

Correction du devoir à la maison de Mathématiques n°12

EXERCICE 1 : ccINP PSI 2025 : Exercice

Q1) D'après le cours : $E(X) = V(X) = \lambda$

Q2) D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev : $P(|X - E(X)| \geq \lambda) \leq \frac{V(X)}{\lambda^2}$

Avec le résultat de Q1, on obtient : $P(|X - E(X)| \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda}$

Q3) $X \geq 2\lambda \Rightarrow X - \lambda \geq \lambda > 0 \Rightarrow |X - \lambda| \geq \lambda$

Donc : $(X \geq 2\lambda) \subset (|X - \lambda| \geq \lambda)$

Q4) Comme la probabilité P est croissante, on a, d'après Q3 : $P(X \geq 2\lambda) \leq P(|X - \lambda| \geq \lambda)$

Avec Q2) on en déduit : $P(X \geq 2\lambda) \leq \frac{1}{\lambda}$

Q5) On connaît la loi de X : $\forall n \in X(\Omega) = \mathbb{N}$, $P(X = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$ et donc $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} t^n = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(t\lambda)^n}{n!}$

On reconnaît le DSE_0 de la fonction exponentielle : $\forall z \in \mathbb{R}$, $\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ on en déduit que $G_X(t)$ converge pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Le domaine de définition de G_X est $\mathbb{R}$.

Q6) En continuant le calcul de Q5) : $G_X(t) = e^{-\lambda} e^{\lambda t}$ et donc $\forall t \in \mathbb{R}, G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$

Q7) Comme $X(\Omega) = \mathbb{N}$ alors $(X \geq \alpha) = \bigcup_{\substack{k \geq \alpha \\ k \in \mathbb{N}}} \{X = k\}$, puis, par incompatibilité des événements :

$$P(X \geq \alpha) = \sum_{\substack{k \geq \alpha \\ k \in \mathbb{N}}} P(X = k)$$

Mais, si $t \geq 1$ et $k \geq \alpha$ alors : $t^\alpha \leq t^k$

$$\text{Donc, pour } t \geq 1 : P(X \geq \alpha)t^\alpha = \sum_{\substack{k \geq \alpha \\ k \in \mathbb{N}}} P(X = k) \underbrace{t^\alpha}_{\leq t^k} \Rightarrow P(X \geq \alpha)t^\alpha \leq \sum_{\substack{k \geq \alpha \\ k \in \mathbb{N}}} P(X = k)t^k$$

Et comme $\{k \in \mathbb{N}, k \geq \alpha\} \subset \mathbb{N}$ et que l'on somme des termes **positifs**, alors :

$$P(X \geq \alpha)t^\alpha \leq \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k)t^k = G_X(t)$$

On divise par $t^\alpha > 0$ et donc : $\forall t \geq 1, P(X \geq \alpha) \leq \frac{G_X(t)}{t^\alpha}$

Q8)• Avec Q7) utilisé pour $\alpha = 2\lambda$ et avec le résultat de Q6), on a, pour $t \geq 1$: $P(X \geq 2\lambda) \leq \frac{e^{\lambda(t-1)}}{t^{2\lambda}}$

• On pose, pour $t \geq 1$: $f(t) = \frac{e^{\lambda(t-1)}}{t^{2\lambda}}$

$$f \text{ est } C^1 \text{ et } f'(t) = \frac{\lambda e^{\lambda(t-1)} t^{2\lambda} - e^{\lambda(t-1)} 2\lambda t^{2\lambda-1}}{t^{4\lambda}} = \frac{\lambda e^{\lambda(t-1)} t^{2\lambda-1} (t-2)}{t^{4\lambda}}$$

Donc f' est du signe de $t - 2$ et on a le tableau de variation suivant :

t	1	2	$+\infty$
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	$\searrow \qquad \nearrow$ $f(2)$		

On a donc f minimum pour $t = 2$ et $f(2) = \frac{e^\lambda}{2^{2\lambda}} = \left(\frac{e}{4}\right)^\lambda$

Comme on a vu que : $P(X \geq 2\lambda) \leq f(t)$ pour tout $t \geq 1$, en particulier pour $t = 2$ on a : $P(X \geq 2\lambda) \leq \left(\frac{e}{4}\right)^\lambda$

Q9) • Pour comparer (1) et (2) on étudie :

$$\frac{1}{\lambda} \geq \left(\frac{e}{4}\right)^\lambda \Leftrightarrow -\ln(\lambda) \geq \lambda \ln\left(\frac{e}{4}\right) \Leftrightarrow -\frac{\ln(\lambda)}{\lambda} \geq 1 - \ln(4) \Leftrightarrow \ln(4) - 1 \geq \frac{\ln(\lambda)}{\lambda}$$

• On pose $\forall \lambda > 0$, $g(\lambda) = \frac{\ln(\lambda)}{\lambda}$

g est C^1 sur $]0, +\infty[$ et $g'(\lambda) = \frac{1 - \ln(\lambda)}{\lambda^2}$

Donc g atteint son maximum en $\lambda = e$ et ce maximum vaut $f(e) = \frac{1}{e}$

Mais $\ln(4) - 1 \geq \frac{1}{e} \Leftrightarrow e(\ln(4) - 1) \geq 1$

Avec l'inégalité donnée dans l'énoncé ce résultat est vrai, donc $\forall \lambda > 0$, $\ln(4) - 1 \geq g(\lambda)$ et donc $\frac{1}{\lambda} \geq \left(\frac{e}{4}\right)^\lambda$

L'inégalité (2) est donc toujours meilleure que la (1)

EXERCICE 2 : oral ccINP PSI 2025 : Ryann

1) a) On peut dans ce a) considérer que chaque appel est une épreuve de Bernoulli de paramètre $20\% = \frac{1}{5}$ (succès = recevoir un appel pour A).

X_A est alors le temps d'attente du premier succès. Comme les appels sont indépendants, alors, on reconnaît le schéma caractéristique d'une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{5}$.

