

Chapitre 22 : Calcul différentiel

Dans ce chapitre p désignera un entier non nul (en pratique $p = 2$ ou $p = 3$).

On notera $B = (e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$, et on décomposera les vecteurs de $\mathbb{R}^p$ sous la forme : $x = \sum_{i=1}^p x_i e_i$

On notera $\langle, \rangle$ le produit scalaire dans la base canonique, et on notera $\|.\|$ la norme de $\mathbb{R}^p$ associée au produit scalaire canonique.

Si $p = 2$, on notera plutôt (x, y) les coordonnées dans B , si $p = 3$, on notera plutôt (x, y, z) les coordonnées dans B .

1 Fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$

1.1 Fonctions coordonnées

Dans ce chapitre on va étudier des fonctions $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ avec Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

On peut écrire $\forall x \in U$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$

Remarque. Le cas où $p = 1$, une seule variable au départ à déjà été vu.

Définition. Les applications $(f_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ sont appelées *applications coordonnées de f*

1.2 Rappel sur la continuité

Rappel : f est continue en $a \in U$ si et seulement si $\forall \epsilon > 0$, $\exists \eta > 0$, $\forall x \in \Omega$, $\|x - a\| \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_1 \leq \epsilon$

Remarque. $\|.\|_1$ est une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$ et on pourrait prendre une norme quelconque sur $\mathbb{R}^p$ puisque en dimension finie les normes sont équivalentes.

Rappel : f est continue en $a \in \Omega$ si et seulement si $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, f_i est continue en a

Remarque. Tout se passe bien coordonnée par coordonnée à l'arrivée, au départ c'est un autre problème.

C'est pour cela que par la suite on considérera le cas $n = 1$.

On étudie donc désormais une fonction de Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ (qui peut être remplacé par K ou $\mathbb{C}$)

1.3 Applications partielles

1.3.1 Définition

Définition. Soit $a = (a_1, \dots, a_p) \in \Omega$.

Pour $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$ on peut alors poser : $f_{a,i} : t \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_p)$ qui est définie, au moins au voisinage de a_i

Les fonctions $f_{a,i}$ sont alors des fonctions d'une partie de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, fonctions que l'on sait bien étudiée.

Les applications ainsi définies sont appelées *applications partielles de f au point a* .

Remarques. Comme leurs noms l'indiquent, les applications partielles ne donnent que des renseignements partiels sur f . Il y en a p en un point a .

1.3.2 Exemple

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^2}{x^2 + 2y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Donner les applications partielles en $(0, 0)$:

1.4 Interprétation des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

2 Dérivées partielles d'ordre 1

2.1 Dérivée en un point selon un vecteur

2.1.1 Définition

Définition. Soit $a \in \Omega$ et V un vecteur non nul de $\mathbb{R}^p$.

Alors, on dit que f admet une dérivée partielle en a selon le vecteur V

si et seulement la limite $\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(a+tV)-f(a)}{t}$ existe dans $\mathbb{R}$.

Si elle existe, cette limite est notée $D_V f(a)$, c'est la dérivée selon V de f en a .

2.1.2 Interprétation

2.2 Dérivées partielles d'ordre 1

Définition. Soit $a \in \Omega$ et $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$

Alors, si f admet une dérivée partielle selon le vecteur e_i on note cette dérivée : $De_i f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \partial_i f(a)$

Remarques. $B = (e_1, \dots, e_p)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^p$.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \rightarrow a_i} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_p) - f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_p)}{t - a_i}$$

2.2.1 Notations

Si $E = \mathbb{R}^2$ ou $E = \mathbb{R}^3$ on note : $\frac{\partial}{\partial x}$ au lieu de $\frac{\partial}{\partial x_1}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ au lieu de $\frac{\partial}{\partial x_2}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ au lieu de $\frac{\partial}{\partial x_3}$

2.2.2 Exemple

2.3 Fonctions dérivées partielles d'ordre 1

Définition. Soit $i \in \llbracket 1..p \rrbracket$.

