

Comme $\bigcup\limits_{a>0} [a,+\infty[= D$ et que la dérivation est une notion locale alors f est de classe C^n sur D.
Comme ce résultat est valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ alors f est C^∞ sur D.

Bilan : $\boxed{f \text{ est } C^\infty \text{ sur } D}$

c) On a : $\begin{cases} \forall t \in]0,+\infty[\ ,\ F(x,t) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \\ t \mapsto 0 \text{ est continue par morceaux sur }]0,+\infty[\\ \forall (x,t) \in [1,+\infty[\times]0,+\infty[\ ,\ |F(x,t)| \leq \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}e^{-t} \\ \text{ avec } t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}e^{-t} \text{ intégrable sur }]0,+\infty[\end{cases}$

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée à paramètre continue et on obtient :

$$\lim_{x\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} F(x,t)dt = \int\limits_0^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} F(x,t)dt$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = \int\limits_0^{+\infty} 0dt = 0$$

On a donc : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$

EXERCICE 4 : exercice oral 2025 - ccINP - Matéo

1) Tirer une boule verte ou non est une épreuve de Bernoulli de paramètre p.
Dans ce 1) on effectue cette épreuve jusqu'à l'obtention d'un premier succès.
On reconnaît donc une loi géométrique de paramètre p et on a :
$\boxed{X \hookrightarrow G(p) \text{ et } E(X) = \frac{1}{p}}$

2) • On remarque que : $Y(\Omega) = [\![2; +\infty[\![$ ($+\infty$ impossible) et que :
$\forall k \in Y(\Omega)\ ,\ (Y = k) = \bigcup\limits_{i \in [\![1, k-1]\!]} \Big((\bigcap\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} V_j) \cap \overline{V_i} \cap V_k \Big)$
avec V_i ="tirer une boule verte au i-ième tirage"

Par incompatibilité on a : $P(Y = k) = \sum\limits_{i=1}^{k-1} P\Big((\bigcap\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} V_j) \cap \overline{V_i} \cap V_k \Big)$

Puis, par indépendance : $P(Y = k) = \sum\limits_{i=1}^{k-1} \prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} P(V_j) \big) P(V_i) P(V_k)$

$\Rightarrow P(Y = k) = \sum\limits_{i=1}^{k-1} (1-p)^{k-2} p^2 = (k-1)(1-p)^{k-2} p^2$

La loi de Y est donc donnée par :
$\boxed{Y(\Omega) = [\![2, +\infty]\!] \text{ et } \forall k \in Y(\Omega)\ ,\ P(Y = k) = (k-1)(1-p)^{k-2} p^2}$

• On a alors $E(Y) = \sum\limits_{k=2}^{+\infty} k P(Y = k) = \sum\limits_{k=2}^{+\infty} k(k-1)(1-p)^{k-2} p^2$

Mais d'après le cours : $\forall x \in]-1, 1[\ ,\ \frac{1}{1-x} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} x^k$
Comme on a une série entière, $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ est C^2 sur $]-1, 1[$ et on peut dériver deux fois termes à termes. On en déduit : $\forall x]-1, 1[\ ,\ \frac{2}{(1-x)^3} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} k(k-1) x^{k-2}$
On peut appliquer ceci en $1 - p \in]-1, 1[$ et on a : $E(Y) = p^2 \frac{2}{(1-(1-p))^3} = \frac{2p^2}{p^3} = \frac{2}{p}$

$\boxed{Y \text{ admet une espérance et } E(Y) = \frac{2}{p}}$

MINES-PONTS, PSI, 2025, math II

Q1) • (E_ℓ) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients **continues**, d'après le cours, le problème de Cauchy $\boxed{(C_\ell) \text{ admet une unique solution.}}$

• On a : $(E_\ell) \Leftrightarrow u'(x) + \frac{1}{2}u(x) = \frac{-1}{2}$

Une solution particulière évidente est alors : $x \mapsto -1$

On résout l'équation homogène : $(E_\ell^0) \Leftrightarrow u'(x) + \frac{1}{2}u(x) = 0 \Leftrightarrow u(x) = aexp(\frac{-x}{2})$ avec $a \in \mathbb{R}$ puisque l'on a une EDL_1 homogène à coefficient constants.