On a donc : $X_A \hookrightarrow G\left(\frac{1}{5}\right)$

1) b) On sait alors d'après le cours que X_A admet une espérance et une variance donnée par :

$$E(X_A) = \frac{1}{\frac{1}{5}} = 5 \text{ et } V(X_A) = \frac{1 - \frac{1}{5}}{\left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{5}{4}$$

1) c) De même $X_B \hookrightarrow G\left(\frac{4}{5}\right)$ et $E(X_B) = \frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4}$ et $V(X_B) = \frac{1 - \frac{4}{5}}{\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{5}{16}$

2) a) Si la première série est de longueur n , on a alors $\underbrace{A \dots A}_{n \text{ fois } A} B$ ou $\underbrace{B \dots B}_{n \text{ fois } B} A$, donc on a :

$$(L = n) = (X_A = n + 1) \cup (X_B = n + 1)$$

2) b) D'après le a) et par incompatibilité : $P(L = n) = P(X_A = n + 1) + P(X_B = n + 1)$

Comme on connaît les lois de A et B on a : $P(L = n) = \left(\frac{4}{5}\right)^n \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{5}\right)^n \frac{4}{5} = \frac{4^n + 4}{5^{n+1}}$

2) c) Avec le b) on peut écrire : $P(L = n) = \underbrace{\frac{4}{5} \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}}_{P(X_A=n)} \frac{1}{5} + \underbrace{\frac{1}{5} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}}_{P(X_B=n)} \frac{4}{5}$

On a donc $P(L = n) = 0.8P(X_A = n) + 0.2P(X_B = n)$

3) On multiplie la relation du 2) c) par n et on somme de $n = 1$ à $+\infty$ ce qui donne :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nP(L = n) = 0.8 \sum_{n=1}^{+\infty} nP(X_A = n) + 0.2 \sum_{n=1}^{+\infty} nP(X_B = n)$$

$$\Rightarrow E(L) = 0.8E(X_A) + 0.2E(X_B)$$

Comme on connaît $E(X_A)$ et $E(X_B)$ alors : $E(L) = 0.8 \frac{1}{0.2} + 0.2 \frac{1}{0.8} = 4.25$

On a donc : $E(L) = 4.25 = \frac{17}{4}$

4) a) $(X_A = 1)$ et $(X_B = 1)$ sont incompatibles car le premier appel ne peut pas venir de A et de B en même temps, donc $P((X_A = 1) \cap (X_B = 1)) = 0$, comme $P(X_A = 1) \neq 0$ et $P(X_B = 1) \neq 0$ alors on a : $P((X_A = 1) \cap (X_B = 1)) \neq P(X_A = 1)P(X_B = 1)$ donc X_A et X_B ne sont pas indépendantes

4) b) Si on a $L = 2$ alors on a : $AB...$ ou $BA..$ donc $X_A = 1$ ou $X_A = 2$.
 On en déduit $(L = 2) \cap (X_A = 3) = \emptyset$ donc $P((L = 2) \cap (X_A = 3)) = 0 \neq P(L = 2)P(X_A = 3)$ et donc comme ci-dessus : X_A et L ne sont pas indépendantes

EXERCICE 3 : oral ccINP PSI 2025 : Lauréana

1) On sait que la fonction génératrice de X vaut $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$ et que celle de Y vaut $G_Y(t) = e^{\mu(t-1)}$

Comme X et Y sont indépendantes alors : $G_Z = G_{X+Y} = G_X G_Y$

Comme tout les rayons de convergence valent $+\infty$, on a a :
 $\forall t \in \mathbb{R}$, $G_Z(t) = G_X(t)G_Y(t) = e^{\lambda(t-1)}e^{\mu(t-1)} = e^{(\lambda+\mu)(t-1)}$
 On reconnaît la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$

Comme la fonction génératrice caractérise la loi, alors :
 $X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$

2) D'après le cours, on a $\forall t \in]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}[$, $G_X(t) = G_Y(t) = \frac{pt}{1-qt}$

Comme en 1) : $G_Z(t) = \left(\frac{pt}{1-qt}\right)^2 = p^2 t^2 \frac{1}{(1-qt)^2}$

On sait que : $\forall u \in]-1, 1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} u^n = \frac{1}{1-u}$

Comme on a une série entière, la fonction est C^∞ et on peut la dériver terme à terme sur $]-1, 1[$ l'intervalle ouverte de convergence.

On obtient : $\forall u \in]-1, 1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} n u^{n-1} = \frac{1}{(1-u)^2}$

Donc : $\forall t \in]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}[$, $\frac{1}{(1-qt)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n(qt)^{n-1}$

En multipliant par $p^2 t^2$: $G_z(t) = p^2 t^2 \frac{1}{(1-qt)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n p^2 t^2 (qt)^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n p^2 q^{n-1} t^{n+1}$

Par changement d'indice $N = n + 1$: $G_z(t) = \sum_{N=1}^{+\infty} (N-1) p^2 q^{N-2} t^N$

Comme la fonction génératrice caractérise la loi, on en déduit :

$$Z(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \text{ et } \forall n \in Z(\Omega) , \mathbb{P}(Z = n) = (n-1)p^2 q^{n-2}$$

EXERCICE 4 : e3A PSI 2025 : Exercice 4

1) On sait d'après le cours que :

$$Z(\Omega) = \mathbb{N}^* \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^* , P(Z = n) = (1-p)^{n-1}p \text{ et } E(Z) = \frac{1}{p} \text{ et } V(Z) = \frac{1-p}{p^2}$$

2) D'après le cours :

X_1 et X_2 sont indépendantes si et seulement si $\forall A \in \mathcal{X}_1(\Omega) , \forall B \in \mathcal{X}_2(\Omega) , A$ et B sont indépendant.

3) Soit $k \in \mathbb{N}$. On remarque que : $(X \geq k) = \bigcup_{i=k}^{+\infty} (X = i)$

Par incompatibilité des événements : $P(X = k) = \sum_{i=k}^{+\infty} P(X = i) = \sum_{i=k}^{+\infty} p q^i$

Somme des termes d'une suite géométrique de raison q et de premier terme $p q^k$

On a donc : $P(X \geq k) = p q^k \frac{1}{1-q} = q^k$ Donc : $\forall k \in \mathbb{N} , P(X \geq k) = q^k$

4.1) On a directement : $\boxed{X + Y \text{ prend ses valeurs dans } (X + Y)(\Omega) = \mathbb{N}}$

4.2) Soit $k \in \mathbb{N}$

$$\text{Alors } (X + Y = k) = \bigcup_{i=0}^k ((X = i) \cap (Y = k - i))$$

$$\text{Par incompatibilité des événements : } P(X + Y = k) = \sum_{i=0}^k P((X = i) \cap (Y = k - i))$$

$$\text{Comme } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes : } P(X + Y = k) = \sum_{i=0}^k P((X = i)P(Y = k - i))$$

$$\text{Alors : } P(X + Y = k) = \sum_{i=0}^k (pq^i)(pq^{k-i}) = \sum_{i=0}^k p^2 q^k = (k + 1)p^2 q^k$$

$$\text{La loi de } X + Y \text{ est donc donnée par : } \boxed{\begin{cases} (X + Y)(\Omega) = \mathbb{N} \\ \forall k \in \mathbb{N}, P(X + Y = k) = (k + 1)p^2 q^k \end{cases}}$$

