

Devoir surveillé de Mathématiques n°8 : type ccINP

La présentation, la qualité de la rédaction, la clarté des raisonnements, l'orthographe entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Si le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les changements que cette erreur implique.

LA CALCULATRICE N'EST PAS AUTORISÉE

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Respecter impérativement l'ordre des questions.
- Écrire le mot **FIN** à la fin de votre composition
- Dessiner un chat en dessous du mot **FIN**.
- Conclure chaque question, utiliser une argumentation précise, **encadrer les résultats**.

EXERCICE : Fonction de Bessel

Soit une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^\pi \cos(x \sin(t)) dt.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note:

$$W_n = \int_0^\pi (\sin(t))^{2n} dt.$$

Q1) Montrer que f est bien définie sur \mathbb{R} .

Q2) Montrer que f est de classe C^2 sur \mathbb{R} et donner des expressions sous forme d'intégrales de $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Q3) Soit une fonction $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par:

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, \quad h(x, t) = \cos(t) \sin(x \sin(t)).$$

Justifier l'existence de $\frac{\partial h}{\partial t}$, puis déterminer $\frac{\partial h}{\partial t}(x, t)$ pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^2$.

Q4) En déduire que f est solution de l'équation différentielle:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad xy''(x) + y'(x) + xy(x) = 0. \tag{E}$$

Q5) On suppose qu'il existe une solution de (E) développable en série entière notée $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$.

Montrer que $a_1 = 0$ et que pour tout entier $n \geq 2$:

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n^2}.$$

Q6) En utilisant un théorème d'interversion série-intégrale, montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0 et exprimer les coefficients du développement de f en fonction des termes de la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Q7) Dédurre des questions précédentes que f est l'unique solution développable en série entière de (E) vérifiant $f(0) = \pi$.

Q8) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de W_n en fonction de n .

PROBLÈME 1 : Marche aléatoire sur \mathbb{Z}

On considère une particule se déplaçant sur une droite graduée par les entiers relatifs. Sa position à l'instant initial $t = 0$ est $k = 0$. À chaque instant $t \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, elle se déplace aléatoirement de sa position $k \in \mathbb{Z}$ à la position $k + 1$ ou $k - 1$.

Soit $p \in]0, 1[$. On définit sur un espace probabilisé (Ω, Σ, P) une suite de variables aléatoires indépendantes $(X_t)_{t \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ et identiquement distribuées dont la loi est définie par:

$$\forall t \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad P(X_t = 1) = p, \quad \text{et:} \quad P(X_t = -1) = 1 - p.$$

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on pose : $S_n = \sum_{t=1}^n X_t$.

Pour tout $t \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, la variable aléatoire X_t modélise le déplacement de la particule à l'instant t . Si $X_t = 1$, la particule se déplace vers la droite. Si $X_t = -1$, la particule se déplace vers la gauche. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, S_n modélise la position de la particule après n déplacements.

On rappelle la formule de Stirling:

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Partie I – Un développement en série entière

Q9) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha \notin \mathbb{N}$. Donner sans démonstration un développement en série entière de la fonction réelle $x \mapsto (1+x)^\alpha$ au voisinage de 0 en précisant son rayon de convergence.

Q10) En déduire que pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} x^n.$$

Partie II – Probabilité de retour à l'origine

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ par:

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad u_n = P(S_n = 0).$$

Q11) Pour tout $t \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, déterminer la loi de la variable aléatoire $\frac{X_t + 1}{2}$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, la variable aléatoire $\sum_{t=1}^n \frac{X_t + 1}{2}$ suit la loi binomiale dont on précisera les paramètres.

Q12) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$u_n = \begin{cases} \binom{n}{n/2} (p(1-p))^{n/2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Q13) Déterminer la limite de la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ lorsque n tend vers $+\infty$ et interpréter le résultat.

Partie III – Nombre de passages par l'origine

Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on note O_{2j} la variable aléatoire égale à 1 si la particule est à l'origine à l'instant $t = 2j$, et 0 sinon. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $T_n = \sum_{j=0}^n O_{2j}$. On note $E(T_n)$ l'espérance de la variable aléatoire T_n .

Dans cette partie, on souhaite déterminer: $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(T_n)$.

Q14) Soit $n \in \mathbb{N}$. Que modélise la variable aléatoire T_n ?

Q15) Soit $j \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi de la variable aléatoire O_{2j} . En déduire que:

$$E(T_n) = \sum_{j=0}^n \binom{2j}{j} (p(1-p))^j.$$

Q16) On suppose dans cette question que $p \neq \frac{1}{2}$.

En utilisant le résultat de la question Q10), calculer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(T_n)$, et interpréter le résultat.