(E_ℓ) étant linéaire la solution générale s'écrit : solution particulière + solution de l'équation homogène, donc sous la forme : $u(x) = -1 + ae^{-x/2}$

La condition initiale $u(0) = 0$ donne $-1 + a = 0 \Leftrightarrow a = 1$

$$\boxed{(C_\ell) \text{ admet une unique solution : } \begin{array}{cccc} u & : & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & e^{-x/2} - 1 \end{array}}$$

• u est C^∞ et $\forall x \geq 0$, $u'(x) = -\frac{1}{2}e^{-x/2} \leq 0$

On en déduit le tableau de variation suivant :

x	0		$+\infty$
$u(x)$	0	$\searrow$	-1

Q2) Si $x \mapsto \gamma$ est une solution constante de (E_ℓ) alors : $0 + \frac{1}{2}\gamma = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow \gamma = -1$
On remarque que : $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = -1$.

Il y a donc $\boxed{\text{une unique solution constante de } (E_\ell) \text{ qui vaut } \gamma = -1 \text{ et } \lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = -1 = \gamma}$

Q3) • On commence par remarquer que : si $x \mapsto c$ est une solution constante de (E) alors :
$0 + c + 1 = \frac{1}{2}e^c \Leftrightarrow c + 1 - \frac{e^c}{2} = 0$

• Soit y la solution de (C).
Alors $y'(x) = -1 - y(x) + \frac{1}{2}e^{y(x)}$.
Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = c$ alors, par continuité : $\lim\limits_{x \to +\infty} y'(x) = -1 - c + \frac{1}{2}e^c$

y' admet donc une limite en $+\infty$ et on pose : $\lambda = \lim\limits_{x \to +\infty} y'(x)$

Par l'absurde : $\boxed{\text{Si}}$ $\lambda > 0$
Alors $\exists x_0 > 0$, $\forall x \geq x_0$, $y'(x) \geq \frac{\lambda}{2}$
Pour $x \geq x_0$: $y(x) - y(x_0) = \int\limits_{x_0}^{x} \underbrace{y'(t)}_{\geq \frac{\lambda}{2}} dt \geq (x - x_0)\frac{\lambda}{2} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ On aurait alors $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = +\infty$ ce qui contredit $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = c$
$\boxed{\text{absurde}}$ donc $\lambda \leq 0$
On démontrer de même que $\lambda \geq 0$ et finalement $\lambda = 0$ et donc $-1 - c + \frac{1}{2}e^c = 0$

Avec la remarque du début de question : $\boxed{x \mapsto c \text{ est une solution constante de } (E)}$

• Considérons l'équation $c + 1 - \frac{e^c}{2}$ et posons donc $\forall t \geq 0$, $a(t) = t + 1 - \frac{e^t}{2}$
Alors a est C^∞ sur $\mathbb{R}^+$ et $a'(t) = 1 - \frac{e^t}{2}$
$a'(t) = 0 \Leftrightarrow e^t = 2 \Leftrightarrow t = ln(2)$

On en déduit le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$ln(2)$		$+\infty$
$a'(x)$		$+$	0	-	
$a(x)$			$ln(2) > 0$		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	$-\infty$				$-\infty$

Avec le tableau de variation et le fait que $a(0) = \frac{1}{2} > 0$, on a que $a(t) = 0$ admet deux solutions c_1 et c_2 telles que : $c_1 < 0 < c_2$
Avec la remarque du début, ces valeurs correspondent à deux solutions constantes de (E).
Comme $y(0) = 0$ et que y est décroissante alors $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) \leq 0$ donc $c \leq 0$ et donc $c = c_1$.