4.3.1) Si $k > n$ alors $X + Y = n$ et $X = k$ est impossible car sinon $Y < 0$.

$$\text{Donc : } \boxed{k > n \Rightarrow P_{X+Y=n}(X = k) = 0}$$

$$4.3.2) \text{ Si } k \leq n : P_{X+Y=n}(X = k) = \frac{P((X+Y=n) \cap (X=k))}{P((X+Y=n))} = \frac{P(Y=n-k)P(X=k)}{P(X+Y=n)} \text{ puisque } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes.}$$

$$\text{Comme on connaît les lois de } X, Y \text{ et } X + Y : P_{X+Y=n}(X = k) = \frac{pq^{n-k}pq^k}{(n+1)p^2q^n} = \frac{1}{n+1}$$

$$\text{On a donc } P_{X+Y=n}(X = k) \text{ qui ne dépend pas de } k. \text{ On a : } \boxed{P_{X+Y=n}(X = k) = r_n \text{ avec } r_n = \frac{1}{n+1}}$$

$$5.1) V \text{ est la différence de deux entiers donc } \boxed{V(\Omega) = \mathbb{Z}}$$

$$M \text{ est le max deux entiers naturels donc } \boxed{M(\Omega) = \mathbb{N}}$$

$$5.2) (M \geq k) = (X \geq k) \cap (Y \geq k)$$

$$\text{Comme } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes : } P(M \geq k) = P(X \geq k)P(Y \geq k)$$

$$\text{Comme } X \text{ et } Y \text{ suivent la même loi : } P(M \geq k) = P(X \geq k)^2 = q^{2k} \text{ en utilisant 3)}$$

$$\text{On a donc : } \boxed{\forall k \in \mathbb{N}, P(M \geq k) = q^{2k}}$$

$$5.3) (M = k) \cup (M \geq k + 1) = (M \geq k)$$

$$\text{Comme } (M = k) \text{ et } (M \geq k + 1) \text{ sont incompatibles alors : } P(M = k) + P(M \geq k + 1) = P(M \geq k)$$

$$\text{En utilisant 5.2) : } P(M = k) = q^{2k} - q^{2k+2}$$

$$\text{On a donc la loi de } M \text{ est donnée par : } \boxed{\begin{cases} M(\Omega) = \mathbb{N} \\ \forall k \in \mathbb{N}, P(M = k) = q^{2k}(1 - q^2) \end{cases}}$$

$$5.4) Y = X + V \text{ donc si } V \geq 0 \text{ alors } M = \min(X, Y) = X \text{ et si } V < 0 \text{ alors } M = \min(X, Y) = Y$$

$$\text{Alors si } r \geq 0 : ((M = k) \cap (V = r)) = (X = k) \cap (Y = k + r)$$

$$\text{Par indépendance } P((M = k) \cap (V = r)) = P(X = k)P(Y = k + r) = (pq^k)(pq^{k+r}) = p^2 q^{2k+r}$$

$$\text{De même si } r < 0 : ((M = k) \cap (V = r)) = (Y = k) \cap (X = Y - r)$$

$$\text{Par indépendance } P((M = k) \cap (V = r)) = (pq^k)(pq^{k-r}) = p^2 q^{2k-r}$$

$$\text{De manière générale : } \boxed{P((M = k) \cap (V = r)) = p^2 q^{2k+|r|}}$$

5.5) Par la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements $(M = k)_{k \in \mathbb{N}}$:

$$P(V = r) = \sum_{k=0}^{+\infty} P((M = k) \cap (V = r)) = \sum_{k=0}^{+\infty} p^2 q^{2k+|r|} = p^2 q^{|r|} \frac{1}{1-q^2} = \frac{p^2}{(1-q)(1+q)} q^{|r|} = \frac{p}{1+q} q^{|r|}$$

Donc : $\boxed{\forall r \in \mathbb{Z}, P(V = r) = \frac{p}{1+q} q^{|r|}}$

5.6) En utilisant 5.3) et 5.5) :

$$P(M = k)P(V = r) = (q^{2k}(1 - q^2)) \left(\frac{p}{1+q} q^{|r|} \right) = q^{2k+|r|} \frac{p}{1+q} (1 - q)(1 + q) = p^2 q^{2k+|r|}$$

En utilisant 5.4) on a : $P(M = k)P(V = r) = P((M = k) \cap (V = r))$

Comme ce résultat est vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $r \in \mathbb{Z}$ alors :

$\boxed{V \text{ et } M \text{ sont indépendantes.}}$

PROBLEME : centrale PSI 2022 math 1

Math 1, centrale PSI , 2022

Q1) QUESTION DE COURS

- $\forall A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R}), \forall B = (b_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R}), \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

$A + \lambda B = (a_{i,j} + \lambda b_{i,j})$ donc $tr(A + \lambda B) = \sum_{i=1}^n (a_{i,i} + \lambda b_{i,i}) = \sum_{i=1}^n a_{i,i} + \lambda \sum_{i=1}^n b_{i,i} = tr(A) + \lambda tr(B)$ donc tr est linéaire.

De plus, tr est à valeur dans $\mathbb{R}$.

tr est donc une forme linéaire.

- Avec les notations précédentes, on pose $C = AB = (c_{i,j})$. On a : $c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}$

$tr(C) = \sum_{i=1}^n c_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,i}$ Cette formule est symétrique en A et B , donc $tr(AB) = tr(BA)$

$\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}), tr(AB) = tr(BA)$

Q2) QUESTION DE COURS

Comme ci-dessus, on montre que : $tr(A^T B) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{i,k}$ et on reconnaît le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^{n^2}$

$(A, B) \mapsto tr(A^T B)$ est donc un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$

Q3) D'après Q2), la forme bilinéaire $(A, B) \mapsto tr(A^T B)$ est un produit scalaire, elle est donc définie et donc :

$tr(A^T A) = 0 \Rightarrow A = 0_n$

Q4) Soit λ une valeur propre (réelle ou complexe) de A une matrice nilpotente de $M_n(\mathbb{R})$ d'ordre $k \geq 1$ (autrement dit $A^k = 0_n$). Alors $\exists X \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $X \neq 0$ et $AX = \lambda X$.

On a alors $A^k X = \lambda^k X \Rightarrow \lambda^k X = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ puisque X est non nul (vecteur propre).

Donc $sp(A) \subset \{0\}$

De plus $det(A^k) = 0 \Rightarrow det(A)^k = 0 \Rightarrow det(A) = 0$ et donc $0 \in sp(A)$

On en déduit $sp(A) = \{0\}$

Si A est nilpotente, alors 0 est valeur propre de A et c'est la seule valeur propre complexe de A .

