Devoir surveillé de Mathématiques n°8 : type centrale : Correction

---

Math 2, centrale PSI , 2023

Q1) $t \mapsto exp(-t^2)$ est continue sur $[0,+\infty[$. $\int_0^{+\infty} exp(-t^2)dt$ ne pose donc problème qu'en $+\infty$
On a au voisinage de $+\infty$, par comparaison exponentielle-puissance : $exp(-t^2) = o(\frac{1}{t^2})$
puisque $\lim_{t\to+\infty} \frac{exp(-t^2)}{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t\to+\infty} t^2 exp(-t^2) = 0$
Mais $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ par Riemann, donc par négligeabilité $t \mapsto exp(-t^2)$ est intégrable sur $[1,+\infty[$
Comme il n'y a pas de problème sur $[0,1]$, $t \mapsto exp(-t^2)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et donc :

$\boxed{\int_0^{+\infty} exp(-t^2)dt \text{ est absolument convergente.}}$

Q2) A $x \in \mathbb{R}$ fixé, $f(x)$ est l'intégrale d'une fonction continue sur un segment, donc $f(x)$ est définie.
$\forall x \in \mathbb{R}$ (domaine centré en 0) : $f(-x) = \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)(-x)^2}}{t^2+1}dt = \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{t^2+1}dt = f(x)$ donc f est paire.

On sait déjà que $f(0)$ est convergente et : $f(0) = \int_0^1 \frac{1}{t^2+1}dt = [arctan(t)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$

On a donc : $\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R} \text{ et } f \text{ est paire. De plus } f(0) = \frac{\pi}{4}}$

Q3) On pose : $\begin{array}{cccc} F & : & \mathbb{R}\times[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,t) & \longmapsto & \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{t^2+1} \end{array}$
Alors F est clairement C^∞ sur $\mathbb{R}\times[0,1]$ et $\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times[0,1]$, $\frac{\partial F}{\partial x}(x,t) = -2xe^{-(1+t^2)x^2}$

Soit $A > 0$. Alors $\forall x \in [-A,A]\times[0,1]$, $\left|\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\right| \leq 2A$
On pose alors $\varphi : t \mapsto 2A$ qui est une fonction intégrable sur $[0,1]$.

On a alors : $\begin{cases} \forall t \in [0,1] \ , \ x \mapsto F(x,t) \text{ est } C^1 \text{ sur } [0,1] \\ \forall x \in [-A,A] \ , \ t \mapsto F(x,t) \text{ est continue par morceaux et intégrable sur } [0,1] \\ \forall x \in [-A,A] \ , \ t \mapsto \frac{\partial F}{\partial x}(x,t) \text{ est continue par morceaux sur } [0,1] \\ \forall (x,t) \in [-A,A]\times[0,1] \ , \ \left|\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi(t) \text{ avec } \varphi \text{ intégrable sur } I \end{cases}$

On peut alors appliquer le théorème de dérivation sous le signe somme de Leibniz et on obtient que :
$f : x \mapsto \int_0^1 F(x,t)dt$ est de classe C^1 sur $[-A,A]$ et $\forall x \in [-A,A]$, $f'(x) = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial x}(x,t)dt$

Comme ce résultat est vraie $\forall A > 0$ et que $\bigcup_{A>0} [-A,A] = \mathbb{R}$, on en déduit :

$\boxed{f \text{ est } C^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R} \ , \ f'(x) = -2x\int_0^1 e^{-(1+t^2)x^2}dt}$

Q4) g est la primitive s'annulant en 0 de la fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$: $t \mapsto e^{-t^2}$

Donc : $\boxed{g \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R} \ , \ g'(x) = e^{-x^2}}$

Q5) On repart de l'expression de $f'(x)$ trouvée en Q3) :

$$f'(x) = -2x \int_0^1 e^{-(1+t^2)x^2} = -2e^{-x^2} \int_0^1 xe^{-(tx)^2} dt$$

• Pour $x \neq 0$, on effectue le changement de variable C^1 : $u = tx$

Alors : $f'(x) = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} du = -2e^{-x^2} g(x) = -2g'(x)g(x)$

Comme f et g sont C^1 on peut passer à la limite en $x = 0$ et cette relation reste valable sur $\mathbb{R}$.

On a donc : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \ , \ f'(x) = -2g'(x)g(x)}$

Q6) En intégrant l'égalité de Q5), on a : $\exists \alpha \in \mathbb{R} \ , \ f(x) = \alpha - g(x)^2$
Mais $g(0) = 0$ et $f(0) = \frac{\pi}{4}$ donc $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Finalement : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \ , \ f(x) = \frac{\pi}{4} - g(x)^2}$

Q7) Comme pour $x > 0$ on a : $0 \leq \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2} \leq e^{-x^2} \underbrace{\frac{e^{-x^2t^2}}{1+t^2}}_{\leq 1} \leq e^{-x^2}$

Donc : $0 \leq f(x) \leq \int_0^1 e^{-x^2} dt = e^{-x^2} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$
Avec la relation de Q6) on en déduit : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)^2 = \frac{\pi}{4}$

Mais, comme pour $x > 0$ on a $g(x) > 0$ alors : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$

Q8) Pour $n \in \mathbb{N}$, $t \mapsto t^n e^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$ donc I_n ne pose problème que en $+\infty$.
Au voisinage de $+\infty$: $t^n e^{-t} = o(\frac{1}{t^2})$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, donc, par négligeabilité : $t \mapsto t^n e^{-t}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.
Comme il n'y avait pas de problème sur $[0, 1]$, $t \mapsto t^n e^{-t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et
donc $\boxed{\text{la suite } (I_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bien définie.}}$

Q9) Soit $A > 0$, alors par intégration par parties de fonctions dérivables :

$$\int_0^A t^n e^{-t} dt = [\frac{t^{n+1}}{n+1} e^{-t}]_0 + \int_0^A \frac{t^{n+1}}{n+1} e^{-t} dt$$

