$\boxed{\textbf{Devoir surveillé de Mathématiques n°8 : type ccINP : Correction}}$

EXERCICE : Fonction de Bessel (ccINP PSI 2023)

Q1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction $t \mapsto cos(xsin(t))$ est continue sur $[0, \pi]$, $f(x)$ est donc définie comme intégrale d'une fonction continue sur un segment.

$\boxed{f \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}.}$

Q2) Posons : $\begin{array}{cccc} g & : & \mathbb{R} \times [0,\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,t) & \longmapsto & cos(xsin(t)) \end{array}$

Alors g est C^∞ sur $\mathbb{R} \times [0,\pi]$ et $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2$, $\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -sin(t)sin(xsin(t)) \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t) = -sin^2(t)cos(xsin(t)) \end{cases}$

Comme en $Q1$, on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ et $t \mapsto \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)$ qui sont intégrable sur $[0, \pi]$.
De plus : $\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\pi]$, $\left|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\right| \leq 1$ et $t \mapsto 1$ est une fonction intégrable sur $[0, \pi]$ (hypothèse de domination).

On a donc : $\begin{cases} \bullet \ \forall t \in [0,\pi] \ , \ x \mapsto g(x,t) \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } \mathbb{R} \\ \bullet \ \forall x \in A \ , \ t \mapsto g(x,t) \text{ est intégrable sur } I \\ \bullet \ \forall x \in A \ , \ t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) \text{ est intégrable sur } I \\ \bullet \text{ il existe une fonction : } \varphi \ : t \mapsto 1, \text{ intégrable sur } I, \text{ telle que :} \\ \forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\pi] \ , \ \left|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\right| \leq \varphi(t) \end{cases}$ on peut donc appliquer la généralisation du théorème de dérivation sous le signe somme de Leibniz et on en déduit que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} f'(x) = \int\limits_0^\pi \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)dt \\ f''(x) = \int\limits_0^\pi \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)dt \end{cases}$

On a donc: $\boxed{f \text{ est } C^2 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R} \ , \ \begin{cases} f'(x) = -\int\limits_0^\pi sin(t)sin(xsin(t))dt \\ f''(x) = -\int\limits_0^\pi sin^2(t)cos(xsin(t))dt \end{cases}}$

Q3) h est C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ comme composée de fonctions C^∞, $\boxed{\text{l'existence de } \frac{\partial h}{\partial t} \text{ est donc justifiée}}$ et directement $\boxed{\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2 \ , \ \frac{\partial h}{\partial t}(x,t) = -sin(t)sin(xsin(t)) + xcos^2(t)cos(xsin(t))}$

Q4) Pour $x \in \mathbb{R}$, fixé, on intègre l'égalité de Q3) sur $[0, \pi]$:
$\int\limits_0^\pi \frac{\partial h}{\partial t}(x,t)dt = -\int\limits_0^\pi sin(t)sin(xsin(t))dt + x\int\limits_0^\pi cos^2(t)cos(xsin(t))dt$
$\Rightarrow [h(x,t)]_0^\pi = f'(x) + x\int\limits_0^\pi (1 - sin^2(t))cos(xsin(t))dt$
$\Rightarrow 0 - 0 = f'(x) + x(f(x) + f''(x))$

$\boxed{f \text{ est donc solution de l'équation différentielle : } xy'' + y' + xy = 0 \Leftrightarrow (E)}$

Q5) Posons $y(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$.

On suppose donc que y est de rayon de convergence $R>0$ et que y est solution de (E) sur $]-R,R[$. On sait que y est C^∞ sur $]-R,R[$ en tant que série entière, et que l'on peut dériver y terme à terme sur son intervalle ouvert de convergence.

On a donc : $\forall x\in\mathbb{R}\ ,\ y'(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}na_nx^{n-1}$ et $y''(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$.