Q5) Comme toute matrice de $M_n(\mathbb{C})$, A est trigonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$ et comme $sp_{\mathbb{C}}(A) = \{0\}$, A est semblable à une matrice triangulaire supérieure avec une diagonale de 0. Le déterminant et la trace d'une telle matrice sont nuls. Comme deux matrices semblables ont même trace et même déterminant on en déduit :

$A \in N_n \Rightarrow tr(A) = 0$ et $det(A) = 0$

Q6) Soit $M \in N_n$ alors $\exists k \geq 1$ tel que $M^k = 0_n$.

Mais $M^{2k} = (M^2)^k = M^k M^k = 0_n$ et $2k \geq 1$ donc M^2 est aussi nilpotente.

$M \in N_n \Rightarrow M^2 \in N_n$

Q7) • $M, N \in N_n \Rightarrow \exists k \geq 1$ et $\exists k' \geq 1$ tel que $M^k = 0$ et $N^{k'} = 0$.

• Alors $(MN)^k = M^k N^k$ puisque M et N commutent ($MN = NM$), mais comme $M^k = 0$ alors $(MN)^k = 0$ et donc MN est nilpotente.

- Posons $K = k + k'$.

Comme M et N commutent on a par la formule du binôme de Newton : $(M + N)^K = \sum_{i=0}^K \binom{K}{i} M^i N^{K-i}$

Si $i \leq k$ alors $K - i \geq k'$ donc $N^{K-i} = 0$ et donc $M^i N^{K-i} = 0$

Si $i \geq k$ alors $M^i = 0$ et donc $M^i N^{K-i} = 0$

Finalement $M + N = 0$ puisque l'on a une combinaison linéaire de matrices nulles, et $K \geq 1$ donc $M + N$ est nilpotente.

Bilan : Si M et N sont nilpotentes et commutent, alors MN et $M + N$ sont nilpotentes.

Q8) $(M + N)^2 - M^2 - N^2 = MN + NM$

Comme M , N et $M + N$ sont nilpotentes, alors d'après Q6), $(M + N)^2$, N^2 et M^2 sont aussi nilpotentes et leur trace est nulle d'après Q5).

En prenant la trace dans la relation ci-dessus on obtient : $tr(MN) + tr(NM) = 0$ et comme $tr(MN) = tr(NM)$ alors $tr(MN) = 0$ (on a utilisé Q1))

Bilan : $M, N, M + N$ nilpotentes $\Rightarrow tr(MN) = 0$

Q9) D'après Q5) on a déjà $M \in N_2 \Rightarrow det(M) = tr(M) = 0$

Réciproquement, soit $M \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $det(M) = tr(M) = 0$

Alors, par Hamilton-Cayley : $M^2 - tr(M)M + det(M)I_2 = 0_2 \Rightarrow M^2 = 0 \Rightarrow M$ est nilpotente

On a donc $M \in M_2(\mathbb{R})$ nilpotente $\Leftrightarrow tr(M) = det(M) = 0$

Q10) Soit A symétrique réelle et nilpotente. Alors $sp(A) \subset \{0\}$ car A est nilpotente et A est diagonalisable car symétrique réelle. On a alors A semblable à la matrice nulle et donc $A = 0$.

La seule matrice symétrique réelle nilpotente est la matrice nulle.

Q11) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ antisymétrique et nilpotente.

$A^T A = (-A)A = -A^2 = A(-A) = AA^T$ donc A et A^T commutent. Comme A et A^T commutent et sont nilpotentes, alors avec Q7) $A^T A$ est nilpotente.

$(A^T A)^T = (A^T)(A^T)^T = A^T A$ donc $A^T A$ est symétrique.

En utilisant Q10) avec $A^T A$ qui est symétrique et nilpotente, alors $A^T A$ est nulle et donc avec Q3), A est nulle.

A antisymétrique réelle et nilpotente $\Rightarrow A = 0$

Q12) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ alors $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^3 = A$, donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^{2k+1} = A \neq 0$ et donc A n'est pas nilpotente, alors que $det(A) = tr(A) = 0$

Q13) Cherchons $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $E_i = a(V - 2E_i) + bV$, alors en regardant la coordonnée i et les autres séparément : $\begin{cases} 1 = a - 2a + b \\ 0 = a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$

On a donc la relation (qui peut se trouver directement) : $E_i = \frac{-1}{2}(V - 2E_i) + \frac{1}{2}V$

On remarque que V et $V - 2E_i \in V_{n,1}$ donc $E_i \in Vect(V_{n,1})$ on a donc $Vect(E_1, \dots, E_n) \subset Vect(V_{n,1})$

Comme $(E_1, \dots, E_n)$ est la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ alors : $Vect(V_{n,1}) = M_{n,1}(\mathbb{R})$

Q14) Posons $j = \max(\{k \in \llbracket 1; n \rrbracket, (C_1, \dots, C_k) \text{ libre}\})$

Alors j existe et $j \geq 1$ car c'est le max d'une partie de $\mathbb{N}$ non vide (en effet (C_1) libre car $C_1 \neq 0$, donc $j \geq 1$) et majorée par n .

On a $j \leq n-1$ car $j = n$ donnerai $(C_1, \dots, C_n)$ libre ce qui n'est pas le cas puisque la famille est liée.

Par définition de $j : (C_1, \dots, C_j, C_{j+1})$ est liée, donc

$$\exists (a_1, \dots, a_j, a_{j+1}) \neq (0, \dots, 0, 0) \text{ tel que : } \sum_{i=1}^j a_i C_i + a_{j+1} C_{j+1} = 0$$

Si $a_{j+1} = 0$ alors $\sum_{i=1}^j a_i C_i = 0$ et donc $a_1 = \dots = a_j = 0$ car $(C_1, \dots, C_j)$ libre. Impossible

Donc $a_{j+1} \neq 0$ et $C_{j+1} = \sum_{i=1}^j \frac{-a_i}{a_{j+1}} C_i \in \text{Vect}(C_1, \dots, C_j)$

Si $j' < j$ alors $(C_1, \dots, C_{j'+1})$ est libre donc j' ne convient pas.

Si $j' > j$ alors $(C_1, \dots, C_{j'})$ est liée donc j' ne convient pas.

On a donc j unique.

On a donc Il existe un unique j telle que $(C_1, \dots, C_j)$ libre et $C_{j+1} \in \text{Vect}(C_1, \dots, C_j)$

Q15) Considérons la matrice $\tilde{U}$ dont les colonnes sont les vecteurs $U_1 \dots U_d$

Alors comme la famille $(U_1, \dots, U_d)$ est libre, cette matrice est de rang d .