En faisant, tendre A vers $+\infty$, comme $\lim\limits_{A \to +\infty} A^{n+1} e^{-A} = 0$ par compraison exp-puissance, on a, car les intégrales convergent : $I_n = 0 - 0 + \frac{1}{n+1} I_{n+1} \Rightarrow I_{n+1} = (n+1) I_n$

$$I_0 = \lim_{A \to +\infty} \int_0^A e^{-t} dt = \lim_{A \to +\infty} [-e^{-t}]_0^A = \lim_{A \to +\infty} (1 - e^{-A}) = 1$$

Ensuite, par récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \ , \ I_n = n!}$

Q10) On fait le changement de variable C^1 bijectif $t = \sqrt{n}y + n \Leftrightarrow y = \frac{t-n}{\sqrt{n}}$ dans I_n. On a alors :

$$I_n = \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} (n+\sqrt{n}y)^n e^{-\sqrt{n}y-n}\sqrt{n}dy = \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} n^n(1+\frac{y}{\sqrt{n}})^n e^{-\sqrt{n}y}e^{-n}\sqrt{n}dy = \sqrt{n}(\frac{n}{e})^n \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty}(1+\frac{y}{\sqrt{n}})^n e^{-\sqrt{n}y}dy$$

Comme $I_n = n!$ alors $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ n! = \sqrt{n}(\frac{n}{e})^n \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty}(1+\frac{y}{\sqrt{n}})^n e^{-\sqrt{n}y}dy}$

Q11) Fixons $y \in \mathbb{R}$.
Comme $\frac{y}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors pour n assez grand $-\sqrt{n} \leq \frac{y}{\sqrt{n}}$ et donc :

$$\begin{aligned} f_n(y) = (1+\frac{y}{\sqrt{n}})^n e^{-\sqrt{n}y} = exp(nln(1+\frac{y}{\sqrt{n}}))e^{-\sqrt{n}y} &= exp(n(\frac{y}{\sqrt{n}} - \frac{y^2}{2n} + o(\frac{1}{n})))e^{-\sqrt{n}y} \\ &= exp(\sqrt{n}y - \frac{y^2}{2} + o(1))e^{-\sqrt{n}y} \\ &= exp(-\frac{y^2}{2} + o(1)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} exp(\frac{-y^2}{2}) \end{aligned}$$

Bilan : $\boxed{(f_n) \text{ converge simplement sur } \mathbb{R} \text{ et } \forall y \in \mathbb{R}\ ,\ \lim_{n\to+\infty} f_n(y) = exp(\frac{-y^2}{2})}$

Q12) $x > -1 \Rightarrow 1 + x > 0$ donc pas de problème avec le ln, q est C^0 sur $]-1,+\infty[\backslash\{0\}$
Pour x au voisinage de 0 : $q(x) = \frac{x-ln(1+x)}{x^2} = \frac{x-(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2))}{x^2} = \frac{1}{2} + o(1)$
On a donc $\lim_{x\to0} q(x) = \frac{1}{2}$ et alors :

$\boxed{q \text{ est prolongeable par continuité en 0 en une fonction continue sur }]-1,+\infty[\text{ (en posant } q(0) = \frac{1}{2})}$

Remarque : avec un DSE_0, on peut montrer que q ainsi définie est C^∞

Q13) $x > -1$ donc $u \in [0,1]$: $1 + ux > 1 - x > 0$ et l'intégrale est bien définie.
Pour $x > -1$ et $x \neq 0$:

$$\int_0^1 \frac{u}{1+ux}du = \frac{1}{x}\int_0^1 \frac{ux+1-1}{1+ux}du = \frac{1}{x}[\int_0^1 1du - \int_0^1 \frac{1}{1+ux}du] = \frac{1}{x}[1-[\frac{1}{x}ln(1+ux)]_0^1] = \frac{1}{x}[1-\frac{1}{x}ln(1+x)] = \frac{x-ln(1+x)}{x^2} = q(x)$$

Pour $x = 0$: $\int_0^1 \frac{u}{1+ux}du = \int_0^1 udu = \frac{1}{2} = q(0)$

On a donc : $\boxed{\forall x > -1\ ,\ \int_0^1 \frac{u}{1+ux}du = q(x)}$

Q14) • Soit $x > -1$ et $y > -1$. Alors :

$$q(x)-q(y) = \int_0^1 \frac{u}{1+ux}du - \int_0^1 \frac{u}{1+uy}du = \int_0^1 \frac{u(1+uy-1-ux)}{(1+ux)(1+uy)}du = \int_0^1 \frac{u^2(y-x)}{(1+ux)(1+uy)}du = (y-x)\underbrace{\int_0^1 \frac{u^2}{(1+ux)(1+uy)}du}_{\geq 0}$$

$q(x) - q(y)$ qui est donc du signe de $y - x$

On a alors : $-1 < x < y \Rightarrow q(x) - q(y) \geq 0 \Rightarrow q(x) \geq q(y)$

et donc $\boxed{q \text{ est décroissante sur }]-1,+\infty[}$

• Pour $y \geq 0$ on a $-\sqrt{n} \leq y$ donc $f_n(y) = (1+\frac{y}{\sqrt{n}})^n e^{-\sqrt{n}y}$
On veut donc montrer que :
$f_n(y) \leq (1+y)e^{-y}$
$\Leftrightarrow (1+\frac{y}{\sqrt{n}})^n e^{-\sqrt{n}y} \leq (1+y)e^{-y}$ on prend le ln qui est croissant
$\Leftrightarrow nln(1+\frac{y}{\sqrt{n}}) - \sqrt{n}y \leq ln(1+y) - y$
$\Leftrightarrow \frac{ln(1+\frac{y}{\sqrt{n}})}{\frac{y^2}{n}} - \frac{\sqrt{n}y}{y^2} \leq \frac{ln(1+y)-y}{y^2}$
$\Leftrightarrow \frac{ln(1+\frac{y}{\sqrt{n}})}{\frac{y^2}{n}} - \frac{\frac{y}{\sqrt{n}}}{(\frac{y}{\sqrt{n}})^2} \leq \frac{ln(1+y)-y}{y^2}$
$\Leftrightarrow -q(\frac{y}{\sqrt{n}}) \leq -q(y)$
$\Leftrightarrow q(\frac{y}{\sqrt{n}}) \geq q(y)$

Cette dernière inégalité est vraie car $\frac{y}{\sqrt{n}} \leq y$ (puisque $n \geq 1$ et que q décroissante.