Alors si f admet des dérivées partielles dans la direction e_i en tout point de a de Ω , on définit la fonction dérivée

$$\text{partielle } \frac{\partial f}{\partial x_i} \text{ de } \Omega \text{ dans } \mathbb{R} \text{ par } \begin{array}{ccc} \frac{\partial f}{\partial x_i} & : & \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \\ a & \mapsto & \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \end{array}$$

Remarque. f peut donc admettre p applications dérivées partielles d'ordre 1.

2.4 Opérations sur les fonctions admettant des dérivées partielles

Lemme. Soit f et g deux fonctions de Ω dans $\mathbb{R}$ admettant une dérivée partielle selon V en $a \in \Omega$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ alors :

$f + \lambda g$ admet une dérivée partielle en a selon V et $D_V(f + \lambda g)(a) = D_V(f)(a) + \lambda D_V(g)(a)$

fg admet une dérivée partielle en a selon V et $D_V(fg)(a) = g(a)D_V(f)(a) + f(a)D_V(g)(a)$

Si de plus $f(a) \neq 0$ au voisinage de a alors $\frac{1}{f}$ admet une dérivée partielle en a selon V et $D_V(\frac{1}{f})(a) = \frac{-1}{f(a)^2} D_V(f)(a)$

preuve :

Remarques. Les règles habituelles de dérivation s'appliquent.

Pour calculer $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ on applique les règles de dérivation habituelles en considérant que seule la $i^{\text{ème}}$ variable bouge et en considérant les autres constantes.

Exemple. Dérivée partielle selon y de $f(x, y, z) = \cos(xyz)e^{-x}$

3 Fonctions de classe C^1

3.1 Définition

Définition. On dit que f est de classe C^1 sur Ω

si et seulement si toutes ses applications dérivées partielles *existent et sont continues* sur Ω .

Remarques. Notations : Soit Ω une partie ouverte de $\mathbb{R}^p$. Alors on note $C^1(\Omega, \mathbb{R})$ ou encore $C^1(\Omega)$ l'ensemble des fonctions de classe C^1 de Ω dans $\mathbb{R}$.

$C^1(\Omega, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel stable par multiplication.

3.2 Développement limité à l'ordre 1 : théorème fondamental du calcul différentiel

Théorème . Soit f une fonction de classe C^1 de Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$. Soit $a \in \Omega$. Alors f admet en a le développement limité au voisinage de $0_{\mathbb{R}^p}$ à l'ordre 1 suivant : $f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i + o(h)$

Remarques. Une $o(h)$ est une fonction de la forme $\|h\|\epsilon(h)$ avec $\lim_{h \rightarrow (0, \dots, 0)} \epsilon(h) = 0$

On a noté : $h = (h_1, \dots, h_p)$

Corollaire. Si f est de classe C^1 sur Ω alors f est continue sur Ω

preuve : non exigible

Exemple.

3.3 Propriété

Propriété. Si f est de classe C^1 sur Ω . Soit $a \in \Omega$.

Alors $\forall V \in \mathbb{R}^p$ non nul : $V = \sum_{i=1}^p v_i e_i \Rightarrow D_V f(a) = \sum_{i=1}^p v_i \partial_i f(a) = \sum_{i=1}^p v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$

preuve :

3.4 Différentielle

Définition. Soit f une fonction de classe C^1 de Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$. Soit $a \in \Omega$.

On appelle *différentielle de f en a* l'application suivante :

$$\begin{array}{ccc} df(a) : & \mathbb{R}^p & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (h_1, \dots, h_p) & \mapsto & \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i \end{array}$$

Remarques. C'est une forme linéaire.

On peut noter : $\begin{array}{ccc} df & : & \Omega \longrightarrow L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}) \\ a & \mapsto & df(a) \end{array}$ qui est appelée différentielle de f , mais c'est HP

3.5 Gradient

On remarque que si on note $\langle, \rangle$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^p$, alors, avec les notations précédentes :

$$f(a+h) = f(a) + \left\langle \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_p \end{pmatrix} \right\rangle + o(h)$$

L'application $df(a)$ étant une forme linéaire sur $\mathbb{R}^p$ on sait qu'il existe un unique vecteur W tel que $df(a)(h) = \langle W, h \rangle$, on notera donc $df(a)(h) = df(a).h$ et on donne la définition suivante :

Définition. Soit f une fonction de classe C^1 de Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$. Soit $a \in \Omega$.