Il existe donc d lignes de $\tilde{U}$, notée $(L_{i_1}, \dots, L_{i_d})$ avec $1 \leq i_1 < \dots < i_d \leq n$ telle que $(L_{i_1}, \dots, L_{i_d})$ soit libre.

Considérons : $\Phi : \begin{matrix} H & \longrightarrow & \mathbb{R}^d \\ (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & (x_{i_1}, \dots, x_{i_d}) \end{matrix}$ qui est de manière évidente une application linéaire

de H dans $\mathbb{R}^d$.

Considérons M_Φ la matrice de Φ relativement à la base $(U_1, \dots, U_d)$ de H et à la base canonique de $\mathbb{R}^d$.

Alors on a : $M_\Phi = \begin{pmatrix} L_{i_1} \\ \vdots \\ L_{i_d} \end{pmatrix}$ qui est de rang d par construction.

Φ est une application linéaire, de rang d , entre deux espaces vectoriels de dimension d : c'est donc un isomorphisme de $\mathbb{R}$ espace vectoriel et donc Φ est bijective.

Q16) Par Q15), on voit qu'un vecteur de W est déterminé par d de ses coordonnées.

W est en bijection avec $M_{d,1}(\mathbb{R})$ et $\text{card}(M_{d,1}(\mathbb{R}) \cap V_{d,1}(\mathbb{R})) = 2^d$ (1 ou -1 pour les coordonnées x_{i_k})

Donc $\text{card}(W \cap V_{d,1}(\mathbb{R})) \leq 2^d$

Q17) Soit $X \hookrightarrow R$. On pose $Y = \frac{X+1}{2}$, alors $Y(\Omega) = \{0; 1\}$ avec $P(Y = 0) = P(X = -1) = \frac{1}{2}$ et $P(Y = 1) = P(X = 1) = \frac{1}{2}$ On reconnaît une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

Donc $X \hookrightarrow R \Rightarrow \frac{1}{2}(X+1) \hookrightarrow B(\frac{1}{2})$

Q18) Soit $X \hookrightarrow R$. X admet une variance et une espérance car $X(\Omega)$ est fini.

$$\mathbb{E}(X) = -1\mathbb{P}(X = -1) + 1\mathbb{P}(X = 1) = 0$$

$$X^2 = 1 \text{ donc } \mathbb{E}(X^2) = 1 \text{ et } \mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 1 - 0 = 1$$

On a donc $X \hookrightarrow R \Rightarrow \mathbb{E}(X) = 0 \text{ et } \mathbb{V}(X) = 1$

Q19) Directement $XY(\Omega) = \{-1; 1\}$

$$(XY = 1) = (X = 1 \cap Y = 1) \cup (X = -1 \cap Y = -1)$$

On a une union de deux événements incompatibles donc $\mathbb{P}(XY = 1) = \mathbb{P}(X = 1 \cap Y = 1) + \mathbb{P}(X = -1 \cap Y = -1)$

Mais X et Y sont indépendantes donc : $\mathbb{P}(XY = 1) = \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 1) + \mathbb{P}(X = -1)\mathbb{P}(Y = -1) = \frac{1}{2} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

De même $\mathbb{P}(XY = -1) = \frac{1}{2}$ et donc $XY \hookrightarrow R$ Donc : $X \hookrightarrow R \text{ et } Y \hookrightarrow R \Rightarrow XY \hookrightarrow R$

$$\text{Q20)} \tau_n = \text{tr}(M_n) = \sum_{k=1}^n m_{i,i}$$

Par linéarité de l'espérance : $\mathbb{E}(\tau_n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(m_{i,i}) = \sum_{k=1}^n 0 = 0$

Comme les $m_{i,j}$ sont mutuellement indépendants : $\mathbb{V}(\tau_n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{V}(m_{i,i}) = \sum_{k=1}^n 1 = n$

On a donc $\boxed{\mathbb{E}(\tau_n) = 0 \text{ et } \mathbb{V}(\tau_n) = n}$

Q21) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que : $\mathbb{E}(\delta_n) = 0$

Initialisation : Si $n = 1$ on a $\delta_1 = m_{1,1}$ donc $\mathbb{E}(\delta_1) = \mathbb{E}(m_{1,1}) = 0$ (car $m_{1,1} \hookrightarrow R$).

Hérédité : Soit $n \geq 2$. On suppose le résultat vraie au rang $n - 1$.

Alors, en développant par rapport à la première ligne :

$\delta_n = \det(M_n) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} m_{1,j} \det(M'_{i,j})$ où $M'_{i,j}$ est la matrice obtenue en supprimant la première ligne de M_n et la j -ième colonne.

Comme les $m_{i,j}$ sont mutuellement indépendantes. Alors, avec le lemme des coalitions :

$\mathbb{E}(\delta_n) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \mathbb{E}(m_{1,j}) \mathbb{E}(\det(M'_{i,j}))$ et comme $\mathbb{E}(m_{i,j}) = 0$ (hypothèse de récurrence au rang $n - 1$)

alors on a : $\mathbb{E}(\delta_n) = 0$.

Conclusion : on a donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{E}(\delta_n) = 0}$

Q22) Montrons par récurrence sur $n \geq 1$ que $\mathbb{V}(\delta_n) = n!$

Pour $n = 1$ on a déjà démontré le résultat à la question Q18).

Supposons le résultat est vraie au rang $n - 1$.

On a : $\delta_n = \det(M_n) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} m_{1,j} \det(M'_{i,j})$

Par le lemme des coalitions les $(m_{1,j} \det(M'_{i,j}))$ sont indépendantes et donc : $\mathbb{V}(\delta_n) = \sum_{j=1}^n \mathbb{V}(m_{1,j} \det(M'_{i,j}))$

Mais $\mathbb{V}(m_{1,j} \det(M'_{i,j})) = \mathbb{E}((m_{1,j} \det(M'_{i,j}))^2) - \mathbb{E}(m_{1,j} \det(M'_{i,j}))^2$

Par indépendance mutuelle :

$\mathbb{V}(m_{1,j} \det(M'_{i,j})) = \mathbb{E}(m_{1,j}^2) \mathbb{E}(\det(M'_{i,j})^2) - \mathbb{E}(m_{1,j}) \mathbb{E}(\det(M'_{i,j}))^2$

Or $\mathbb{E}(m_{1,j}^2) = 1$ et $\mathbb{E}(m_{1,j}) = 0$ donc

$\mathbb{V}(m_{1,j} \det(M'_{i,j})) = \mathbb{E}(\det(M'_{i,j})^2) = \mathbb{V}(\det(M'_{i,j})) + \mathbb{E}(\det(M'_{i,j}))^2 = \mathbb{V}(\delta_{n-1}) + \mathbb{E}(\delta_{n-1})^2 = \mathbb{V}(\delta_{n-1})$

Mais $\mathbb{V}(\delta_{n-1}) = (n-1)!$ par hypothèse de récurrence au rang $n - 1$.