On a donc : $\boxed{\forall y \geq 0\ ,\ f_n(y) \leq (1+y)e^{-y}}$

• Pour $y < 0$, si $y < -\sqrt{n}$ alors $f_n(y) = 0 \leq e^{-y^2/2}$
Si $y \geq -\sqrt{n}$ on veut montrer que :
$f_n(y) = (1+\frac{y}{\sqrt{n}})^n e^{-\sqrt{n}y} \leq e^{-y^2/2}$ on prend le ln qui est croissant
$\Leftrightarrow nln(1+\frac{y}{\sqrt{n}}) - \sqrt{n}y \leq -\frac{y^2}{2}$ même calcul que ci-dessus
$\Leftrightarrow -q(\frac{y}{\sqrt{n}}) \leq -\frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow q(\frac{y}{\sqrt{n}}) \geq q(0)$
qui est vraie puisque q est décroissante et $\frac{y}{\sqrt{n}} \leq 0$

On a donc : $\boxed{\forall y < 0\ ,\ f_n(y) \leq e^{-y^2/2}}$

Q15) Posons $\begin{array}{rccl} \Phi & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & y & \longmapsto & \begin{cases} e^{-y^2/2} & \text{si } y < 0 \\ (1+y)e^{-y} & \text{si } y \geq 0 \end{cases} \end{array}$
Alors Φ est intégrable sur $\mathbb{R}$, par négligeabilité puisque, au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$: $\Phi(y) = o(\frac{1}{y^2})$.

Avec Q14) on a alors : $\begin{cases} (f_n) \text{ converge simplement sur } \mathbb{R} \text{ vers } y \mapsto e^{-y^2/2} \\ \forall y \in \mathbb{R}\ ,\ 0 \leq f_n(y) \leq \Phi(y) \text{ avec } \Phi \text{ continue par morceaux et intégrable sur } \mathbb{R} \end{cases}$
On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et on a :
$\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} f_n(y)dt = \int\limits_0^{+\infty} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(y)dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2}dy$
Mais d'après Q7) : $\int\limits_0^{+\infty} e^{-y^2/2}dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, donc par parité : $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2}dy = 2\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{2\pi}$

On a donc : $\int\limits_0^{+\infty} f_n(y)dt \sim \sqrt{2\pi}$

Mais d'après Q10) : $n! = \sqrt{n}(\frac{n}{e})^n \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_n(y)dy$

On en déduit donc, la formule de Stirling : $\boxed{n! \sim \sqrt{n}(\frac{n}{e})^n\sqrt{2\pi} = \sqrt{2n\pi}(\frac{n}{e})^n}$

Q16) • $w_n = v_{n+1} - v_n = ln(u_{n+1}) - ln(u_n) = ln(\frac{un+1}{u_n})$

$$= ln(\frac{(n+1)^{n+1}e^{-(n+1)}\sqrt{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{(n)^n e^{-n}\sqrt{n}})$$

$$= ln(\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\frac{e^{-(n+1)}}{e^{-n}}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}\frac{n!}{(n+1)!})$$

$$= ln((\frac{n+1}{n})^n(n+1)e^{-1}\sqrt{\frac{n+1}{n}}\frac{1}{n+1})$$

$$= ln((1+\frac{1}{n})^n\sqrt{1+\frac{1}{n}}e^{-1})$$

$$= -1 + ln\big((1+\frac{1}{n})^{n+\frac{1}{2}}\big)$$

$$= -1 + (n+\frac{1}{2})ln(1+\frac{1}{n})$$

$$= -1 + (n+\frac{1}{2})\big(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o(\frac{1}{n^3})\big)$$

$$= -1 + 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + o(\frac{1}{n^2})$$

$$= \frac{1}{12n^2} + o(\frac{1}{n^2})$$

On a bien : $\boxed{w_n = \frac{1}{12n^2} + o(\frac{1}{n^2})}$

• On a donc $w_n \sim \frac{1}{12n^2}$

Comme $\sum \frac{1}{12n^2}$ est une série de Riemann absolument convergente, alors, on en déduit, par règle de l'équivalent que : $\boxed{\sum w_n \text{ est convergente.}}$

Q17) b_n est strictement positive donc le rapport $\frac{a_n}{b_n}$ existe bien et $a_n \sim b_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ par définition d'un équivalent. Ensuite, par définition de la limite :
$\forall\varepsilon > 0$, $\exists n_0$, $n \geq n_0 \Rightarrow 1-\varepsilon \leq \frac{a_n}{b_n} \leq 1+\varepsilon$ et comme $b_n > 0$ on a : $(1-\varepsilon)b_n \leq a_n \leq (1+\varepsilon)b_n$

On a bien : $\boxed{\forall\varepsilon > 0 \ , \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ , \ n \geq n_0 \Rightarrow (1-\varepsilon)b_n \leq a_n \leq (1+\varepsilon)b_n}$

Q18) • $0 \leq a_n \leq (1+\varepsilon)b_n$ et $\sum b_n$ est convergente, donc par règle de comparaisons $\boxed{\sum a_n \text{ est convergente.}}$

Remarque : direct par la règle de l'équivalent ...