Alors on pose $\nabla f(a)$ l'unique vecteur de $\mathbb{R}^p$ tel que : $\forall h \in \mathbb{R}^p$, $df(a)(h) = \langle \nabla f(a), h \rangle$

Dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$ ($e_1, \dots, e_p$) on a : $\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix}$

On a donc le DL d'ordre 1 : $f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + o(\|h\|)$

3.6 Règle de la chaîne

3.6.1 Dérivation selon un arc

Théorème . Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ et $\gamma \in C^1(I, \mathbb{R}^p)$ tel que $\gamma(I) \subset U$.

Alors $f \circ \gamma$ est de classe C^1 sur I et en notant $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_p(t))$ on a :

$$\forall t \in I, (f \circ \gamma)'(t) = df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \sum_{i=1}^p \partial_i f(\gamma(t)) x'_i(t) = \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t)) x'_i(t)$$

preuve (et interprétation) :

3.6.2 Fonction constante sur un ouvert convexe

Théorème . Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$.

Alors : $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est constante sur Ω

si et seulement si f est de classe C^1 sur Ω et $\forall a \in \Omega, df(a) = 0$

preuve :

3.6.3 Dérivation en chaîne

Théorème . Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et V un ouvert de $\mathbb{R}^p$.

Φ une application de classe C^1 de U dans $\mathbb{R}^p$ telle que $\Phi(U) \subset V$

Soit f une application de classe C^1 de V dans $\mathbb{R}$.

On note $\forall (u_1, \dots, u_p) \in U, \Phi(u) = (x_1(u), \dots, x_p(u))$.

Alors $g = f \circ \Phi$ est une application de classe C^1 sur U et $\forall u \in U, \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \frac{\partial g}{\partial u_i}(u) = \sum_{j=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_j}(\Phi(u)) \frac{\partial x_j}{\partial u_i}(u)$

Remarque. Notations abusives mais pratique : $\frac{\partial g}{\partial u_i} = \sum_{j=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial u_i}$

preuve :

3.6.4 Exemples

exemple 1

Soit Ω et U deux ouverts de $\mathbb{R}^2$, soit f une fonction de classe C^1 de Ω dans $\mathbb{R}$. Soit φ une application de classe C^1 de U dans Ω . On note $\forall (u, v) \in U, \varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$.

On pose $g = f \circ \varphi$, on a donc $\forall (u, v) \in U, g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$.

Alors g est de classe C^1 de U dans $\mathbb{R}$ et :

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial y}{\partial u}(u, v)$$

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial y}{\partial v}(u, v)$$

Ces formules sont appelées formules de dérivation en chaîne, on peut les simplifier de la manière suivante :

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$$

exemple 2 : coordonnées polaires

4 Fonctions de classe C^2

4.1 Définitions générales

Si la fonction $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ est dérivable par rapport à x_j en tout point a de Ω , alors on pose :
 $\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i})(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$ est appelée **dérivée partielle d'ordre 2** de f au point a .

4.2 Applications de classe C^2

Définition. On dit qu'une application f définie sur une partie ouverte Ω de $\mathbb{R}^p$ est **de classe C^2 sur Ω** si et seulement si toutes ses dérivées partielles secondes sont **continues** sur Ω .

Remarques. On dit que f est de classe C^0 sur Ω si f est continue sur Ω .

On peut aussi dire que f est C^2 si toutes ses dérivées partielles premières sont de classe C^1 .

Si f est d'une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, f peut admettre 4 dérivées partielles secondes :

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}$ notée $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}$ notée $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ notée $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ notée $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

4.3 Opérations sur les fonctions de classe C^2

Notations : Soit Ω une partie ouverte de $\mathbb{R}^p$. Alors on note $C^2(\Omega, \mathbb{R})$ ou encore $C^2(\Omega)$ l'ensemble des fonctions de classe C^2 de Ω dans $\mathbb{R}$.