On a donc : $\mathbb{V}(\delta_n) = \sum_{j=1}^n (n-1)! = n(n-1)! = n!$

Conclusion : on a montré par récurrence que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{V}(\delta_n) = n!}$

Q23) D'après Q9) : $M_2 \in N_2 \Leftrightarrow \det(M_2) = \text{tr}(M_2) = 0$

Donc $M_2 \in N_2 \Leftrightarrow \begin{cases} m_{11} + m_{22} = 0 \\ m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_{22} = -m_{11} \\ -m_{11}^2 - m_{12}m_{21} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_{22} = -m_{11} \\ m_{12}m_{21} = -1 \end{cases}$

Alors : $(M_2 \in N_2)$ est l'union disjointe des événements : $(m_{11} = 1 \cap m_{22} = -1 \cap m_{12} = 1 \cap m_{21} = -1)$, $(m_{11} = 1 \cap m_{22} = -1 \cap m_{12} = -1 \cap m_{21} = 1)$, $(m_{11} = 1 \cap m_{22} = 1 \cap m_{12} = -1 \cap m_{21} = -1)$

et $(m_{11} = -1 \cap m_{22} = 1 \cap m_{12} = -1 \cap m_{21} = 1)$ qui correspondent aux matrices M_2 suivantes :

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Par incompatibilités et indépendances, on a : $\boxed{\mathbb{P}(M_2 \in N_2) = 4 \times (\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{4}}$

Q24) $M_2 \notin Gl_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \det(M_2) = 0 \Leftrightarrow m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21} = 0 \Leftrightarrow m_{11}m_{22} = m_{12}m_{21}$
 Mais $X = m_{11}m_{22}$ et $Y = m_{12}m_{21}$ sont indépendantes et suivent la loi R d'après Q19).
 Donc $(M_2 \notin Gl_2(\mathbb{R})) = (X = Y) = [(X = 1 \cap Y = 1) \cup (X = -1 \cap Y = -1)]$
 Par incompatibilité et indépendances : $\mathbb{P}(M_2 \notin Gl_2(\mathbb{R})) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Mais $\mathbb{P}(M_2 \in Gl_2(\mathbb{R})) = 1 - \mathbb{P}(M_2 \notin Gl_2(\mathbb{R})) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ et donc $\boxed{\mathbb{P}(M_2 \in Gl_2(\mathbb{R})) = \frac{1}{2}}$

25) $\mathbb{P}((c_1 = \epsilon_1) \cap \dots \cap (c_n = \epsilon_n)) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}((c_k = \epsilon_k))$ par indépendance mutuelle et comme pour tout k :

$\mathbb{P}((c_k = \epsilon_k)) = \frac{1}{2}$ on obtient : $\boxed{\mathbb{P}((c_1 = \epsilon_1) \cap \dots \cap (c_n = \epsilon_n)) = \frac{1}{2^n}}$

26) Comme $C(\omega') \neq 0$ alors :

$(C(\omega), C(\omega'))$ liée

$\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, C(\omega) = \lambda C(\omega')$

$\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, c_i = \lambda c'_i$ on multiplie par c'_i et on utilise $(c'_i)^2 = 1$

$\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, c'_i c_i = \lambda$

$\Rightarrow \lambda = 1$ ou $\lambda = -1$ (car λ est constant et ne peut prendre qu'une de ces 2 valeurs)

En posant $\epsilon = \lambda$, on a donc $(C(\omega), C(\omega'))$ liée $\Rightarrow \exists \epsilon \in \{-1; 1\}$ tel que $C(\omega) = \lambda C(\omega')$

La réciproque est évidente, donc : $\boxed{(C(\omega), C(\omega')) \text{ liée} \Leftrightarrow \exists \epsilon \in \{-1; 1\} \text{ tel que } C(\omega) = \lambda C(\omega')}$

27) D'après Q26), $(C(\omega), C(\omega'))$ liée $\Leftrightarrow (\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, c_i c'_i = 1)$ ou $(\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, c_i c'_i = -1)$

On a la réunion de deux événements incompatibles, et comme les $c_i c'_i \hookrightarrow R$ alors :

$\mathbb{P}((C(\omega), C(\omega')) \text{ liée}) = \mathbb{P}(c_1 c'_1 = 1 \cap \dots \cap c_n c'_n = 1) + \mathbb{P}(c_1 c'_1 = -1 \cap \dots \cap c_n c'_n = -1) = 2 \times \frac{1}{2^n}$ par Q25)

Donc $\boxed{\mathbb{P}((C(\omega), C(\omega')) \text{ liée}) = \frac{1}{2^{n-1}}}$

28) • Si $(C_1, \dots, C_n)$ est libre alors R_n , est vérifié.

• Si $(C_1, \dots, C_n)$ n'est pas libre (donc liée), alors, comme C_1 est non nulle on peut appliquer la question Q14) et il existe un unique $j \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$ tel que l'on est R_j .

Les R_j sont clairement incompatibles 2 à 2 et leur union donne Ω , on a bien :

$\boxed{(R_1, \dots, R_n), \text{ est un système complet d'événements.}}$

29) En utilisant le système complet d'événements du 28) :

$\mathbb{P}(M \notin GL_n(\mathbb{R})) = \mathbb{P}(\overline{R_n}) = \mathbb{P}(R_1 \cup \dots \cup R_{n-1}) = \sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{P}(R_j)$

Mais $R_j = [(C_1, \dots, C_j) \text{ libre et } C_{j+1} \in Vect(C_1, \dots, C_j)] \subset [C_{j+1} \in Vect(C_1, \dots, C_j)]$ (car $A \cap B \subset B$)

Par croissance de la probabilité on a : $\mathbb{P}(R_j) \leq \mathbb{P}(C_{j+1} \in Vect(C_1, \dots, C_j))$ et donc, en reportant ci-dessus :

$\boxed{\mathbb{P}(M \notin GL_n(\mathbb{R})) \leq \sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{P}(C_{j+1} \in Vect(C_1, \dots, C_j))}$

30) $(C_1 = V_1 \cap \dots \cap C_j = V_j)_{(V_1, \dots, V_j) \in V_{n,1}^j}$ est un système complet d'événements.