Bilan : $\boxed{(E) \text{ admet exactement deux solutions constantes } c_1 \text{ et } c_2 \text{ et } c = c_1}$

Q4) $\lambda_n = O(n)$ donc $\exists M' > 0\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ |\lambda_n| \leq nM'$
Donc $\left|\lambda_n^k a_n\right| \leq (nM')^k \frac{M}{2^n} = \frac{MM'^k n^k}{2^n}$
Par comparaison exp-puissance on en déduit $\lambda_n^k a_n = o(\frac{1}{n^2})$ et comme $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série à termes positifs convergente alors, par négligeabilité : $\sum \lambda_n^k a_n$ est convergente et donc $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}\ ,\ b_k \text{ est bien défini.}}$

Q5) • Pour $x \in \mathbb{R}^+$, comme $\lambda_n \geq 0$ alors $0 \leq e^{-\lambda_n x} \leq 1$ et donc $|f_n(x)| \leq |a_n| \leq \frac{M}{2^n}$
On en déduit $||f_n||_{\infty,\mathbb{R}^+} = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^+} |f_n(x)| \leq \frac{M}{2^n}$
Comme $\sum \frac{M}{2^n}$ est une série géométrique convergente alors par comparaison : $\sum ||f_n||_{\infty,\mathbb{R}^+}$ est convergente.
La série de fonctions $\sum f_n$ converge donc normalement sur $\mathbb{R}^+$, et donc $\boxed{\sum f_n \text{ converge donc normalement sur } \mathbb{R}^+}$

• Comme les f_n sont continues et que la continuité est conservée par convergence uniforme alors : $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}^+}$

Q6) • Par définition : $f(0) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n = a_0 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.
Comme $\lambda_n^0 = 0$ alors : $f(0) = a_0 + b_0$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f_0(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} a_0 = a_0$
Comme (λ_n) est une suite strictement croissante et que $\lambda_0 = 0$, alors $\lambda_n > 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} a_n e^{-\lambda_n x} = 0$

$$\text{On a : } \begin{cases} \sum f_n \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } \mathbb{R}^+ \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} a_0 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n > 0 \end{cases} \end{cases}$$

Par le théorème de la double limite on a donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = a_0$

• Bilan : $\boxed{f(0) = a_0 + b_0 \text{ et } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a_0}$

Q7) • Les fonctions f_n sont C^∞ et $\forall i \in \mathbb{N}\ ,\ f^{(i)}(x) = a_n(-\lambda_n)^k e^{-\lambda_n x}$
Comme en Q5) on montrer que $\sum f^{(i)}$ converge normalement et donc uniformément et simplement sur $\mathbb{R}^+$

$$\text{On a donc, pour } k \in \mathbb{N}^* : \begin{cases} \text{les fonctions } f_n \text{ sont de classe } C^k \text{ sur } \mathbb{R}^+ \\ \forall i \in [\![0, k-1]\!]\ ,\ \sum f^{(i)} \text{ converge simplement sur } \mathbb{R}^+ \\ \sum f^{(k)} \text{ converge uniformément sur } \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

Donc, par théorème sur les séries de fonctions : $\boxed{f \text{ est } C^k \text{ sur } \mathbb{R}^+ \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}^+\ ,\ f^{(k)}(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(-\lambda_n)^k e^{-\lambda_n x}}$

• Alors en $x = 0$: $f^{(k)}(0) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(-\lambda_n)^k = (-1)^k \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \lambda_n^k = (-1)^k b_k$

Donc $\boxed{f^{(k)}(0) = (-1)^k b_k}$

Q8) On suppose f nulle. Montrons alors par récurrence sur n que : $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ a_n = 0$

Initialisation :
D'après Q6) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a_0$ et comme f est nulle alors $a_0 = 0$

Hérédité : Soit n$\geq$ 1. On suppose que : $\forall k \in [\![0, n-1]\!]\ ,\ a_k = 0$

Alors $f(x) = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} a_k e^{-\lambda_k x} = e^{-\lambda_n x}\big(a_n + \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k e^{-(\lambda_k - \lambda_n)x}\big)$
Comme f est nulle alors : $a_n + \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k e^{-(\lambda_k - \lambda_n)x} = 0$
Comme (λ_n) est strictement croissante alors $\lambda_k - \lambda_n > 0$ pour $k \geq n+1$ et on peut démontrer avec le théorème de la double limite, comme en Q6) que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k e^{-(\lambda_k - \lambda_n)x} = 0$.
Comme on avait $a_n + \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k e^{-(\lambda_k - \lambda_n)x} = 0$, on en déduit $a_n = 0$