Alors :

y solution de (E) sur $]-R,R[$

$\Leftrightarrow \forall x\in]-R,R[\ ,\ xy''(x)+y'(x)+xy(x)=0$

$\Leftrightarrow \forall x\in]-R,R[\ ,\ x\sum\limits_{n=0}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+\sum\limits_{n=0}^{+\infty}na_nx^{n-1}+x\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=0$

$\Leftrightarrow \forall x\in]-R,R[\ ,\ \sum\limits_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-1}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}+\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^{n+1}=0$ changement d'indice $p-1=n+1$ dans la dernière somme (et $p=n$ dans les autres)

$\Leftrightarrow \forall x\in]-R,R[\ ,\ \sum\limits_{p=2}^{+\infty}p(p-1)a_px^{p-1}+\sum\limits_{p=1}^{+\infty}pa_px^{p-1}+\sum\limits_{p=2}^{+\infty}a_{p-2}x^{p-1}=0$ les séries sont convergentes comme SE de même rayon de convergence $R>0$

$\Leftrightarrow \forall x\in]-R,R[\ ,\ a_1+\sum\limits_{p=2}^{+\infty}[p(p-1)a_p+pa_p+a_{p-2}]x^{p-1}=0$ unicité du DSE_0, comme $R>0$

$\Leftrightarrow a_1=0$ et $\forall p\geq 2\ ,\ p(p-1)a_p+pa_p+a_{p-2}=0$, on repose $n=p$

$\Leftrightarrow a_1=0$ et $\forall p\geq 2\ ,\ a_n=\frac{-1}{n^2}a_{n-2}$

On a donc : $\boxed{a_1=0 \text{ et } \forall n\in\mathbb{N}\ ,\ n\geq 2\ ,\ a_n=\frac{-a_{n-2}}{n^2}}$

Q6) Fixons $x\in\mathbb{R}$.

Alors, avec les DSE_0 usuels du cours : $\forall t\in[0,\pi]\ ,\ cos(xsin(t))=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(xsin(t))^{2n}}{(2n)!}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^nsin^{2n}(t)\frac{x^{2n}}{(2n)!}$

Comme x est fixé alors $xsin(t)\in[-|x|,|x|]$ et $\left|cos(xsin(xt))-\sum\limits_{n=0}^{N}(-1)^nsin^{2n}(t)\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right|\leq\sum\limits_{n=N+1}^{+\infty}\frac{|x|^{2n}}{(2n)!}\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}$ 0 comme reste d'une série convergente (ch)

La série de fonctions $t\mapsto\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(xsin(t))^{2n}}{(2n)!}$ converge donc uniformément vers $t\mapsto cos(xsin(t))$ sur $[0,\pi]$ qui est un segment. On peut donc intervertir les signes $\sum$ et $\int$ pour obtenir :

$f(x)$

$=\int\limits_0^\pi cos(xsin(t))dt$

$=\int\limits_0^\pi\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^nsin^{2n}(t)\frac{x^{2n}}{(2n)!}dt$

$=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\int\limits_0^\pi(-1)^nsin^{2n}(t)\frac{x^{2n}}{(2n)!}dt=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(\int\limits_0^\pi sin^{2n}(t)dt)\frac{x^{2n}}{(2n)!}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^nW_n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$

Ce résultat est valable pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a donc :

$\boxed{f \text{ est développable en série entière au voisinage de } x= \text{ et } \forall x\in\mathbb{R}\ ,\ f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^nW_n\frac{x^{2n}}{(2n)!}}$

Q7) Par la question Q5), si y est une solution DSE_0 de E tel que $y(0)=\pi$ alors $a_0=\pi$, $a_1=0$ et $\forall n\in\mathbb{N}\ ,\ n\geq 2\ ,\ a_n=\frac{-a_{n-2}}{n^2}$

Par une récurrence immédiate : $\forall n\in\mathbb{N}\ ,\ a_{2n+1}=0$ et $a_{2n}\neq 0$ et donc $y(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_{2n}x^{2n}$

Pour $x\neq 0$, on pose $u_n(x)=a_{2n}x^{2n}\neq 0$

Alors, en utilisant la relation de récurrence : $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n(x)}\right|=\frac{a_{2n+2}|x|^{2n+2}}{a_{2n}|x|^{2n}}=\frac{|x^2|}{(2n+2)^2}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0<1$

Par la règle de D'Alembert on a donc $\sum u_n(x)$ qui est absolument convergente et donc on en déduit $R=+\infty$ (et donc $R>0$)

Par les équivalences de Q5) on a donc, il existe une unique solution DSE_0 de (E) valant π en $x=0$.