• Soit $\epsilon > 0$.
Avec Q17) il existe n_0 tel que $\forall k \geq n_0$, $(1-\varepsilon)b_k \leq a_k \leq (1+\varepsilon)b_k$
Comme les séries sont convergentes on peut sommer pour k variant de n à $+\infty$ et on obtient :

$$(1-\varepsilon)\sum_{k=n}^{+\infty} b_k \leq \sum_{k=n}^{+\infty} a_k \leq (1+\varepsilon)\sum_{k=n}^{+\infty} b_k \Rightarrow (1-\varepsilon) \leq \frac{\sum\limits_{k=n}^{+\infty} a_k}{\sum\limits_{k=n}^{+\infty} b_k} \leq (1+\varepsilon)$$

et par définition de la limite on en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sum\limits_{k=n}^{+\infty} a_k}{\sum\limits_{k=n}^{+\infty} b_k} = 1$ et donc : $\boxed{\sum\limits_{k=n}^{+\infty} a_k \sim \sum\limits_{k=n}^{+\infty} b_k}$

Q19) Par décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ sur $[n, n+1]$ on a : $\forall t \in [n, n+1]$, $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{n}$

En intégrant sur $[n, n+1]$ on obtient : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ \frac{1}{(n+1)^2} \leq \int\limits_n^{n+1} \frac{1}{t^2} dt \leq \frac{1}{n}}$

Q20) On somme l'inégalité ci-dessus de n à $+\infty$, on peut le faire car $\sum \frac{1}{n^2}$ et $\int\limits_n^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ sont convergentes.

En utilisant Chasles on a :

$\sum\limits_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} \leq \int\limits_n^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt \leq \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$

$\Rightarrow \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \leq [\frac{-1}{t}]_n^{+\infty} \leq \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$

$\Rightarrow R_n - \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n} \leq R_n$

$\Rightarrow \frac{1}{n} \leq R_n \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$

$\Rightarrow 0 \leq R_n - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^2}$

On a donc $R_n - \frac{1}{n} = O(\frac{1}{n^2}) \Rightarrow R_n = \frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^2})$ On en déduit: $\boxed{R_n \sim \frac{1}{n}}$

Q21) On a, avec Q16) : $w_n \sim \frac{1}{12n^2}$, comme $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente, que $w_n \geq 0$ et $\frac{1}{12n^2} > 0$, on peut utiliser Q18) et on a $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} w_k \sim \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ En utilisant Q20) on a : $\boxed{\sum\limits_{k=n}^{+\infty} w_k \sim \frac{1}{12n}}$

Q22) • Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $N \geq n$

Alors : $\sum\limits_{k=n}^{N} w_k = \sum\limits_{k=n}^{N} (v_{k+1} - v_k) = v_N - v_n$ donc $v_n = v_N - \sum\limits_{k=n}^{N} w_k$

• En utilisant la formule simple de Stirling on a : $u_n = \frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{n!} \sim \frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

• Comme $v_n = ln(u_n)$ on en déduit : $v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} ln(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}) = -ln(\sqrt{2\pi})$

ou encore : $v_N \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} = -ln(\sqrt{2\pi})$

• On fait maintenant tendre N vers $+\infty$ dans $v_n = v_N - \sum\limits_{k=n}^{N} w_k$

On obtient : $v_n = -ln(\sqrt{2\pi}) + o(1) - \sum\limits_{k=n}^{+\infty} w_k$

• En utilisant Q18) on obtient : $v_n = -ln(\sqrt{2\pi}) - \frac{1}{12n} + o(\frac{1}{n}) \Leftrightarrow -v_n = ln(\sqrt{2\pi}) - \frac{1}{12n} + o(\frac{1}{n})$

En prenant l'exponentielle : $exp(-v_n) = \frac{1}{u_n} = \sqrt{2\pi} exp(\frac{1}{12n} + o(\frac{1}{n}))$

$$\Rightarrow \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}(1 + \frac{1}{12n} + o(\frac{1}{n}))$$

$$\Rightarrow n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}(1 + \frac{1}{12n} + o(\frac{1}{n}))$$

En écrivant le $o(\frac{1}{n})$ sous la forme $\frac{q_n}{n}$ avec $q_n \to 0$ alors on a :

$\boxed{\text{Il existe une suite } (q_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ telle que : } n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}(1 + \frac{1}{12n} + \frac{q_n}{n}) \text{ avec } \lim\limits_{n \to +\infty} q_n = 0}$

Q23) • $\frac{1}{2}(X_1+1) \in \{0,1\}$ donc $\frac{1}{2}(X_1+1)$ suit une loi de Bernoulli.
$\mathbb{P}((\frac{1}{2}(X_1+1)=1) = \mathbb{P}(X_1=1) = p$ donc $\boxed{\frac{1}{2}(X_1+1) \text{ suit une loi de Bernoulli de paramètre } p.}$

• $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k = \sum_{k=1}^{n} (2X'_k - 1)$ avec $X'_k = \frac{1+X_k}{2} \hookrightarrow B(p)$
Donc $S_n = 2(\sum_{k=1}^{n} X'_k) - n$
Les X_k étant indépendant, les X'_k le sont aussi

$\sum_{k=1}^{n} X'_k$ est donc la somme de n variable aléatoire indépendant suivant toutes une même loi de Bernoulli de paramètre p.
D'après le cours $\sum_{k=1}^{n} X'_k \hookrightarrow B(n,p)$ (loi binomiale de paramètre (n,p))
D'après le cours $\mathbb{E}(\sum_{k=1}^{n} X'_k) = np$
Par linéarité de l'espérance : $\mathbb{E}(S_n) = 2\mathbb{E}(\sum_{k=1}^{n} X'_k) - n$ donc $\mathbb{E}(S_n) = 2np - n = n(2p-1)$