Conclusion : $\boxed{\text{Si } f \text{ est nulle alors : } \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ a_n = 0}$

Q9) On a vu en Q6) que : $y(0) = a_0 + b_0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = a_0 = c$

Comme $y(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = c$ (admis après Q2)) on en déduit : $\boxed{b_0 = -c \text{ et } a_0 = c}$

Q10) On a vu que $b_1 = -y'(0)$ en Q7).
Comme y est solution de (E) alors : $y'(0) + y(0) + 1 = \frac{1}{2}e^{-y(0)} \Rightarrow Y'(0) + 0 + 1 = \frac{1}{2}e^0 \Rightarrow y'(0) = \frac{-1}{2}$

On a donc : $\boxed{b_1 = \frac{1}{2}}$

Q11) • Pour commencer, on définit la suite $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par $\begin{cases} d_0 = 1 \\ \forall k \in \mathbb{N}^*\ ,\ d_k = \sum\limits_{i=1}^{k} \binom{k-1}{i-1} d_{k-i} b_i \end{cases}$
On pose aussi : $\forall k \in \mathbb{N}\ ,\ d'_k = (-1)^k g^{(k)}(0)$ et on va essayer de montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}\ ,\ d_k = d'_k$

• y est C^∞ et donc g aussi. Comme $g(x) = e^{y(x)}$ alors : $g'(x) = y'(x)e^{y(x)} \Rightarrow g'(x) = y'(x)g(x)$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, dérivons cette formule $k-1$ fois avec la formule de Leibniz. On obtient :
$g^{(k)}(x) = \sum\limits_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} (y')^{(j)}(x) g^{(k-1-j)}(x)$
On fait le changement d'indice $i = j+1$ et on a : $g^{(k)}(x) = \sum\limits_{i=1}^{k} \binom{k-1}{i-1} (y')^{(i-1)}(x) g^{(k-i)}(x)$
ou encore $g^{(k)}(x) = \sum\limits_{i=1}^{k} \binom{k-1}{i-1} y^i(x) g^{(k-i)}(x)$

En évaluant en $x = 0$, puisque $y^i(0) = (-1)^i b_i$ (par Q7)) et $g^{(k-i)}(0) = (-1)^{k-i} d'_{k-i}$:
On obtient : $(-1)^k d'_k = \sum\limits_{i=1}^{k} \binom{k-1}{i-1} (-1)^i b_i (-1)^{k-i} d'_{k-i}$
$\Rightarrow (-1)^k d'_k = (-1)^k \sum\limits_{i=1}^{k} \binom{k-1}{i-1} b_i d'_{k-i} \Rightarrow d'_k = \sum\limits_{i=1}^{k} \binom{k-1}{i-1} b_i d'_{k-i}$

De plus $g(0) = exp(y(0)) = exp(0) = 1$ donc $d'_0 = 1$

Finalement $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(d'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ suivent la même relation de récurrence, avec la même condition initiale.

Comme ceci définit de manière unique une suite. On peut affirmer que :

$\forall k \in \mathbb{N}\ ,\ d_k = d'_k$ et donc que $g^{(k)}(0) = (-1)^k d_k$ avec la suite (d_k) définie dans l'énonce.