Comme d'après Q6) et Q4), f est cette solution alors :

$\boxed{f \text{ est l'unique solution développable en série entière en 0 de } (E) \text{ vérifiant } f(0)=\pi}$

Q8) Conjecture :

$a_{2n}=\frac{-1}{(2n)^2}a_{2n-2}=\frac{-1}{(2n)^2}\frac{-1}{(2n-2)^2}a_{2n-4}=\frac{-1}{(2n)^2}\frac{-1}{(2n-2)^2}\frac{-1}{(2n-4)^2}a_{2n-6}=\prod\limits_{k=0}^{n}\frac{-1}{(2k)^2}a_0=\frac{(-1)^n\pi}{4^n(n!)^2}$

Montrons par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$ que : $\forall n\in\mathbb{N}\ ,\ a_{2n}=\frac{(-1)^n\pi}{4^n(n!)^2}$

Initialisation : $a_0=\pi$ et $\frac{(-1)^0\pi}{4^0(0!)^2}=\pi$, on a le résultat pour $n=0$

Hérédité : on suppose le résultat vrai au rang n et on le démontre pour le rang $n+1$

$a_{2(n+1)}=a_{2n+2}=\frac{-1}{(2n+2)^2}a_{2n}=\frac{1}{4(n+1)^2}\frac{(-1)^n\pi}{4^n(n!)^2}=\frac{(-1)^{n+1}\pi}{4^{n+1}((n+1)!)^2}$ OK

Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N}\ ,\ a_{2n}=\frac{(-1)^n\pi}{4^n(n!)^2}$

Par identification, en utilisant Q6) : $(-1)^nW_n\frac{1}{(2n)!}=\frac{(-1)^n\pi}{4^n(n!)^2}$ et donc $W_n=\frac{(2n)!\pi}{4^n(n!)^2}$

On a donc : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}\ ,\ W_n=\int\limits_0^{\pi}sin^{2n}(t)dt=\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\pi}$

PROBLÈME 1 : Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ (ccINP 2023)

Q9) D'après le cours : $\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}\ ,\ \forall x \in]-1,1[\ ,\ (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n}$

$\boxed{\text{Le rayon de convergence vaut donc 1.}}$

Q10) En particulier, si $\alpha = \frac{-1}{2}$, alors :
$\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1) = \frac{-1}{2}\frac{-3}{2}\frac{-5}{2}\ldots\frac{-(2n+1)}{2} = (-1)^n \frac{1}{2^n}\frac{1.2.3.4....(2n+1)}{(2.1)(2.2)(2.3)...(2.n)} = \frac{(-1)^n(2n+1)!}{4^n n!}$
Donc $\forall x \in]-1,1[\ ,\ \frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{\frac{-1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)!}{4^n(n!)^2} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} x^n$

En remplaçant x par $-x$ on obtient : $\boxed{\forall x \in]-1,1[\ ,\ \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} x^n}$

Q11) Si $X_i = 1$ alors $\frac{X_i+1}{2} = 1$, si $X_i = -1$ alors $\frac{X_i+1}{2} = 0$, donc $\frac{X_i+1}{2}(\Omega) = \{0,1\}$
et comme $P(\frac{X_i+1}{2} = 1) = P(X_i = 1) = p$ alors : $\boxed{\frac{X_i+1}{2} \text{ suit une loi de Bernoulli de paramètre } p}$

De plus, on sait d'après le cours que la somme de n variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre p suit une loi binomiale de paramètre (n,p), alors :
$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i+1}{2} \text{ suit une loi binomiale de paramètre } (n,p)}$

Q12) $S_n = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i+1}{2} = \frac{n}{2}$
Comme $\frac{X_i+1}{2}$ est un entier alors $S_n = 0$ est impossible si n impair car $\frac{n}{2}$ n'est alors pas un entier.
On en déduit : $u_n = P(S_n = 0) = 0$
Si n est pair alors $u_n = P(S_n = 0) = \binom{n}{\frac{n}{2}} p^{\frac{n}{2}}(1-p)^{n-\frac{n}{2}}$ d'après le cours sur la loi binomiale.
Donc $u_n = \binom{n}{\frac{n}{2}}(p(1-p))^{\frac{n}{2}}$

On a donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*\ ,\ u_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ impair} \\ \binom{n}{\frac{n}{2}}(p(1-p))^{\frac{n}{2}} \text{ si } n \text{ pair} \end{cases}}$