Par la formule des probabilités totales sur ce système complet d'événements :

$$\mathbb{P}(C_{j+1} \in Vect(C_1, \dots, C_j)) = \sum_{(V_1, \dots, V_j) \in V_{n,1}^j} \mathbb{P}((C_{j+1} \in Vect(C_1, \dots, C_j)) \cap (C_1 = V_1 \cap \dots \cap C_j = V_j))$$

Et par le lemme des coalitions et indépendances mutuelle :

$$\boxed{\mathbb{P}(C_{j+1} \in Vect(C_1, \dots, C_j)) = \sum_{(V_1, \dots, V_j) \in V_{n,1}^j} \mathbb{P}((C_{j+1} \in Vect(C_1, \dots, C_j))) \mathbb{P}((C_1 = V_1 \cap \dots \cap C_j = V_j))}$$

31) Soit $j \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$. Pour $(v_1, \dots, v_j) \in V_{n,1}^j$ on a $\dim(vect(v_1, \dots, v_j)) \leq j$

Donc, par Q16) : $\text{card}(Vect(v_1, \dots, v_j) \cap V_{n,1}) \leq 2^j$

D'après Q25), $\forall v \in V_{n,1}$, $\mathbb{P}(C_{j+1} = v) = \frac{1}{2^n}$ donc :

$$\mathbb{P}(C_{j+1} \in Vect(v_1, \dots, v_j)) = \mathbb{P}(C_{j+1} \in Vect(v_1, \dots, v_j) \cap V_{n,1}) \leq \text{card}(Vect(v_1, \dots, v_j) \cap V_{n,1}) \frac{1}{2^n} = 2^j \frac{1}{2^n} = 2^{j-n}$$

$$\text{D'après Q30) : } \mathbb{P}(C_{j+1} \in Vect(C_1, \dots, C_j)) \leq \sum_{(V_1, \dots, V_j) \in V_{n,1}^j} 2^{j-n} \mathbb{P}((C_1 = V_1 \cap \dots \cap C_j = V_j))$$

$$\text{Donc } \mathbb{P}(C_{j+1} \in Vect(C_1, \dots, C_j)) \leq 2^{j-n} \sum_{(V_1, \dots, V_j) \in V_{n,1}^j} \mathbb{P}((C_1 = V_1 \cap \dots \cap C_j = V_j)) = 2^{j-n}$$

car $\sum_{(V_1, \dots, V_j) \in V_{n,1}^j} \mathbb{P}((C_1 = V_1 \cap \dots \cap C_j = V_j)) = 1$ puisque $[(V_1, \dots, V_j) \in V_{n,1}^j]$ est un système complet d'événements.

$$\text{On a donc finalement : } \boxed{\forall j \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket, \mathbb{P}(C_{j+1} \in Vect(C_1, \dots, C_j)) \leq 2^{j-n}}$$

$$32) \text{ Q29) et Q31) donnent : } \mathbb{P}(M \notin GL_n(\mathbb{R})) \leq \sum_{j=1}^{n-1} 2^{j-n} = 2^{1-n} \frac{1-2^{n-1}}{1-2} = 2^{1-n} (2^{n-1} - 1) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\text{Et comme } \boxed{\mathbb{P}(M \in GL_n(\mathbb{R})) = 1 - \mathbb{P}(M \notin GL_n(\mathbb{R})) \text{ alors } \mathbb{P}(M \in GL_n(\mathbb{R})) \geq \frac{1}{2^{n-1}}}$$

33) 34) 35)

```
def modifie_matrice(p,A):
    n=A.shape(1)
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            if A[i][j]==1 and rd.binomiale(1,p)==1:
                A[i][j]==-1
    return A

def nb_tours(p,n):
    A=np.ones((n,n))
    nbt=0
    while A.sum()<n*n:
        nbt+=1
        A=modifie_matrice(p,A)
    return nbt

def moyenne_tours(p,n,nbe)
    m=0
    for i in range(nbe):
        m=m+nb_tours(p,n)
    return m/nbe
```

36) Par Cauchy-Schwarz on a : $|\langle u_i | u_j \rangle| \leq \|u_i\| \|u_j\|$ et comme u_i et u_j sont unitaires alors : $|\langle u_i | u_j \rangle| \leq 1$

$C(u)$ est donc le sup d'une partie non vide (car I possède au moins deux éléments) de $\mathbb{R}$ incluse dans $[0; 1]$, donc $C(u)$ existe et appartient à $[0; 1]$

37) Si $C(u) = 0$ alors $\forall (i, j) \in I^2, i \neq j \Rightarrow \langle u_i | u_j \rangle = 0$ et donc (u_i) est une famille orthonormale de $M_{n,1}(\mathbb{R})$, donc libre, donc finie et $\text{card}(\{u_i, i \in I\}) \leq \dim(M_{n,1}(\mathbb{R})) = n$.

Donc $C(u) = 0 \Rightarrow \{u_i, i \in I\}$ est finie et $\text{card}(\{u_i, i \in I\}) \leq n$

38) Utilisons les DSE_0 valables sur $\mathbb{R}$ de ch et de $t \mapsto \exp(\frac{t^2}{2})$
 $\exp(\frac{t^2}{2}) - ch(t) = [\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\frac{t^2}{2})^n}{n!}] - [\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!}] = \sum_{n=0}^{+\infty} [\frac{1}{2^n n!} - \frac{1}{(2n)!}] t^{2n}$

Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n n! \leq (2n)!$

Vraie au rang 0 et au rang 1 car $1 \leq 1$ et $2 \leq 2$

Si l'hypothèse est vraie au rang n alors : $2^n n! \leq (2n)!$

Comme $1 \leq 2n+1$, en multipliant les deux inégalités (termes positifs) : $2^n n! \leq (2n+1)(2n)!$ on multiplie par $2n+2 = 2(n+1)$ et on obtient : $2^{n+1}(n+1)n! \leq (2n+2)(2n+1)(2n)! \Rightarrow 2^{n+1}(n+1)! \leq (2n+2)!$

Mais : $\frac{1}{2^n n!} - \frac{1}{(2n)!} \geq 0 \Leftrightarrow 2^n n! \leq (2n)!$ donc $\exp(\frac{t^2}{2}) - ch(t)$ est la somme de termes positifs et donc $\forall t \in \mathbb{R}, ch(t) \leq \exp(\frac{t^2}{2})$

39) $\exp(t < X|Y >) = \exp(\frac{t}{n} \sum_{i=1}^n X_i Y_i) = \prod_{i=1}^n \exp(\frac{t}{n} X_i Y_i)$

Comme les variables aléatoires en questions sont indépendantes (théorème des coalitions) :

$$\mathbb{E}(\exp(t < X|Y >)) = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}(\exp(\frac{t}{n} X_i Y_i))$$