Bilan : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}\ ,\ g^{(k)}(0) = (-1)^k d_k}$

Q12) On a, d'après (E) : $y'(x) + y(x) + 1 = \frac{1}{2}g(x)$, en dérivant $k \in \mathbb{N}^*$ fois : $y^{(k+1)}(x) + y^{(k)}(x) + 0 = \frac{1}{2}g^{(k)}(x)$, en évaluant en $x = 0$: $(-1)^{k+1}b_{k+1} + (-1)^k b_k = \frac{1}{2}(-1)^k d_k \Rightarrow -b_{k+1} + b_k = \frac{1}{2}d_k \Rightarrow b_{k+1} = b_k - \frac{1}{2}d_k$

On a donc : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*\ ,\ b_{k+1} = b_k - \frac{1}{2}d_k}$

Q13) • $\forall x \in \mathbb{R}^+\ ,\ y(x) - y_N(x) = \sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} a_n e^{-\lambda_n x}$

Mais $0 \leq e^{-\lambda_n x} \leq 1$ et $|a_n| \leq \frac{M}{2^n}$ donc : $|y(x) - y_N(x)| \leq \sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} \frac{M}{2^n} = \frac{M}{2^{N+1}} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{M}{2^N}$

En passant au sup sur $\mathbb{R}^+$, on obtient : $\boxed{||y_N - y||_{\infty,\mathbb{R}^+} \leq \frac{M}{2^N}}$

• On déduit de l'inégalité précédente et par comparaison que : $\lim\limits_{N\to+\infty} ||y_N - y||_{\infty,\mathbb{R}^+} = 0$ et donc que :

$\boxed{(y_N) \text{ converge uniformément vers } y \text{ sur } R^+}$

• Si on prend $J = [a, +\infty[$ avec $a > 0$, alors pour $N \in \mathbb{N}$ et par croissance de (λ_n) :
$|y(x) - y_N(x)| \leq \sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} |a_n|\, e^{-\lambda_{N+1}a}$ donc $||y_N - y||_{\infty,\mathbb{R}^+} \leq e^{-\lambda_{N+1}a}\frac{M}{2^N}$ qui est une majoration plus fine.

Q14) En écrivant matriciellement les équations : $\beta_k = \sum\limits_{n=1}^{N} \lambda_n^k a_n$ on a :

$$\boxed{VA = B \text{ avec } V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_N \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_N^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{N-1} & \lambda_2^{N-1} & \dots & \lambda_N^{N-1} \end{pmatrix}}$$

Q15) On reconnaît en V une matrice de Vandermonde qui est inversible car les λ_k sont distincts puisque (λ_n) est strictement croissante.
On a donc $A = V^{-1}B$, donc $\boxed{VA = B \text{ admet une unique solution.}}$

Q16) • Analyse :
Vu que $S(0) = 0$ on peut supposer que $S(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ donc que $I'(x) = -I(x) \Rightarrow I(x) = I_0 e^{-x}$
Puis que : $R'(x) = I_0 e^{-x} \Rightarrow R(x) = R_0 + I_0 - I_0 e^{-x}$

• Synthèse :

On pose $\forall x \in \mathbb{R}^+\ ,\ \begin{cases} S(x) = 0 \\ I(x) = I_0 e^{-x} \\ R(x) = R_0 + I_0 - I_0 e^{-x} \end{cases}$
Alors $I'(x) = 0$, $I'(x) = -I_0 e^{-x} = -I(x) = I(x)S(x) - I(x)$ et $R'(x) = I_0 e^{-x} = I(x)$
De plus $S(0) = 0 = S_0$, $I(0) = I_0$ et $R(0) = R_0$.
Donc (S, I, R) est bien solution de (F) et c'est la bonne solution car on sait qu'elle est unique.

Bilan : $\boxed{\text{Si } S_0 = 0 \text{ alors : } \forall x \in \mathbb{R}^+ \ , \ \begin{cases} S(x) = 0 \\ I(x) = I_0 e^{-x} \\ R(x) = R_0 + I_0 - I_0 e^{-x} \end{cases}}$

Q17) Avec le théorème admis et la question Q16), on a que si $\exists x_0 \in \mathbb{R}^+ \ , \ S(x_0) = 0$ alors $\forall x \in \mathbb{R}^+ \ , \ S(x) = 0$
On en déduit que si $S(0) = S_0 > 0$ donc $S_0 \neq 0$ alors $\forall x \in \mathbb{R}^+ \ , \ S(x) \neq 0$
Comme S ne s'annule pas et que S est continue, alors, par le TVI, S est de signe constant et comme $S(0) > 0$, alors S est toujours strictement positive.