D'après le cours $\mathbb{V}(S_n) = \mathbb{V}(2(\sum_{k=1}^{n} X'_k) - n) = 4\mathbb{V}(\sum_{k=1}^{n} X'_k) = 4\sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X'_k)$ par indépendance des X'_k
Alors $\mathbb{V}(S_n) = 4\sum_{k=1}^{n} npq = 4n^2pq$

On a donc $\boxed{\mathbb{E}(S_n) = (2p-1)n \text{ et } \mathbb{V}(S_n) = 4n^2pq = 4n^2p(1-p)}$

```
Q24)
def RetourOrigine(n,p):
    ro,pos=0,0          # ro = nb de retour origine  ,  pos = position
    for i in range(n):
      if random.random()<p:
            pos=pos+1
        else:
            pos=pos-1
        if pos==0:
            ro+=1
    return ro
```

Q25) $S_{2n} = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{2n} X_k = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{2n} (2X'_k - 1) = 0 \Rightarrow 2\sum_{k=1}^{2n} X'_k - 2n = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{2n} X'_k = n$
Comme $S'_n = \sum_{k=1}^{2n} X'_k$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $(2n,p)$ alors :
$a_n = \mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \mathbb{P}(S'_n = n) = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n$

On a bien : $\boxed{a_n = \binom{2n}{n} p^n q^n}$

Q26) Pour $x \neq 0$, on pose $u_{n,x} = a_n x^{2n}$

Alors : $\left|\frac{u_{n+1,x}}{u_{n,x}}\right| = \frac{a_{n+1}x^{2n+2}(pq)^{n+1}}{a_n x^{2n}(pq)^n} = \frac{\frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2}}{\frac{(2n)!}{n!^2}} pqx^2 = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}x^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 4pqx^2$

On a alors, en utilisant la règle de D'Alembert pour les séries numériques :

$|x| < \frac{1}{2\sqrt{pq}} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1,x}}{u_{n,x}}\right| = 4pqx^2 < 1 \Rightarrow \sum u_{n,x}$ convergente

$|x| > \frac{1}{2\sqrt{pq}} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1,x}}{u_{n,x}}\right| = 4pqx^2 > 1 \Rightarrow \sum u_{n,x}$ divergente

Comme $R = sup(\{x \in \mathbb{R}, \ , \ \sum u_{n,x}$ convergente $\})$, alors on a : $\boxed{R = \frac{1}{2\sqrt{pq}}}$

Q27) $R > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{pq}} > 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{pq} < 1 \Leftrightarrow 4pq < 1 \Leftrightarrow 4p(1-p) < 1 \Leftrightarrow 0 < 4p^2-4p+1 \Leftrightarrow 0 < (2p-1)^2$

Donc, si $p \neq \frac{1}{2}$ alors $R > 1$ et donc $A(x)$ est définie pour $x = 1$.

- Etudions le cas $p = \frac{1}{2}$

On aurait alors, dans ce cas : $A(1) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{n!^2}\frac{1}{4^n}$

Avec la formule de Stirling : $\frac{(2n)!}{n!^2}\frac{1}{4^n} \sim \frac{\sqrt{4\pi n}(2n)^{2n}e^{-2n}}{4^n(\sqrt{2n\pi}n^n e^{-n})^2} \sim \frac{\sqrt{4\pi n}4^n n^{2n}e^{-2n}}{4^n 2n\pi n^{2n}e^{-2n}} \sim \frac{\sqrt{4\pi n}}{2n\pi} \sim \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n\pi}} > 0$

Mais $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ est une série de Riemann divergente.

Donc, par la règle de l'équivalent pour les séries à termes positifs, on a : $A(1)$ divergente.

Bilan : $\boxed{A(x) \text{ est définie pour } x = 1 \text{ si et seulement si } p \neq \frac{1}{2}}$

Q28) D'après le cours, si on pose $\alpha = \frac{-1}{2}$, alors :

$\frac{1}{\sqrt{1-X}} = (1-X)^{-1/2} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}(-X)^n$ pour $X \in]-1,1[$

$\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} = \frac{\frac{-1}{2}(\frac{-3}{2})\ldots(\frac{-1-2n+2}{2}}{n!} = \frac{(-1)^n\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n}}{n!} = (-1)^n\frac{\frac{(2n)!}{2^n n!}}{2^n n!} = \frac{(-1)^n}{4^n}\binom{2n}{n}$ (donne 1, si $n = 0$)

Alors $\forall X \in]-1,1[$, $\frac{1}{\sqrt{1-X}} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n}\binom{2n}{n}(-X)^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}\left(\frac{X}{4}\right)^n$

Mais $A(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}(pqx^2)^n$ donc en posant : $\frac{X}{4} = pqx^2 \Rightarrow X = 4pqx^2$

on obtient : $\boxed{\forall x \in]-R,R[\ , \ A(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4pqx^2}}}$

Remarque : si $p = \frac{1}{2}$, la fonction n'est pas définie pour $x = 1$

Q29) Pour $k \geq 1$, on note A_k l'événement $S_{2k} = 0$ (on passe à l'origine a bout de $2k$ lancers) et B_k l'événement $[S_1 \neq 0] \cap \ldots [S_{2k-1} \neq 0] \cap [S_{2k} = 0]$ (on passe en l'origine pour la première fois au bout de $2k$ lancers)

On note aussi $B_0 = \bigcap\limits_{i=1}^{+\infty}[S_i \neq 0]$ (on ne repasse jamais par l'origine !)