Lemme. Soit $(f, g) \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $f + \lambda g \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ et $fg \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$

preuve : (idem C^1)

Remarque. Autrement dit $C^2(\Omega, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel stable par multiplication.

4.4 Théorème de Schwarz

Théorème . Soit Ω une partie ouverte de $\mathbb{R}^p$ et f une application de classe C^2 de Ω dans $\mathbb{R}$.

Alors $\forall a \in \Omega$, $\forall (i, j) \in \llbracket 1; p \rrbracket^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$

preuve : HP

4.5 Formule de Taylor-Young à l'ordre 2

4.5.1 Matrice Hessienne

Définition. Soit f une application de classe C^2 d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$.

Alors, pour tout a de Ω on note $H_f(a)$ la matrice de $M_p(\mathbb{R})$ de (i, j) ième coefficient $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$
 $H_f(a)$ est appelée **matrice Hessienne de f en a** .

Remarque. On remarque, avec le théorème de Schwarz que $H_f(a)$ est symétrique réelle.

4.5.2 Formule de Taylor-Young

Théorème . Soit f une application de classe C^2 d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$.

Alors, pour tout $a \in \Omega$ et h au voisinage de $0_{\mathbb{R}^p}$: $f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(a) + \nabla f(a)^T h + \frac{1}{2} h^T H_f(a) h + o(\|h\|^2)$

preuve : HP

4.5.3 Cas particulier d'une fonction de 2 variables

$f(x_0 + h, y_0 + k)$
 $= f(x_0, y_0) + h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{1}{2} [h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)] + o(\|(h, k)\|^2)$

5 Extremums d'une fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$

5.1 Extremum local

Définitions. Soit Ω une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$ et $a \in \Omega$. Soit f une fonction de classe C^1 de Ω dans $\mathbb{R}$. Alors on dit que : f admet un **minimum local** en a si et seulement si $\exists r > 0$, $x \in \dot{B}(a, r) \cap \Omega \Rightarrow f(a) \leq f(x)$
 f admet un **maximum local en a** si et seulement si $\exists r > 0$, $x \in \dot{B}(a, r) \cap \Omega \Rightarrow f(a) \geq f(x)$

5.2 Extremum global

Définitions. Soit Ω une partie de $\mathbb{R}^n$ et $a \in \Omega$. Soit f une fonction de classe C^1 de Ω dans $\mathbb{R}$. Alors on dit que : f admet un minimum global sur Ω si et seulement si $\forall x \in \Omega$, $f(a) \leq f(x)$
 f admet un maximum global sur Ω si et seulement si $\forall x \in \Omega$, $f(a) \geq f(x)$

5.3 Point critique

Définition. Soit Ω une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$ et $a \in \Omega$. Soit f une fonction de classe C^1 de Ω dans $\mathbb{R}$. Alors on dit que a est un **point critique de f** si et seulement si $\nabla f(a) = 0_E \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$.

5.4 Les deux théorèmes de recherche d'extremums

Théorème . 1

Si une fonction de classe C^1 sur une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$ admet un extremum local en un point, alors celui-ci est un **point critique**.

Remarque. La réciproque est fausse ! !

Par exemple $(0,0)$ est un point critique en $(0,0)$ de $f(x,y) = x^2 - y^2$ et $(0,0)$ n'est pas un extremum local de f .

preuve :

Théorème . 2

Si une fonction de classe C^1 sur une partie fermée bornée Ω de $\mathbb{R}^n$ alors f admet un maximum (resp. minimum) global et ce maximum (resp. minimum) est atteint soit à l'intérieur de Ω , en un point critique, soit sur la frontière de Ω .

preuve :

5.5 Utilisation de la Hessienne

5.5.1 Théorème général

Théorème . Si f est une fonction de classe C^2 sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et si a est un point critique de f alors :
- si $H_f(a) \in S_n^{++}$ alors f atteint un minimum local strict en a
- si $H_f(a) \notin S_n^{++}$ alors f n'a pas de minimum en a

preuve :

Remarques. En considérant $-f$ on peut avoir la même chose avec maximum.