Q13) • Par la formule de Stirling :
$u_{2n} = \binom{2n}{n}(p(1-p))^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}(p(1-p))^n \sim \frac{\sqrt{2\pi 2n}(\frac{2n}{e})^{2n}}{(\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n)^2}(p(1-p))^n \sim \frac{2^{2n}(p(1-p))^n}{\sqrt{\pi n}} \sim \frac{4^n(p(1-p))^n}{\sqrt{\pi n}} \sim \frac{(4p(1-p))^n}{\sqrt{\pi n}}$

Mais $0 \leq 4p(1-p) = 4p - 4p^2 = 1 - (1 - 4p + 4p^2) = 1 - (1-2p)^2 \leq 1$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*\ ,\ 0 \leq u_n \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

On a finalement : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = 0}$

• Comme $u_{2n+1} = 0$ on a : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$
On peut donc interpréter cela comme suit : "au bout d'un temps très long, il est presque sûr que le mobile ne se trouve pas à l'origine."

Q14) T_n permet de compter le nombre de passage à l'origine entre l'instant $t = 0$ et l'instant $t = 2n$, puisque $O_{2j} = 1$ si la particule est à l'origine à l'instant $t = 2j$
Comme la particule est à l'origine à l'instant $t = 0$, cet instant est compté comme un passage à l'origine et donc $T_n \geq 1$

Q15) On a $(O_{2j} = 1) = (S_{2j} = 0)$, donc $\boxed{O_{2j} \text{ suit une loi de Bernoulli de paramètre } u_{2i}.}$

Par linéarité de l'espérance : $\mathbb{E}(T_n) = \sum\limits_{j=0}^{n} \mathbb{E}(O_{2j}) = \sum\limits_{j=0}^{n} u_{2j}$, et compte tenu de Q12) :

$$\boxed{\mathbb{E}(T_n) = \sum_{j=0}^{n} \binom{2j}{j}(p(1-p))^j}$$

Q16) D'après Q15) : $\mathbb{E}(T_n) = \sum\limits_{j=0}^{n} \binom{2j}{j}\frac{1}{2^{2j}}(4p(1-p))^j$
Comme $4p(1-p) = 1-(2p-1)^2$ alors, si $p \neq \frac{1}{2}$ on a $0 < 4p(1-p) < 1$

On peut donc utiliser la question Q10) avec $x = 4p(1-p)$ et on en déduit :
$\frac{1}{\sqrt{1-4p(1-p)}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{j=0}^{n} \binom{2j}{j}\frac{1}{2^{2j}}(4p(1-p))^j$
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(T_n) = \frac{1}{\sqrt{1-4p(1-p)}} = \frac{1}{\sqrt{1-4p+4p^2}} = \frac{1}{\sqrt{(2p-1)^2}} = \frac{1}{|2p-1|}$ Donc : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(T_n) = \frac{1}{|2p-1|}}$

Q17) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(T_n) = \frac{2n+1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$

Initialisation : Pour $n = 0$. $T_n = T_0 = O_0$ avec O_0 qui vaut 1 de manière certaine, puisque la particule est en l'origine au départ.
Donc $\mathbb{E}(T_0) = 1$. De plus, si $n = 0$, $\frac{2n+1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} = 1$, on a donc le résultat pour $n = 0$.

Hérédité : On suppose le résultat vraie au rang n.
$T_{n+1} = T_n + O_{2n+2}$
$\Rightarrow \mathbb{E}(T_{n+1}) = \mathbb{E}(T_n) + \mathbb{E}(O_{2n+2})$
$\Rightarrow \mathbb{E}(T_{n+1}) = \mathbb{E}(T_n) + u_{2n+2}$
$\Rightarrow \mathbb{E}(T_{n+1}) = \frac{2n+1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} + \binom{2n+2}{n+1}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$
$\Rightarrow \mathbb{E}(T_{n+1}) = \frac{2n+1}{2^{2n}}\frac{(2n)!}{(n!)^2} + \binom{2n+2}{n+1}\frac{1}{2^{2(n+1)}}$
$\Rightarrow \mathbb{E}(T_{n+1}) = \frac{1}{2^{2n}}\frac{(2n+2)(2n+2)}{2^2(n+1)(n+1)}\frac{(2n+1)(2n)!}{(n!)^2} + \binom{2n+2}{n+1}\frac{1}{2^{2(n+1)}}$
$\Rightarrow \mathbb{E}(T_{n+1}) = \frac{2n+2}{2^{2n+2}}\frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} + \binom{2n+2}{n+1}\frac{1}{2^{2(n+1)}}$
$\Rightarrow \mathbb{E}(T_{n+1}) = \frac{2n+2}{2^{2(n+1)}}\binom{2n+2}{n+1} + \binom{2n+2}{n+1}\frac{1}{2^{2(n+1)}}$
$\Rightarrow \mathbb{E}(T_{n+1}) = \frac{1}{2^{2(n+1)}}\binom{2n+2}{n+1}(1+2n+2)$
$\Rightarrow \mathbb{E}(T_{n+1}) = \frac{2n+3}{2^{2(n+1)}}\binom{2n+2}{n+1}$
$\Rightarrow \mathbb{E}(T_{n+1}) = \frac{2(n+1)+1}{2^{2(n+1)}}\binom{2n+2}{n+1}$ On a bien le résultat au rang $n+1$.