Bilan : $\boxed{\text{Si } S_0 > 0 \text{ alors } S \text{ ne s'annule jamais et } S \text{ est toujours strictement positive.}}$

Q18) Comme $S, I, R \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ alors : $(F) \Rightarrow S' = -IS \Rightarrow \frac{-S'}{S} = I$ (on peut diviser par S grâce à la remarque ci-dessus)

En dérivant : $\left(\frac{-S'}{S}\right)' = I' = \underbrace{IS}_{-S'} - \underbrace{I}_{-S'/S} \Rightarrow \left(\frac{-S'}{S}\right)' = -S' + \frac{S'}{S}$

On a donc : $\boxed{\left(\frac{-S'}{S}\right)' = -S' + \frac{S'}{S}}$

Q19) On a pas de problème pour dériver car les fonctions sont C^∞ et de plus on sait que $\forall x \in \mathbb{R}^+ \ , \ S(x) > 0$ donc on peut diviser par $S(x)$.

Alors $h(x) = ln(S(x)) - ln(S_0) = ln(S(x)) + ln(2)$ et $h'(x) = \frac{S'(x)}{S(x)}$

En intégrant Q18) (comme $S(x) > 0$) on obtient : $\frac{-S'}{S} = -S + ln(S) + \theta$ avec $\theta \in \mathbb{R}$

On a donc : $-h'(x) = -\frac{e^{h(x)}}{2} + h(x) - ln(S_0) + \theta = -\frac{e^{h(x)}}{2} + h(x) + ln(2) + \theta \Leftrightarrow (Z)$

Mais $S'(0) = -I(0)S(0) = -\frac{1}{4}$ et $S_0 = \frac{1}{2}$ donc $h'(0) = \frac{S'(0)}{S(0)} = \frac{-1}{2}$, de plus $h(0) = ln(1) = 0$

Donc, en évaluant (Z) en $x = 0$ $\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + 0 - ln(1/2) + \theta \Rightarrow \theta + ln(2) = 1$

On en déduit : $-h'(x) = -\frac{e^{h(x)}}{2} + h(x) + 1 \Rightarrow h'(x) + h(x) + 1 = \frac{e^{h(x)}}{2}$ (h solution de (E))

De plus $h(0) = 0$ donc $\boxed{h \text{ est bien solution de } (C)}$

Q20) • On a : $S_N(x) - S(x) = S_0 e^{y_N(x)} - S_0 e^{y(x)} = S_0(e^{y_N(x)} - e^{y(x)})$ donc $|S_N(x) - S(x)| \leq \frac{1}{2}\left|e^{y_N(x)} - e^{y(x)}\right|$

• Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $0 < a < b$ alors, comme exp est croissante :
$e^a \leq e^b \Rightarrow 0 \leq e^b - e^a = e^a(e^{b-a} - 1) = e^a(e^{b-a} - e^0)$
Par le théorème des accroissements finis : $\exists c \in [0, b-a] \ , \ e^{b-a} - e^0 = (b-a)e^c$
On a alors : $0 \leq e^b - e^a = e^a(b-a)e^c$ mais $c \in [0, b-a] \Rightarrow e^c \leq e^{b-a}$ donc $0 \leq e^b - e^a = e^a(b-a)e^{b-a} \leq (b-a)e^b$

• En revenant à $|S_N(x) - S(x)| \leq \frac{1}{2}\left|e^{y_N(x)} - e^{y(x)}\right|$ on a, avec le point qui précède :
$|S_N(x) - S(x)| \leq \frac{1}{2}|y_N(x) - y(x)|\, exp(max(y_N(x), y(x))$
Mais $max(y_N(x), y(x) \leq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_n| \times 1 \leq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{M}{2^n} = 2M$
De plus, d'après Q13) : $||y_N - y||_{\infty, \mathbb{R}^+} \leq \frac{M}{2^N}$