5.5.2 Cas de la dimension 2

Théorème . Si f est une fonction de classe C^2 sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et si a est un point critique de f alors :

- si $\begin{cases} \det(H_f(a)) > 0 \\ \text{tr}(H_f(a)) > 0 \end{cases}$ alors f atteint un minimum local strict en a
- si $\begin{cases} \det(H_f(a)) > 0 \\ \text{tr}(H_f(a)) < 0 \end{cases}$ alors f atteint un maximum local strict en a
- si $\det(H_f(a)) < 0$ alors f n'a pas de minimum ou de maximum en a

preuve

5.6 Exemple

5.6.1 Exemple 1

Recherche des extremums locaux sur $\mathbb{R}^2$ de $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - xy + x + y$

5.6.2 Exemple 2

Recherche des extremums globaux sur $[-2, 2] \times [-1, 1]$ de $f : (x, y) \mapsto x^2y + xy$

6 Applications géométriques

6.1 Courbes du plan définie par une équation cartésienne

6.1.1 Cas particulier

Rappel : Si g est une fonction d'une partie I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ alors on pose : $\Gamma = \{(x, y) \mid x \in I \text{ et } y = g(x)\}$.
 Γ est la **représentation graphique de g** . On dit aussi que c'est la courbe d'équation cartésienne **$y = g(x)$** .

6.1.2 Généralisation

Définition. Soit f une fonction de classe C^1 définie de U , une partie de $\mathbb{R}^2$, dans $\mathbb{R}$.

Alors on pose : $\Gamma = \{(x, y) \in U \mid f(x, y) = 0\}$.

On dit que Γ est la **courbe d'équation cartésienne $f(x, y) = 0$**

Remarques. Plus généralement les courbes d'équation cartésienne $f(x, y) = \lambda$ sont appelées **lignes de niveau de f**
 $y - g(x) = 0$ est la courbe représentative de g .

Exemples : $2x + y = -3$ est une droite, $x^2 + y^2 = 1$ est l'équation cartésienne du cercle de centre O et de rayon 1.

6.1.3 Points réguliers

Définition. En gardant les mêmes notations. Soit $(x, y) \in \Gamma$. Alors on dit que :
 (x, y) est un point **régulier** de Γ si et seulement si **$\nabla(f)(x, y) \neq 0_{\mathbb{R}^2}$**

6.1.4 Tangente en un point régulier

Théorème . Avec les mêmes notations. Si (x, y) est un point régulier de Γ alors la droite passant par (x, y) et admettant $\nabla(f)(x, y)$ comme vecteur normal est **appelée tangente à Γ au point (x, y)** .

preuve et dessin :

Corollaire. Le gradient est orthogonal aux lignes de niveau et est orienté dans le sens des valeurs croissantes de f .

Interprétation avec le DL de f à l'ordre 1

6.1.5 Exemple

$\Gamma : x^2 - 4x + y^2 + 2y + 1 = 0$, interprétation, tangente en un point

6.2 Surface définie par une équation cartésienne

6.2.1 Définition

Définition. Soit f une fonction de classe C^1 sur U une partie de $\mathbb{R}^3$.

On pose $\Sigma = \{(x, y, z) \in U \mid f(x, y, z) = 0\}$.

On dit que Σ est la **surface d'équation cartésienne $f(x, y, z) = 0$** .

6.2.2 Cas particulier

Si on a une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, on peut poser

$$\begin{array}{rcl} F & : & U \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & (x, y, z) \longmapsto z - f(x, y) \end{array}$$

Si on note Σ la surface d'équation cartésienne $F(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow z = f(x, y)$

alors les ensembles $\Gamma_\lambda = \{(x, y, z) \in U \times \mathbb{R} \mid F(x, y, z) = 0 \text{ et } z = \lambda\}$ sont les translatés des ensembles

$\gamma_\lambda = \{(x, y) \in U \mid f(x, y) = \lambda\}$ qui sont appelés **lignes de niveaux de f** ou **lignes de niveaux de Σ** .