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \text{ , } \mathbb{E}(T_n) = \frac{2n+1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}}$

Par la formule de Stirling : $\mathbb{E}(T_n) = \frac{2n+1}{2^{2n}}\frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{2n+1}{4^n}\frac{\sqrt{2\pi 2n}(\frac{2n}{e})^{2n}}{(\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n)^2} \sim \frac{2n+1}{4^n}\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \sim \frac{2n+1}{\sqrt{\pi n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

On en déduit : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(T_n) = +\infty}$

Remarque : si $p \neq \frac{1}{2}$, un côté est favorisé et la particule s'éloigne de l'origine, et donc le nombre de passages en l'origine est limité.
Si $p = \frac{1}{2}$, la position moyenne est l'origine et il est alors logique d'y passer une infinité de fois.

PROBLEME 2 : Temps d'attente avant une collision (ccINP PC 2024)

Q18) Il faut au moins deux tirages pour avoir deux fois la même boule.
Pour que tout les tirages soient différent il faut tirer des boules différentes. Au bout de $n+1$ tirages (sur n boules) on est donc sur d'avoir tirer une boule deux fois.

Les intermédiaires sont bien sûr possibles, donc : $\boxed{T_n(\Omega) = [\![2, n+1]\!]}$

19) Pour $(a_, \ldots, a_k) \in [\![1, n]\!]^k$: $(Z = (a_1, \ldots, a_k)) = \bigcap\limits_{i \in [\![1,k]\!]} (X_i = a_i)$
Comme les $X_i \hookrightarrow U([\![1, n]\!])$ et que les X_i sont indépendants :
$(Z = (a_1, \ldots, a_k)) = \prod\limits_{i=1}^{k} P(X_i = a_i) = \prod\limits_{i=1}^{k} \frac{1}{n} = \frac{1}{n^k}$

On a donc : $\boxed{Z \text{ suit une loi uniforme sur } [\![1, n]\!]^k}$

20) • Un élément de A correspond à une injection de $[\![1, k]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$, d'après le cours, comme $k \leq n$, on a : $\boxed{card(A) = \frac{n!}{(n-k)!}}$

• $T_n > k$ correspond a un tirage de k boules de $[\![1, n]\!]$ sans répétition.
Comme Z représente les k premiers tirages et que A correspond aux tirages de k boules différentes alors : $(T_n > k) = (Z \in A)$

Par équiprobabilité puisque Z suit une loi uniforme : $P(Z \in A) = \frac{card(A)}{card(Z(\Omega))} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{n^k}$

On a donc : $\boxed{P(T_n > k) = P(Z \in A) = \frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{n^k}}$

21) On sait que T_n admet une espérance car T_n prend un nombre fini de valeurs.
De plus $T(\Omega) \subset \mathbb{N}$, donc, d'après le cours : $E(T_n) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} P(T_n \geq k)$
Mais $(T_n \geq k)$ est impossible pour $k \geq n+2$ donc, pour $k \geq n+2$: $P(T_n \geq k) = 0$ et il reste :
$E(T_n) = \sum\limits_{k=1}^{n+1} P(T_n \geq k)$
On remarque que, comme $T(\Omega) \subset \mathbb{N}$: $(T \geq k) = (T > k-1)$ donc : $E(T_n) = \sum\limits_{k=1}^{n+1} P(T_n > k-1)$
On effectue le changement d'indice $\ell = k-1$ et on obtient : $E(T_n) = \sum\limits_{\ell=0}^{n} P(T_n > \ell)$
Avec l'expression trouvée en Q20) (qui reste valable pour $\ell = 0$) on a : $\boxed{E(T_n) = \sum\limits_{\ell=0}^{n} \frac{n!}{(n-\ell)!} n^\ell}$