On a enfin : $|S_N(x) - S(x)| \leq \frac{1}{2}\frac{M}{2^N} exp(2M)$

En passant au sup, pour $x \in \mathbb{R}^+$: $\boxed{||S_n - S||_{\infty, \mathbb{R}^+} \leq \frac{Me^{2M}}{2^{N+1}}}$

Q21) On cherche dans cette question la probabilité pour une personne saine d'être infecté sachant qu'il y a i personne parmi les M qui sont infectées et qu'une personne rencontre K autre personnes.
Pour ne pas être infecté il faut rencontrer uniquement des personnes saines.
Donc $1-p(i)=\frac{\binom{M-i}{K}}{\binom{M}{K}}$ car
$\binom{M}{K}$ est le nombre de rencontre de K personnes possible
$\binom{M-i}{K}$ est le nombre de rencontre de K personnes non infectées possible

On en déduit : $\boxed{p(i)=1-\frac{\binom{M-i}{K}}{\binom{M}{K}}}$

Remarque : question ambigüe, la personne doit-elle être saine ? considére-t-on que l'on peu se rencontrer ...

Q22) Par définition : $E(Z)=\sum\limits_{k=0}^{M} kP(Z=k)$
(la somme étant finie on est certain de l'existence de $E(Z)$)

Mais par la formule des probabilités totales sur le s.c.e. $\Big((\tilde{S_n},\tilde{I_n},\tilde{R_n})=(s,i,r)\Big)_{(s,i,r)\in E}$:
$P(Z=k)=\sum\limits_{(s,i,r)\in E} P\Big(Z=k\Big|(\tilde{S_n},\tilde{I_n},\tilde{R_n})=(s,i,r)\Big)P\Big((\tilde{S_n},\tilde{I_n},\tilde{R_n})=(s,i,r)\Big)$

Donc $E(Z)=\sum\limits_{k=0}^{M} k\sum\limits_{(s,i,r)\in E} P\Big(Z=k\Big|(\tilde{S_n},\tilde{I_n},\tilde{R_n})=(s,i,r)\Big)P\Big((\tilde{S_n},\tilde{I_n},\tilde{R_n})=(s,i,r)\Big)$

Comme les sommes sont finies, on peut les intervertir et on obtient :

$$\boxed{E(Z)=\sum_{(s,i,r)\in E}\Big(\sum_{k=0}^{M} kP\big(Z=k\Big|(\tilde{S_n},\tilde{I_n},\tilde{R_n})=(s,i,r)\big)\Big)P\Big((\tilde{S_n},\tilde{I_n},\tilde{R_n})=(s,i,r)\Big)}$$

Q23) Les variables aléatoires en question prennent un nombre finie de valeurs, $\boxed{\text{elles ont donc une espérance finie.}}$

Q24) $\Delta\tilde{R_n}=R_{n+1}-R_n$ représente le nombre de personnes infectées ($\tilde{I_n}=N$) qui se rétablissent entre la journée n et la journée $n+1$.
Chaque personne ayant, indépendamment des autres une probabilité de ρ de se rétablir, on reconnaît que : $\Delta\tilde{R_n}\Big|_{\tilde{I_n}=N}\hookrightarrow \mathcal{B}(N,\rho)$

On utilise Q23) avec $Z=\Delta\tilde{R_n}$ qui ne dépend que de la valeur de $\tilde{I_n}$ donc :

$$E(\Delta\tilde{R_n})=\sum_{(s,i,r)\in E}\Big(\sum_{k=0}^{M} kP\big(\Delta\tilde{R_n}=k\Big|(\tilde{S_n},\tilde{I_n},\tilde{R_n})=(s,i,r)\big)\Big)P\Big((\tilde{S_n},\tilde{I_n},\tilde{R_n})=(s,i,r)\Big)$$

$$\Rightarrow E(\Delta\tilde{R_n})=\sum_{i=0}^{M}\Big(\sum_{k=0}^{M} kP\big(\Delta\tilde{R_n}=k\Big|\tilde{I_n}=i\big)\Big)P\Big(\tilde{I_n}=i\Big)$$

