

Exercices corrigés du chapitre 22 : Calcul différentiel

Enoncé, Exercice 22.1

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(0,0) = 0$ et $f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$

- a) Montrer que f est continue en $(0,0)$.
 - b) Que dire de $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$?
 - c) f est-elle C^1 sur $\mathbb{R}^2$?
-

Correction

a) Pour $(x,y) \neq (0,0)$, $|f(x,y)| = \left| \frac{x^3}{x^2+y^2} \right| = |x| \frac{x^2}{x^2+y^2}$

Mais $\frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1$ car $x^2 \leq x^2 + y^2$ et donc $|f(x,y)| \leq |x| \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$

On en déduit $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$ et donc $\boxed{f \text{ est continue en } (0,0)}$

b) Pour $t \neq 0$ on a : $\frac{f((0,0)+t(1,0))-f(0,0)}{t} = \frac{f(t,0)-0}{t} = \frac{\frac{t^3}{t^2}}{t} = 1 \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1$

On a donc $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \text{ existe et } \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1}$

c) f est clairement C^∞ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et pour $(x,y) \neq 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{3x^2(x^2+y^2)-2xx^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4+3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = 0 \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0 \neq \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0,0)$

et donc $\boxed{f \text{ n'est pas de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^2}$

Enoncé, Exercice 22.2

Donner le développement limité à l'ordre 2 en $(1, \pi)$ de $f(x, y) = x^2y + x\cos(y)$

Correction

f est C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et $\nabla(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy + \cos(y) \\ x^2 - x\sin(y) \end{pmatrix}$

De plus, la Hessienne de f vaut : $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} (x, y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x - \sin(y) \\ 2x - \sin(y) & -x\cos(y) \end{pmatrix}$

Donc $f(1, \pi) = \pi - 1$, $\nabla(f)(1, \pi) = \begin{pmatrix} 2\pi - 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $H_f(1, \pi) = \begin{pmatrix} 2\pi & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

On utilise la formule du cours qui donne, pour (h, k) au voisinage de $(0, 0)$:

$$\begin{aligned} f(1+h, \pi+k) &= f(1, \pi) + \langle \nabla(f)(1, \pi), (h, k) \rangle + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} H_f(1, \pi) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + o(\|(h, k)\|^2) \\ \Rightarrow f(1+h, \pi+k) &= \pi - 1 + (2\pi - 1)h + k + \frac{1}{2}(2\pi h^2 + 4hk + k^2) + o(\|(h, k)\|^2) \end{aligned}$$

Le développement limité à l'ordre 2 de f au point $(1, \pi)$ est donc

$$f(1+h, \pi+k) = \pi - 1 + (2\pi - 1)h + k + \pi h^2 + 2hk + \frac{1}{2}k^2 + o(\|(h, k)\|^2)$$

Enoncé, Exercice 22.3

On pose : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = 2x^3 + 3x^2y - 3x^2 + y^2 - 3y$

Déterminer les points critique de f et faire une étude locale de ces points.

Correction

On remarque que f est C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

(x, y) point critique de f

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2 + 6xy - 6x = 0 \\ 3x^2 + 2y - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x(x + y - 1) = 0 \\ 3x^2 + 2y - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2y - 3 = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y = 1 - x \\ 3x^2 + 2(1 - x) - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{3}{2} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y = 1 - x \\ 3x^2 - 2x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{3}{2} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$f \text{ admet trois points critiques : } A(0, \frac{3}{2}), B(1, 0) \text{ et } C(\frac{-1}{3}, \frac{4}{3})$$

Pour faire une étude locale on va passer par la matrice Hessienne de f .

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, H(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} (x, y) = \begin{pmatrix} 12x + 6y - 6 & 6x \\ 6x & 2 \end{pmatrix}$$

- $H_f(A) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \det(H_f(A)) = 6 > 0 \\ \text{tr}(H_f(A)) = 5 > 0 \end{cases} \Rightarrow f \text{ admet un minimum local en } A$
- $H_f(B) = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(H_f(B)) = 12 - 36 < 0 \Rightarrow f \text{ n'admet pas d'extremum local en } B$
- $H_f(C) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(H_f(C)) = 0$ on ne peut pas conclure avec la Hessienne

On passe ici les calculs intermédiaires ...

On a $f(\frac{-1}{3} + h, \frac{4}{3} + h) - f(\frac{-1}{3}, \frac{4}{3}) \sim -2h^2 > 0$ pour $h \neq 0$ au voisinage de 0

On a $f(\frac{-1}{3} + h, \frac{4}{3} + 4h) - f(\frac{-1}{3}, \frac{4}{3}) \sim 7h^2 > 0$ pour $h \neq 0$ au voisinage de 0

$f(\frac{-1}{3} + h, \frac{4}{3} + k) - f(\frac{-1}{3}, \frac{4}{3})$ change donc de signe pour (h, k) au voisinage de $(0, 0)$ et donc f n'admet pas d'extremum local en C .

$$\text{Bilan : } \begin{cases} f \text{ admet un minimum local en } A(0, \frac{3}{2}) \\ f \text{ n'admet pas d'extremum local en } B(1, 0) \\ f \text{ n'admet pas d'extremum local en } C(\frac{-1}{3}, \frac{4}{3}) \end{cases}$$

Enoncé, Exercice 22.4

Trouver les extremums globaux de $f : (x, y) \mapsto x^2y + xy$ sur $\Omega = [-2; 2] \times [-1; 1]$.

Correction

Tout d'abord, Ω est une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$ et f est une fonction de classe C^1 sur Ω , donc par théorème du cours, f est bornée sur Ω et atteint ses bornes, soit sur le bord de Ω , soit à l'intérieur de Ω en un point critique.

Cherchons d'abord les points critiques.