22) On a : $t \mapsto t^k e^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$ donc l'intégrale I_k ne pose problème que en $+\infty$.
De plus $\frac{e^{-t}t^k}{e^{-t/2}} = e^{-t/2}t^k \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $e^{-t}t^k = o(e^{-t/2})$ au voisinage de $+\infty$.
Comme $t \mapsto e^{-t/2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, alors, par négligeabilité $t \mapsto e^{-t}t^k$ est intégrable sur $[0, +\infty[$
On en déduit que : $\boxed{I_k \text{ est convergente.}}$

23) Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que : $\forall k \in \mathbb{N}\ ,\ I_k = k!$

Initialisation au rang $k = 0$:

$I_0 = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t}dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1 = 0!$ et on a bien le résultat au rang $k = 0$.

Hérédité : Soit $k \geq 1$, on suppose la propriété vraie au rang $k-1$ et on la montre au rang k.

Par intégration par parties, comme $\lim\limits_{t \to +\infty} t^k e^{-t} = 0$ et que les intégrales sont convergentes :

$I_k = [-e^{-t}t^k]_0^{+\infty} + \int\limits_0^{+\infty} e^{-t}kt^{k-1}dt$ et donc $I_k = kI_{k-1}$

Or $I_{k-1} = (k-1)!$ par hypothèse de récurrence donc : $I_k = k(k-1)! = k!$
et on a le résultat au rang k.

Conclusion : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}\ ,\ I_k = k!}$

24) On développe l'intérieur de l'intégrale par la formule du binôme : $(1+\frac{t}{n})^n e^{-t} = \sum\limits_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} \left(\frac{t}{n}\right)^{\ell}$

Alors $\int\limits_0^{+\infty} (1+\frac{t}{n})^n e^{-t}dt = \int\limits_0^{+\infty} \sum\limits_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} \left(\frac{t}{n}\right)^{\ell} dt$ est convergente comme somme FINIE d'intégrales convergentes.
Comme la somme est finie est finie, par linéarité de l'intégrale :
$\int\limits_0^{+\infty} (1+\frac{t}{n})^n e^{-t}dt = \sum\limits_{\ell=0}^{n} \int\limits_0^{+\infty} \binom{n}{\ell} \left(\frac{t}{n}\right)^{\ell} dt = \sum\limits_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} \frac{I_\ell}{n^\ell} = \sum\limits_{\ell=0}^{n} \frac{n!}{\ell!(n-\ell)!} \frac{\ell!}{n^\ell} = \sum\limits_{\ell=0}^{n} \frac{n!}{(n-\ell)!} \frac{1}{n^\ell} = E(T_n)$

On a donc : $\boxed{E(T_n) = \int\limits_0^{+\infty} (1+\frac{t}{n})^n e^{-t}dt}$

25) On effectue dans J_n le changement de variable C^1 bijectif : $v = t - n$
Alors : $J_n = \int\limits_0^{+\infty} (1+\frac{v+n}{n})^n e^{-(v+n)}dv = \int\limits_0^{+\infty} (2+\frac{v}{n})^n e^{-v}e^{-n}dv$

On a donc : $\boxed{J_n = e^{-n} \int\limits_0^{+\infty} (2+\frac{v}{n})^n e^{-v}dv}$

26) Avec l'inégalité donnée par l'énoncé : $1 + \frac{v}{2n} \leq exp(\frac{v}{2n})$
Comme $t \mapsto t^n$ est croissante sur $[0, +\infty[$: $0 \leq (1+\frac{v}{2n})^n \leq e^{v/2}$
En multipliant par $e^{-v} > 0$: $0 \leq (1+\frac{v}{2n})^n e^{-v} \leq e^{-v/2}$

Comme les intégrales (cours pour la seconde) sont convergentes on a : $0 \leq K_n \leq \int\limits_0^{+\infty} e^{-v/2}dv$

$\int\limits_0^{+\infty} e^{-v/2}dv \in \mathbb{R}$ne dépend pas de n et donc : $\boxed{(K_n) \text{ est bornée.}}$