Alors $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements et par la formule des probabilité totale sur ce système complet d'événements : $a_n = \mathbb{P}(A_n) = \sum\limits_{i=0}^{+\infty}\mathbb{P}(A_n|B_i)\mathbb{P}(B_i)$

On a facilement : $\mathbb{P}(A_n|B_0) = 0$, si on ne passe jamais à l'origine, on ne peut pas y passer à l'instant $2n$

De même, si on passe en l'origine pour la première fois à l'instant $2k > 2n$ on ne peut y être passer à l'instant $2n$ donc $\mathbb{P}(A_n|B_i) = 0$ si $i > n$

On remarque aussi de la même manière que $\mathbb{P}(A_n|B_n) = 1$

Il reste : $a_n = \sum\limits_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_n|B_i)\mathbb{P}(B_i) + b_n$

Pour calculer $\mathbb{P}(A_n|B_i)$ il s'agit de savoir si on passe en l'origine à l'instant $2n$, sachant que l'on est en l'origine (pour la première fois à l'instant $2i$), comme les lancers sont indépendant alors :
$\mathbb{P}(A_n|B_i) = \mathbb{P}(A_{n-i})$

On a donc $a_n = \sum\limits_{i=1}^{n-1} a_{n-i}b_i + b_n$

et comme $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$ on en déduit : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_{n-k}b_k}$

Q30) Comme $B_n \subset A_n$ alors $0 \leq b_n \leq a_n$ et donc B a un rayon de convergence $\geq R$.
Par produit de Cauchy, pour $x \in]-R, R[$, $A(x)B(x) = a_0b_0 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\sum\limits_{k=0}^{n} a_{n-k}b_k)x^{2n}$
En utilisant Q29) et $b_0 = 0$:
$A(x)B(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n x^{2n} \Rightarrow A(x)B(x) = A(x) - 1$

On a donc : $\boxed{\forall x \in]-R, R[\ , \ A(x)(1 - B(x)) = 1}$

Q31) D'après Q28) : $A(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4pqx}}$ donc, avec Q30) : $1 - B(x) = \sqrt{1 - 4pqx^2}$

On a donc : $\boxed{\forall x \in]-R, R[\ , \ B(x) = 1 - \sqrt{1 - 4pqx^2}}$

Q32) • Si $B(1)$ est définie alors : $B(1) = 1 - \sqrt{1 - 4pq}$
Mais $1 - 4pq = 1 - 4p(1-p) = 1 - 4p + 4p^2 = (1-2p)^2 \geq 0$

Alors l'expression de $B(x)$ de Q31) est clairement définie pour $x = 1$ et :
$B(1) = 1 - \sqrt{1 - 4pq} = 1 - |1 - 2p|$

• Sous forme de série : $B(1) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$
Comme $b_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = \mathbb{P}\Big([S_1 \neq \emptyset] \cap \cdots \cap [S_{2n-1} \neq \emptyset] \cap [S_{2n} = 0]\Big)$

$B(1) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(R_n)$ avec R_n l'événement $\Big([S_1 \neq 0] \cap \cdots \cap [S_{2n-1} \neq 0] \cap [S_{2n} = 0]\Big)$

Les R_n étant clairement incompatibles, alors on a : $B(1) = \mathbb{P}\Big(\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} R_n\Big)$

Comme une probabilité est plus petite que 1, alors : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n \leq 1$
Les b_n étant positifs (ce sont des probabilités), on en déduit $\sum b_n$ convergente et donc la définition de $B(1)$ sous forme de série est convergente.

• Bilan : $\boxed{\text{pour tout } p \in]0, 1[\ B(1) \text{ est défini avec la fonction et avec la série.}}$

Q33) Avec l'écriture de $B(1)$ sous forme de probabilité vu en Q32), on a que $B(1)$ est la probabilité qu'il y est retour en l'origine.
La probabilité que le point ne reviennent pas en l'origine vaut donc : $1 - B(1)$
Comme on a vu que $B(1) = 1 - |1 - 2p|$ alors $1 - B(1) = |1 - 2p|$
On remarque que : $p - q = p - (1 - p) = 2p - 1$ et on a donc :

$\boxed{\text{La probabilité de l'événement "le point ne revient jamais en 0" est égale à } |p - q|}$

Remarque : cette probabilité est nulle pour $p = \frac{1}{2}$

Q34) • Considérons un chemin de $(0, 0)$ à (n, x) et notons k le nombre de "montée" de ce chemin.
Il y aura alors $n - k$ "descente".
Comme on arrive en x on a : $k - (n - k) = x \Leftrightarrow k = \frac{n+x}{2}$

Comme k est un entier on a donc $n + x$ pair, et comme $n + x$ et $n - x$ ont la même parité, on a donc $n - x$ pair.

• Dans le cas ou $n - x$ n'est pas pair on a donc $N_{n,x} = 0$

• Revenons au cas $n - x$ pair.

On a alors : $k \in [\![0; n]\!] \Leftrightarrow x \in [\![-n; n]\!]$

Pour avoir un chemin menant en (n, x) il faut donc "monter" $a = \frac{n+x}{2}$ fois sur n, il s'agit de dénombrer les placements possibles pour ses "montée", il y en a : $\binom{n}{a}$.

• Il nous reste à traiter le cas $x \notin [\![-n, n]\!]$.
Dans ce cas il n'y a clairement pas de chemin de $(0, 0)$ à (n, x) puisque l'on en peut pas monter ou descendre de plus de n pas en n coups.

• Bilan : $\boxed{\text{Si } x \in [\![-n, n]\!] \text{ et } a = \frac{n+x}{2} \text{ est pair alors} N_{n,x} = \binom{n}{a}. \text{ Dans le cas contraire } N_{n,x} = 0}$

Q35) Par équiprobabilité, comme il y a 2^n chemins possibles, on a :

$$\boxed{\mathbb{P}(S_n = x) = \begin{cases} \frac{\binom{n}{\frac{n+x}{2}}}{2^n} & \text{si } x \in [\![-n, n]\!] \text{ et } x \text{ pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

Q36) Si on considère la variable aléatoire $T_n = \frac{n+S_n}{2}$, alors $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1+X_k}{2}$ et comme $\frac{1+X_k}{2}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ alors T_n suit une loi binomiale de paramètre $(n, \frac{1}{2})$ (déjà vu en Q23)).