Q17) On suppose dans cette question que $p = \frac{1}{2}$. Montrer par récurrence que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad E(T_n) = \frac{2n+1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}$$

et en déduire: $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(T_n)$.

PROBLEME 2 : Temps d'attente avant une collision

Présentation générale

On considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose d'une urne contenant n boules numérotées par les entiers de 1 à n . On procède à une succession de tirages avec remise dans cette urne. On s'intéresse au nombre de tirages nécessaires pour tirer pour la seconde fois une boule déjà tirée auparavant.

Pour modéliser cette situation, on se place sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) et on considère une suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires réelles indépendantes de loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. On considère la variable aléatoire T_n définie de la façon suivante :

$$T_n = \min \{j \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket \mid \exists i \in \llbracket 1, j-1 \rrbracket, X_i = X_j\}$$

Par exemple, si on suppose que $n = 4$ et que l'événement :

$$(X_1 = 1) \cap (X_2 = 3) \cap (X_3 = 2) \cap (X_4 = 3) \cap (X_5 = 4)$$

est réalisé, alors on a $T_n = 4$, car c'est au quatrième tirage que pour la première fois réapparaît un résultat déjà obtenu.

L'objectif de cet exercice est de déterminer un équivalent de l'espérance de la variable aléatoire T_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Partie I - Une expression de l'espérance de T_n

18. Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire T_n .

Dans la suite de cette partie, on considère un entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et la variable aléatoire $Z = (X_1, \dots, X_k)$.

19. Justifier que Z suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket^k$.

20. Dans cette question, on considère l'évènement :

$$A = \{(a_1, \dots, a_k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^k \mid \text{les éléments } a_1, \dots, a_k \text{ sont deux à deux distincts}\}.$$

Exprimer le cardinal de A en fonction de n et de k , puis en déduire que :

$$P(T_n > k) = P(Z \in A) = \frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{n^k}$$

On remarque que le résultat de la question précédente est encore valable pour $k = 0$.

21. Justifier que la variable aléatoire T_n est d'espérance finie et que l'on a :

$$E(T_n) = \sum_{\ell=0}^n \frac{n!}{(n-\ell)!} \frac{1}{n^\ell}$$

Partie II - Une expression intégrale de l'espérance

Dans cette partie, on détermine une expression de l'espérance de T_n sous la forme d'une intégrale.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale :

$$I_k = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt$$

22. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale I_k est convergente.

23. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $I_k = k !$.

24. En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t} dt$ converge, puis que :

$$E(T_n) = \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t} dt$$

Partie III - Un équivalent de l'espérance

Dans cette partie, on détermine un équivalent de l'intégrale obtenue à la question 24) lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les intégrales :

$$I_n = \int_0^n \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t} dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_n^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t} dt$$

Les résultats de la partie précédente impliquent la convergence de ces deux intégrales.

III. 1 - Étude de la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$

25. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant un changement de variable, établir que :

$$J_n = e^{-n} \int_0^{+\infty} \left(2 + \frac{v}{n}\right)^n e^{-v} dv$$

26. Montrer que la suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad K_n = \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{v}{2n}\right)^n e^{-v} dv$$

est bornée. On pourra utiliser librement l'inégalité $1 + x \leq e^x$ valable pour tout $x \in \mathbb{R}$.

27. En déduire que la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

III. 2 - Étude de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

Dans cette sous-partie, on définit la fonction $f_n :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall u \in]0, +\infty[, \quad f_n(u) = \begin{cases} \left(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-u\sqrt{n}} & \text{si } u < \sqrt{n} \\ 0 & \text{si } u \geq \sqrt{n} \end{cases}$$

28. Montrer que :

$$I_n = \sqrt{n} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-u\sqrt{n}} du = \sqrt{n} \int_0^{+\infty} f_n(u) du$$

29. Montrer que pour tout $u \in]0, \sqrt{n}[$, on a l'égalité :

$$\ln(f_n(u)) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \frac{u^k}{n^{\frac{k}{2}-1}}$$

30. En déduire que pour tout $u \in]0, \sqrt{n}[$, on a les inégalités :

$$\left| \ln(f_n(u)) + \frac{u^2}{2} \right| \leq \frac{u^3}{3\sqrt{n}}, \quad \ln(f_n(u)) \leq -\frac{u^2}{6}.$$

31. Justifier que la fonction $u \mapsto e^{-u^2/2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, puis établir que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^{+\infty} f_n(u) du \right) = \int_0^{+\infty} e^{-u^2/2} du$$

III. 3 - Conclusion

32. En admettant que $\int_0^{+\infty} e^{-u^2/2} du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, déterminer un équivalent de $E(T_n)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.