27) On met le 2 en facteur dans la parenthèse de J_n et on a :
$J_n = e^{-n} \int\limits_0^{+\infty} 2^n(1+\frac{v}{2n})^n e^{-v}dv = e^{-n}2^nK_n = (\frac{2}{e})^n K_n$

Alors, comme (K_n) est bornée et $0 < \frac{2}{e} < 1$, on a : $\boxed{(J_n) \text{ converge et } \lim\limits_{n \to +\infty} J_n = 0}$

28) Comme $\forall u \in [0,\sqrt{n}[\ ,\ (1+\frac{u}{\sqrt{n}})^n e^{-u\sqrt{n}} = f_n(u)$ alors : $\sqrt{n}\int\limits_0^{\sqrt{n}}(1+\frac{u}{\sqrt{n}})^n e^{-u\sqrt{n}}du = \sqrt{n}\int\limits_0^{\sqrt{n}} f_n(u)du$

Comme de plus : $\sqrt{n}\int\limits_{\sqrt{n}}^{+\infty} f_n(u)du = \sqrt{n}\int\limits_{\sqrt{n}}^{+\infty} 0du = 0$

alors, par la relation de Chasles : $\sqrt{n}\int\limits_0^{\sqrt{n}}(1+\frac{u}{\sqrt{n}})^n e^{-u\sqrt{n}}du = \sqrt{n}\int\limits_0^{+\infty} f_n(u)du$

On effectue maintenant, dans la première intégrale, le changement de variable C^1 bijectif : $u = \frac{t}{\sqrt{n}}$

$\sqrt{n}\int\limits_0^{\sqrt{n}}(1+\frac{u}{\sqrt{n}})^n e^{-u\sqrt{n}}du = \sqrt{n}\int\limits_0^{n}(1+\frac{t}{n})^n e^{-t}dt = I_n$

On a finalement : $\boxed{I_n = \sqrt{n}\int\limits_0^{\sqrt{n}}(1+\frac{u}{\sqrt{n}})^n e^{-u\sqrt{n}}du = \sqrt{n}\int\limits_0^{+\infty} f_n(u)du}$

29) Soit $u \in]0,\sqrt{n}[$. Alors $f_n(u) > 0$ donc on peut prendre le ln et, comme $u < \sqrt{n}$:
$ln(f_n(u)) = ln((1+\frac{u}{\sqrt{n}})^n e^{-u\sqrt{n}} = ln((1+\frac{u}{\sqrt{n}})^n) + ln(e^{-u\sqrt{n}}) = nln((1+\frac{u}{\sqrt{n}}) - u\sqrt{n}$

On utilise le DSE_0 du cours : $\forall U \in]-1,1[\ ,\ ln(1+U) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{U^k}{k} = U + \sum\limits_{k=2}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{U^k}{k}$ avec $U = \frac{u}{\sqrt{n}} \in]0,1[$ puisque $u \in]0,\sqrt{n}[$

On a alors : $ln(f_n(u)) = n\Big(\frac{u}{\sqrt{n}} + \sum\limits_{k=2}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{u^k}{n^{k/2}k}\Big) - u\sqrt{n} = \sum\limits_{k=2}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{u^k}{n^{k/2-1}k}$

Bilan : $\boxed{\forall u \in]0,\sqrt{n}[\ ,\ ln(f_n(u)) = \sum\limits_{k=2}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\frac{u^k}{n^{k/2-1}}}$

30) On fixe $u \in]0,\sqrt{n}[$ et on pose $\forall k \geq 2\ ,\ A_k = \frac{1}{k}\frac{u^k}{n^{k/2-1}} > 0$
On remarque alors que la série $ln(f_n(u))$ est une série alternée.
Comme $A_k > 0$ on peut poser : $\frac{A_{k+1}}{A_k} = \frac{u^{k+1}}{(k+1)n^{\frac{k+1}{2}-1}}\frac{kn^{\frac{k}{2}-1}}{u^k} = \frac{ku}{(k+1)\sqrt{n}} = \underbrace{\frac{k}{k+1}}_{\leq 1}\underbrace{\frac{u}{\sqrt{n}}}_{\leq 1} \leq 1$

Donc $(A_k)_{k\geq 2}$ est décroissante.