Avec $(S_n = x) = (T_n = \frac{n+x}{2})$ on retrouve le résultat de Q35).

Q37) Un chemin de $(0,x)$ à (n,y) passant au moins une foi par un point de d'ordonnée 0 peut s'écrire sous la forme $\Big((0,x),(1,a_1),\ldots,(k-1,a_{k-1}),(k,0),(k+1,a_{k+1}),\ldots,(n-1,a_{n-1}),(n,y)\Big)$ avec k l'abscisse du premier passage par un point d'ordonnée 0.

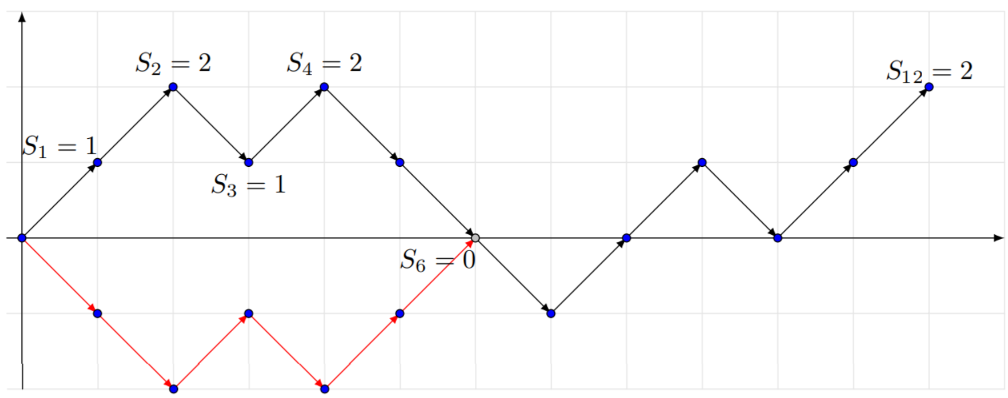
Alors le chemin $\Big((0,-x),(1,-a_1),\ldots,(k-1,-a_{k-1}),(k,0),(k+1,a_{k+1}),\ldots,(n-1,a_{n-1}),(n,y)\Big)$ est un chemin quelconque de $(0,-x)$ à (n,y)

On remarque que l'on a construit une bijection entre
les chemins de $(0,x)$ à (n,y) passant au moins une foi par un point de d'ordonnée 0
et les chemins quelconque de $(0,-x)$ à (n,y)

Il y en a donc $\boxed{\text{le même nombre.}}$

Remarque : on a fait la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées de la partie du chemin entre $(0,x)$ et le premier point d'ordonnée nulle.

Ci-dessous exemple (avec $x=0$)



Q38) • Si on fait une translation de $(-1,-1)$ alors on transforme un chemin de $(1,1)$ à (n,x) en un chemin de $(0,0)$ à $(n-1,x-1)$
Il y a donc $N_{n-1,x-1}$ chemin de $(1,1)$ à (n,x)

• Parmi ces chemins il faut compter ceux qui rencontre l'axe des abscisses.

• On remarque alors que si on fait une translation de $(-1,0)$ alors on transforme un chemin de $(1,1)$ à (n,x) rencontrant l'axe des abscisses en un chemin de $(0,1)$ à $(n-1,x-1)$ rencontrant au moins une fois l'axe des abscisses.

D'après Q37) il y a autant de ces chemins que de chemins quelconques de $(-1,0)$ à $(n-1,x)$

En translatant par $(1,0)$, il on a un chemin quelconque de $(0,0)$ à $(n-1,x+1)$, et il y en a donc $N_{n-1,x+1}$

•Bilan : $\boxed{\text{le nombre de chemin de } (1,1) \text{ à } (n,x) \text{ ne rencontrant pas l'axe des abscisses vaut :}}$

$$\boxed{N_{n-1,x-1} - N_{n-1,x+1}}$$

Q39) Comme $(S_1>0)=(X_1=1)$ correspond à une montée au départ. Si on a $(S_1>0)$ alors on a chemin qui passe par $(1,1)$
Alors, l'événement $\Big([S_1>0]\cap[S_2>0]\cap\cdots\cap[S_{2n-1}>0]\cap[S_{2n}=2k]\Big)$ correspond à un chemin de $(1,1)$ à $(2n,2k)$ ne coupant pas l'axe des abscisses.

Donc, par équiprobabilité :
$\mathbb{P}\Big([S_1>0]\cap[S_2>0]\cap\cdots\cap[S_{2n-1}>0]\cap[S_{2n}=2k]\Big)$
$=\frac{N_{2n-1,2k-1}-N_{2n-1,2k+1}}{2^n}$
$=\frac{N_{2n-1,2k-1}}{2^n}-\frac{N_{2n-1,2k+1}}{2^n}=\frac{1}{2}\Big(\frac{N_{2n-1,2k-1}}{2^{n-1}}-\frac{N_{2n-1,2k+1}}{2^{n-1}}\Big)=\frac{1}{2}\Big(\mathbb{P}(S_{2n-1}=2k-1)-\mathbb{P}(S_{2n-1}=2k+1)\Big)$

Bilan :
$\boxed{\mathbb{P}\Big([S_1>0]\cap[S_2>0]\cap\cdots\cap[S_{2n-1}>0]\cap[S_{2n}=2k]\Big)=\frac{1}{2}\Big(\mathbb{P}(S_{2n-1}=2k-1)-\mathbb{P}(S_{2n-1}=2k+1)\Big)}$