Comme $X_i Y_i \hookrightarrow R$ alors $\mathbb{E}(\exp(\frac{t}{n} X_i Y_i)) = \frac{1}{2} \exp(\frac{t}{n}) + \frac{1}{2} \exp(-\frac{t}{n}) = ch(\frac{t}{n})$

Donc $\mathbb{E}(\exp(t < X|Y >)) = (ch(\frac{t}{n}))^n$

40) On utilise Q38) dans Q39) : $\mathbb{E}(\exp(t < X|Y >)) \leq (\exp(\frac{(\frac{t}{n})^2}{2}))^n = (\exp(\frac{t^2}{2n^2}))^n = \exp(\frac{t^2}{2n})$

On a donc $\mathbb{E}(\exp(t < X|Y >)) \leq \exp(\frac{t^2}{2n})$

41) En appliquant Markov à la variable aléatoire $\exp(tZ)$ on a : $\exp(t\lambda) \mathbb{P}(\exp(tZ) \geq \exp(t\lambda)) \leq \mathbb{E}(\exp(tZ))$

Comme $t \geq 0$ on a bien $\mathbb{P}(\exp(tZ) \geq \exp(t\lambda)) = \mathbb{P}(Z \geq \lambda)$ et alors :

$\exp(t\lambda) \mathbb{P}(Z \geq \lambda) \leq \mathbb{E}(\exp(tZ)) \leq \exp(\frac{\sigma^2 t^2}{2})$ (hypothèse de l'énoncé pour la dernière inégalité)

et donc $\mathbb{P}(Z \geq \lambda) \leq \exp(\frac{\sigma^2 t^2}{2} - \lambda t)$

42) Posons $\forall t \geq 0, a(t) = \frac{\sigma^2 t^2}{2} - \lambda t$ Alors a est dérivable et $a'(t) = \sigma^2 t - \lambda$

On a le tableau de variation suivant (puisque $\sigma > 0$ et $\lambda > 0$) :

t	0	$\frac{\lambda}{\sigma^2}$	$+\infty$
$a'(t)$	-	+	+
$a(t)$	0	$\searrow$ A $\nearrow$	$+\infty$

$$\text{avec } A = a(\frac{\lambda}{\sigma^2}) = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\lambda^2}{\sigma^4} - \lambda \frac{\lambda}{\sigma^2} = \frac{-\lambda^2}{2\sigma^2}$$

Comme l'inégalité de 41) est vraie en particulier pour $t = \frac{\lambda}{\sigma^2}$ alors on a (puisque $\exp$ est croissante) :

$$\mathbb{P}(Z \geq \lambda) \leq \exp(\frac{-\lambda^2}{2\sigma^2})$$

On reprend le même raisonnement que ci-dessus en remplaçant Z par $-Z$ et t par $-t$ (on a alors $tZ = (-t)(-Z)$) pour montrer que $\mathbb{P}(Z \leq -\lambda) \leq \exp(\frac{-\lambda^2}{2\sigma^2})$

Alors : $\mathbb{P}(|Z| \geq \lambda) = \mathbb{P}(Z \geq \lambda) + \mathbb{P}(Z \leq -\lambda)$ et avec les deux résultats ci-dessus : $\mathbb{P}(|Z| \geq \lambda) \leq 2\exp(\frac{-\lambda^2}{2\sigma^2})$

Q43) On peut applique Q42) avec $Z = \langle X, Y \rangle$, $\lambda = \varepsilon$ et $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}}$ puisque le résultat de Q40) permet de vérifier l'hypothèse voulue sur Z , on a donc : $\mathbb{P}(|\langle X, Y \rangle| \geq \varepsilon) \leq 2\exp(\frac{-\varepsilon^2 n}{2})$

$$\text{Q44) } \mathbb{P}\left(\bigcup_{1 \leq i < j \leq N} |\langle X^i | X^j \rangle| \geq \varepsilon\right) \leq \sum_{1 \leq i < j \leq N} \mathbb{P}\left(|\langle X^i | X^j \rangle| \geq \varepsilon\right)$$

On utilise alors Q43) : $\mathbb{P}\left(\bigcup_{1 \leq i < j \leq N} |\langle X^i | X^j \rangle| \geq \varepsilon\right) \leq \sum_{1 \leq i < j \leq N} 2\exp(\frac{-\varepsilon^2 n}{2})$ (cette somme a $\frac{N(N-1)}{2}$ termes)

et donc $\mathbb{P}\left(\bigcup_{1 \leq i < j \leq N} |\langle X^i | X^j \rangle| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{N(N-1)}{2} 2\exp(\frac{-\varepsilon^2 n}{2}) \leq N(N-1)\exp(\frac{-\varepsilon^2 n}{2})$

$$\text{Bilan : } \mathbb{P}\left(\bigcup_{1 \leq i < j \leq N} |\langle X^i | X^j \rangle| \geq \varepsilon\right) \leq N(N-1)\exp(\frac{-\varepsilon^2 n}{2})$$

Q45) Si $n \geq 4\frac{\ln(N)}{\varepsilon^2}$ alors $\frac{\varepsilon^2 n}{2} \geq 2\ln(N)$ et donc $-2\ln(N) \geq -\frac{\varepsilon^2 n}{2}$

On utilise que $\exp$ est croissante et donc $\exp(-\frac{\varepsilon^2 n}{2}) \leq \exp(-2\ln(N))$

On reporte dans l'inégalité de Q44) :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{1 \leq i < j \leq N} |\langle X^i | X^j \rangle| \geq \varepsilon\right) \leq N(N-1)\exp(-2\ln(N)) = \frac{N(N-1)}{N^2} = 1 - \frac{1}{N} < 1$$

$$\text{On a donc } \mathbb{P}\left(\bigcup_{1 \leq i < j \leq N} |\langle X^i | X^j \rangle| \geq \varepsilon\right) < 1$$

Q46) La condition de Q45) s'écrit aussi : $n \geq 4\frac{\ln(N)}{\varepsilon^2} \Leftrightarrow \frac{n\varepsilon^2}{4} \geq \ln(N) \Leftrightarrow N \leq \exp(\frac{n\varepsilon^2}{4})$

On déduit de Q45) que $\mathbb{P}\left(\bigcup_{1 \leq i < j \leq N} |\langle X^i | X^j \rangle| < \varepsilon\right) > 0$, l'événement $\left(\bigcup_{1 \leq i < j \leq N} (|\langle X^i | X^j \rangle| < \varepsilon)\right)$ est donc possible.

On remarque que les (X^i) sont unitaires.

Bilan :

$$\text{Pour tout entier naturel } N \text{ tel que } N \leq \exp(\frac{n\varepsilon^2}{4}),$$

il existe une famille de vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^n$ dont le paramètre de cohérence est majorée par ε .