6.2.3 Points réguliers

Définition. Avec les notations précédentes. On dit que $(x, y, z) \in \Sigma$ est un point régulier de Σ si et seulement si $\nabla f(x, y, z) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$.

6.2.4 Plan tangent

Définition. Avec les notations précédentes. Si $(x, y, z) \in \Sigma$ est un point régulier de Σ alors on appelle plan tangent à Σ au point (x, y, z) le plan passant par (x, y, z) et admettant $\nabla(f)(x, y, z)$ comme vecteur normal.

6.2.5 Exemple

$\Sigma : x^2 + y^2 - z^2 = 1$, plan tangent en $A(3, 4, 5)$

6.3 Courbe tracée sur une surface

6.3.1 Cadre

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et Σ la surface d'équation cartésienne $z = f(x, y)$
Soit $\varphi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tel que $\varphi(I) \subset U$ et φ de classe C^1 . On note $\varphi(t) = (x(t), y(t))$

Alors on dit que $\Gamma = \{(x(t), y(t), f(x(t), y(t))) \mid t \in I\}$ est une courbe tracée sur Σ

6.3.2 Lemme

Lemme. Avec les notations ci-dessus, la tangente à Γ en M est incluse dans le plan tangent à Σ en M

Preuve :

7 Compléments : équations aux dérivées partielles

Sommaire

1	Fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$	1
1.1	Fonctions coordonnées	1
1.2	Rappel sur la continuité	1
1.3	Applications partielles	1
1.3.1	Définition	1
1.3.2	Exemple	1
1.4	Interprétation des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$	1
2	Dérivées partielles d'ordre 1	2
2.1	Dérivée en un point selon un vecteur	2
2.1.1	Définition	2
2.1.2	Interprétation	2
2.2	Dérivées partielles d'ordre 1	2
2.2.1	Notations	2
2.2.2	Exemple	2
2.3	Fonctions dérivées partielles d'ordre 1	2
2.4	Opérations sur les fonctions admettant des dérivées partielles	2
3	Fonctions de classe C^1	3
3.1	Définition	3
3.2	Développement limité à l'ordre 1 : théorème fondamental du calcul différentiel	3
3.3	Propriété	3
3.4	Différentielle	3
3.5	Gradient	3
3.6	Règle de la chaîne	4
3.6.1	Dérivation selon un arc	4
3.6.2	Fonction constante sur un ouvert convexe	4
3.6.3	Dérivation en chaîne	4

3.6.4	Exemples	4
4	Fonctions de classe C^2	5
4.1	Définitions générales	5
4.2	Applications de classe C^2	5
4.3	Opérations sur les fonctions de classe C^2	5
4.4	Théorème de Schwarz	5
4.5	Formule de Taylor-Young à l'ordre 2	5
4.5.1	Matrice Hessienne	5
4.5.2	Formule de Taylor-Young	5
4.5.3	Cas particulier d'une fonction de 2 variables	5
5	Extremums d'une fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$	6
5.1	Extremum local	6
5.2	Extremum global	6
5.3	Point critique	6
5.4	Les deux théorèmes de recherche d'extremums	6
5.5	Utilisation de la Hessienne	6
5.5.1	Théorème général	6
5.5.2	Cas de la dimension 2	6
5.6	Exemple	7
5.6.1	Exemple 1	7
5.6.2	Exemple 2	7
6	Applications géométriques	7
6.1	Courbes du plan définie par une équation cartésienne	7
6.1.1	Cas particulier	7
6.1.2	Généralisation	7
6.1.3	Points réguliers	7
6.1.4	Tangente en un point régulier	7
6.1.5	Exemple	7
6.2	Surface définie par une équation cartésienne	7
6.2.1	Définition	7
6.2.2	Cas particulier	7
6.2.3	Points réguliers	8
6.2.4	Plan tangent	8
6.2.5	Exemple	8
6.3	Courbe tracée sur une surface	8
6.3.1	Cadre	8
6.3.2	Lemme	8
7	Compléments : équations aux dérivées partielles	8