(x, y) point critique de f

$$\Leftrightarrow \nabla(f)(x, y) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy + y = 0 \\ x^2 + x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+1) = 0 \\ y(2x+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$$

On pose $O(0, 0)$ et $A(-1, 0)$, on remarque que ces points sont dans l'intérieur de Ω et que $f(O) = 0$ et $f(A) = 0$

On pose $B(-2; 1)$, $C(2; 1)$, $D(2; -1)$ et $E(-2; -1)$, ainsi le bord de Ω est le rectangle $BCDE$

Etude sur BC : On pose $\forall t \in [-2; 2] \quad g(t) = f(t, 1) = t^2 + t$

t	-2	$\frac{-1}{2}$	2
$g'(t)$	-	0	+
$g(t)$	2		6
		$\searrow$ $\frac{-1}{4}$	$\nearrow$

g est dérivable et $g'(t) = 2t + 1$, on a donc

Etude sur DE : On pose $\forall t \in [-2; 2] \quad h(t) = f(t, -1) = -t^2 - t = -g(t)$
 h est donc maximum en $\frac{-1}{2}$ pour la valeur $\frac{1}{4}$ et minimum en $t = 2$ pour la valeur -6 .

Etude sur CD : On pose $\forall t \in [-1; 1] \quad i(t) = f(2, t) = 6t$
 i est donc maximum en $t = 1$ pour la valeur 6 et minimum en $t = -1$ pour la valeur -6 .

Etude sur BE : On pose $\forall t \in [-1; 1] \quad j(t) = f(-2, t) = 2t$
 j est donc maximum en $t = 1$ pour la valeur 2 et minimum en $t = -1$ pour la valeur -2 .

Bilan : $\begin{cases} f \text{ atteint son maximum au point } (2, 1) \text{ et ce maximum vaut } 6 \\ f \text{ atteint son minimum au point } (2, -1) \text{ et ce minimum vaut } -6 \end{cases}$

Enoncé, Exercice 22.5

Trouver les fonctions f de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant $E \Leftrightarrow 2\frac{\partial f}{\partial x} - 3\frac{\partial f}{\partial y} = 0$
On pourra utiliser un changement de variable linéaire.

Correction

On va utiliser un changement de variable linéaire. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \neq b$.

On pose $\phi : \begin{matrix} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (u, v) \end{matrix}$ avec $\begin{cases} u = x + ay \\ v = x + by \end{cases}$

ϕ est une application linéaire de matrice, relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$, donc de déterminant $b - a \neq 0$ car $a \neq b$.

ϕ est donc bijective, de plus, comme ϕ et ϕ^{-1} sont linéaires alors elles sont C^1 .

Soit f une solution de E . Posons $g = f \circ \phi^{-1}$. Alors g est C^1 comme composée de fonctions C^1 et de plus $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = g(u, v)$ avec $(u, v) = (x + ay, x + by) = \phi(x, y)$ puisque $f = g \circ \phi$

Par la formule de dérivation en chaîne on a :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = a \frac{\partial g}{\partial u} + b \frac{\partial g}{\partial v} \end{cases}$$

On reporte alors dans E :

$$\begin{aligned} & f \text{ solution de } E \text{ sur } \mathbb{R}^2 \\ \Leftrightarrow & \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad 2\frac{\partial f}{\partial x} - 3\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ \Leftrightarrow & \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad 2\left(\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}\right) - 3\left(a\frac{\partial g}{\partial u} + b\frac{\partial g}{\partial v}\right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (2 - 3a)\frac{\partial g}{\partial u} + (2 - 3b)\frac{\partial g}{\partial v} = 0 \end{aligned}$$

Pour simplifier l'équation on choisit $a = \frac{2}{3}$ et $b = 0$ ce qui répond à la condition $a \neq b$.

On reporte dans E et on a alors :

$$f \text{ solution de } E \text{ sur } \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial g}{\partial v} = 0 \Leftrightarrow \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial g}{\partial v} = 0$$

On peut faire la dernière équivalence car ϕ est bijective.

On applique alors le cours.

$$f \text{ solution de } E \text{ sur } \mathbb{R}^2 \exists A \in C^1(\mathbb{R}) \quad \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2 \quad g(u, v) = A(u)$$

On peut revenir à f par la relation $f(x, y) = g(u, v)$ (toujours par le fait que ϕ est bijective).

Les solutions de E sur $\mathbb{R}^2$ s'écrivent donc $f(x, y) = A(x + \frac{2}{3}y)$ avec $A \in C^1(\mathbb{R})$

Enoncé, Exercice 22.6

Dans $\mathbb{R}^3$ on considère la surface Σ d'équation cartésienne $x^2y - y^2 + z^2 = 4$

Montrer que $A(1, 1, 2)$ est un point régulier de Σ et déterminer une équation cartésienne de P le plan tangent à Σ au point A

Correction

On pose $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad f(x, y, z) = x^2y - y^2 + z^2 - 4$ ainsi Σ a pour équation cartésienne $f(x, y, z) = 0$

On calcule $f(A) = f(1, 1, 2) = 1 - 1 + 2^2 - 4 = 0$ donc on a bien $A \in \Sigma$

$$f \text{ est } C^1 \text{ et } \nabla(f)(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} (x, y, z) = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 - 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

$$\nabla(f)(A) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \neq \vec{0} \text{ donc } A \text{ est un point régulier et } \nabla(f)(A) \text{ est bien un vecteur tangent au plan}$$

P qui a donc une équation cartésienne de la forme : $2x - y + 4z = a$ avec $a \in \mathbb{R}$

Mais $A \in P \Rightarrow 2 - 1 + 4 = a \Rightarrow a = 5$

Une équation cartésienne de P est donc : $2x - y + 4z = 5$