Vu que $\Delta\tilde{R_n}\Big|_{\tilde{I_n}=N}\hookrightarrow \mathcal{B}(N,\rho)$, on a que : $\sum\limits_{k=0}^{M} kP\big(\Delta\tilde{R_n}=k\Big|\tilde{I_n}=i\big)=i\rho$ et donc :

$E(\Delta\tilde{R_n})=\sum\limits_{i=0}^{M} i\rho P\Big(\tilde{I_n}=i\Big)$ et donc $\boxed{E(\Delta\tilde{R_n})=\rho E(\tilde{I_n})}$

Q25) $-\Delta\tilde{S_n}=S_n-S_{n+1}$ représente le nombre de personnes saines qui deviennent infectées entre la journée n et la journée $n+1$.
Si on sait que $(\tilde{S_n},\tilde{I_n},\tilde{R_n})=(s,i,r)$ alors on sait qu'il y a s personnes saines qui ont, chacune, indépendamment des autres, une probabilité $p(i)$ d'être infecté.
Donc $(-\Delta\tilde{S_n})\Big|_{(\tilde{S_n},\tilde{I_n},\tilde{R_n})=(s,i,r)}\hookrightarrow \mathcal{B}(s,p(i))$ et donc : $\boxed{P\big(\Delta\tilde{S_n}=-k\Big|(\tilde{S_n},\tilde{I_n},\tilde{R_n})=(s,i,r)\big)=\binom{s}{k}(p(i))^k(1-p(i))^{s-k}}$

Q26) • On utilise Q23) avec $Z = \Delta\tilde{S_n}$

$E(\Delta\tilde{S_n}) = \sum_{(s,i,r)\in E} \Big(\sum_{k=0}^{M} (-k) P\big(\Delta\tilde{S_n} = -k \Big| (\tilde{S_n}, \tilde{I_n}, \tilde{R_n}) = (s,i,r)\big)\Big) P\Big((\tilde{S_n}, \tilde{I_n}, \tilde{R_n}) = (s,i,r)\Big)$

$\Rightarrow E(\Delta\tilde{R_n}) = \sum_{(s,i,r)\in E} \Big(\sum_{k=0}^{M} (-k) \binom{s}{k} (p(i))^k (1-p(i))^{s-k} \Big) P\Big((\tilde{S_n}, \tilde{I_n}, \tilde{R_n}) = (s,i,r)\Big)$

Mais $\sum_{k=0}^{M} \Big[\Big((-k) \binom{s}{k} (p(i))^k (1-p(i))^{s-k} \Big) = - \sum_{k=0}^{M} \Big[\Big(k \binom{s}{k} (p(i))^k (1-p(i))^{s-k} \Big)$ est l'opposé de l'espérance d'une loi binomiale de paramètre $(s, p(i))$ donc vaut $sp(i)$

On a alors : $E(\Delta\tilde{S_n}) = - \sum_{(s,i,r)\in E} sp(i) P\Big((\tilde{S_n}, \tilde{I_n}, \tilde{R_n}) = (s,i,r)\Big)$

et donc $\boxed{E(\Delta\tilde{S_n}) = -E(\tilde{S_n} p(\tilde{I_n}))}$

• Comme $\tilde{S_n} + \tilde{I_n} + \tilde{R_n} = M$ alors on a aussi $\tilde{S}_{n+1} + \tilde{I}_{n+1} + \tilde{R}_{n+1} = M$ et donc $\Delta\tilde{S_n} + \Delta\tilde{I_n} + \Delta\tilde{R_n} = 0$
Par linéarité de l'espérance on obtient : $E(\Delta\tilde{S_n}) + E(\Delta\tilde{I_n}) + E(\Delta\tilde{R_n}) = 0$
qui donne $E(\Delta\tilde{I_n}) = -E(\Delta\tilde{S_n}) - E(\Delta\tilde{R_n})$

En utilisant les résultats de Q24) et le début de cette question Q26) :

$$\boxed{E(\Delta\tilde{I_n}) = E(\tilde{S_n} p(\tilde{I_n})) - \rho E(\tilde{I_n})}$$