$ln(f_n(u)) + \frac{u^2}{2} = \sum\limits_{k=2}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\frac{u^k}{n^{k/2-1}} + \frac{u^2}{2} = \frac{-u^2}{2} + \sum\limits_{k=3}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\frac{u^k}{n^{k/2-1}} + \frac{u^2}{2} = \sum\limits_{k=3}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\frac{u^k}{n^{k/2-1}}$

Comme on a vu que la série était alternée et (A_k) décroissante, alors avec le théorème spéciale :
$\Big|ln(f_n(u)) + \frac{u^2}{2})\Big| = \Big|\sum\limits_{k=3}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\frac{u^k}{n^{k/2-1}}\Big| \leq A_3 = \frac{1}{3}\frac{u^3}{\sqrt{n}}$

On a la première inégalité.

On peut déduire cette inégalité : $ln(f_n(u)) + \frac{u^2}{2}) \leq \frac{u^3}{3\sqrt{n}} = \frac{u^2}{3}\underbrace{\frac{u}{\sqrt{n}}}_{\leq 1} \leq \frac{u^2}{3}$

Donc $ln(f_n(u)) + \frac{u^2}{2} \leq \frac{u^2}{3} \Rightarrow ln(f_n(u)) \leq \frac{u^2}{3} - \frac{u^2}{2} = \frac{-u^2}{6}$

Bilan : $\boxed{\forall u \in]0,\sqrt{n}[\ ,\ \Big|ln(f_n(u)) + \frac{u^2}{2})\Big| \leq \frac{u^3}{3\sqrt{n}} \text{ et } ln(f_n(u)) \leq \frac{-u^2}{6}}$

31) • On a : $t \mapsto e^{-u^2/2}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et $e^{-u^2/2} = o(e^{-u})$ au voisinage de $+\infty$.
Comme $u \mapsto e^{-u}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$, alors, par négligeabilité :

$\boxed{t \mapsto e^{-u^2/2} \text{ est intégrable sur } [0,+\infty[}$

• Soit $u \in]0,+\infty[$ fixé. Alors à partir d'un certain rang : $u < \sqrt{n}$ et donc

$$f_n(u) = (1+\frac{u}{\sqrt{n}})^n e^-u\sqrt{n} = exp(nln(1+\frac{u}{\sqrt{n}}))e^-u\sqrt{n} = exp(n(\frac{u}{\sqrt{n}} - \frac{u^2}{2n} + o(\frac{1}{n})))e^-u\sqrt{n}$$

$$= exp(u\sqrt{n} - \frac{u^2}{2} + o(1) - u\sqrt{n})$$

$$= exp(-\frac{u^2}{2} + o(1)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} exp(-u^2/2)$$

La suite de fonction (f_n) converge donc simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction :

$$g : \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & e^{-u^2/2} \end{array}$$

• De plus, avec la deuxième inégalité de 30), pour $u \in [0,+\sqrt{n}[$ on a : $ln(f_n(u)) \leq \frac{-u^2}{6}$ donc en prenant l'exponentielle qui est croissante : $|f_n(u)| \leq e^{-u^2/6}$
Cette relation est aussi valable sur $]0,+\infty[$ puisque $f_n(u) = 0$ si $u \geq \sqrt{n}$

On a donc :

$$\begin{cases} (f_n) \text{ converge simplement sur }]0,+\infty[\text{ vers la fonction } g \text{ qui est continue par morceaux sur }]0,+\infty[\\ \forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ \forall u \in]0,+\infty[\ , \ |f_n(u)| \leq e^{-u^2/6} \text{ avec } u \mapsto e^{-u^2/6} \text{ qui est intégrable sur }]0,+\infty[\end{cases}$$

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(u)du = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(u)du = \int_0^{+\infty} g(u)du = \int_0^{+\infty} e^{-u^2/2}du$$

On a donc : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(u)du = \int_0^{+\infty} e^{-u^2/2}du}$

32) Avec 24), on a : $E(T_n) = I_n + J_n$
Avec 27) on a : $E(T_n) = I_n + o(1)$ puisque $\lim_{n\to+\infty} J_n = 0$

Avec 28) on a : $E(T_n) = \sqrt{n} \int_0^{+\infty} f_n(u)du + o(1)$

Donc, avec l'intégrale admise et 31) on a : $E(T_n) \sim \sqrt{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Bilan : : $\boxed{E(T_n) \sim \sqrt{\frac{n\pi}{2}}}$