Q40) • Pour commencer, on remarque que S_{2n} est un nombre entier pair donc $\boxed{(S_{2n}>0)=\bigcup_{k=1}^{+\infty}(S_{2n}=2k)}$

• De plus, pour $k>n$ on a l'événement $S_{2n}=2k$ qui est impossible (on monte au plus à $2n$) donc $(S_{2n}=2k)=\emptyset$
Avec le point précédent on a : $(S_{2n}>0)=\bigcup_{k=1}^{n}(S_{2n}=2k)$

• Alors : $\Big([S_1>0]\cap[S_2>0]\cap\cdots\cap[S_{2n-1}>0]\cap[S_{2n}>0]\Big)$
$=\Big([S_1>0]\cap[S_2>0]\cap\cdots\cap[S_{2n-1}>0]\cap[\bigcup_{k=1}^{n}(S_{2n}=2k)]\Big)$
$=\bigcup_{k=1}^{n}\Big(([S_1>0]\cap[S_2>0]\cap\cdots\cap[S_{2n-1}>0]\cap[S_{2n}=2k])\Big)$

Par incompatibilité (puisque $(S_{2n}=2k)\cap(S_{2n}=2k')=\emptyset$ si $k\neq k'$) on a :
$\mathbb{P}\Big([S_1>0]\cap[S_2>0]\cap\cdots\cap[S_{2n-1}>0]\cap[S_{2n}>0]\Big)$
$=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}\Big(([S_1>0]\cap[S_2>0]\cap\cdots\cap[S_{2n-1}>0]\cap[S_{2n}=2k])\Big)$

On utilise alors Q39) et on a :
$\mathbb{P}\Big([S_1>0]\cap[S_2>0]\cap\cdots\cap[S_{2n-1}>0]\cap[S_{2n}>0]\Big)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\Big(\mathbb{P}(S_{2n-1}=2k-1)-\mathbb{P}(S_{2n-1}=2k+1)\Big)$

Par télescopage :
$\mathbb{P}\Big([S_1>0]\cap[S_2>0]\cap\cdots\cap[S_{2n-1}>0]\cap[S_{2n}>0]\Big)=\frac{1}{2}\Big(\mathbb{P}(S_{2n-1}=1)-\underbrace{\mathbb{P}(S_{2n-1}=2n+1)}_{=0}\Big)$

On a donc : $\mathbb{P}\Big([S_1>0]\cap[S_2>0]\cap\cdots\cap[S_{2n-1}>0]\cap[S_{2n}>0]\Big)=\frac{1}{2}\mathbb{P}(S_{2n-1}=1)$

• Pour avoir $S_{2n-1}=1$ il faut n montée et $n-1$ descente parmi les $2n-1$ premier mouvements. Il y a donc $\binom{2n-1}{n-1}$ chemins de longueur $2n-1$ de cette sorte.
Par équiprobabilité $\mathbb{P}(S_{2n-1}=1)=\frac{\binom{2n-1}{n-1}}{2^{2n-1}}$

• Pour avoir $S_{2n}=0$ il faut n montée et n descente parmi les $2n$ premier mouvements.
Il y a donc $\binom{2n}{n}$ chemins de longueur $2n$ de cette sorte.
Par équiprobabilité $\mathbb{P}(S_{2n}=0)=\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$
Mais $\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}=\frac{(2n)!}{n!n!2^{2n}}=\frac{(2n)(2n-1)!}{n!n!2^{2n}}=\frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!2^{2n-1}}=\frac{\binom{2n-1}{n-1}}{2^{2n-1}}=\mathbb{P}(S_{2n-1}=1)$

On a donc $\mathbb{P}(S_{2n-1}=1)=\mathbb{P}(S_{2n}=0)$

• Bilan : $\boxed{\mathbb{P}\Big([S_1>0]\cap[S_2>0]\cap\cdots\cap[S_{2n-1}>0]\cap[S_{2n}>0]\Big)=\frac{1}{2}\mathbb{P}(S_{2n}=0)}$

• Par le principe de réflexion :
$\mathbb{P}\Big([S_1>0]\cap[S_2>0]\cap\cdots\cap[S_{2n-1}>0]\cap[S_{2n}>0]\Big)=\mathbb{P}\Big([S_1<0]\cap[S_2<0]\cap\cdots\cap[S_{2n-1}<0]\cap[S_{2n}<0]\Big)$

On remarque aussi que :

$$\Big([S_1\neq0]\cap[S_2\neq0]\cap\cdots\cap[S_{2n-1}\neq0]\cap[S_{2n}\neq0]\Big)$$
$$=\Big([S_1>0]\cap[S_2>0]\cap\cdots\cap[S_{2n-1}>0]\cap[S_{2n}>0]\Big)\bigcup\Big([S_1<0]\cap[S_2<0]\cap\cdots\cap[S_{2n-1}<0]\cap[S_{2n}<0]\Big)$$

Par incompatibilité :

$$\mathbb{P}\Big([S_1\neq0]\cap[S_2\neq0]\cap\cdots\cap[S_{2n-1}\neq0]\cap[S_{2n}\neq0]\Big)$$
$$=\mathbb{P}\Big([S_1>0]\cap[S_2>0]\cap\cdots\cap[S_{2n-1}>0]\cap[S_{2n}>0]\Big)+\mathbb{P}\Big([S_1<0]\cap[S_2<0]\cap\cdots\cap[S_{2n-1}<0]\cap[S_{2n}<0]\Big)$$

Et avec les résultats ci-dessus :
$\mathbb{P}\Big([S_1\neq0]\cap[S_2\neq0]\cap\cdots\cap[S_{2n-1}\neq0]\cap[S_{2n}\neq0]\Big)=\frac{1}{2}\mathbb{P}(S_{2n}=0)+\frac{1}{2}\mathbb{P}(S_{2n}=0)=\mathbb{P}(S_{2n}=0)$

On a donc : $\boxed{\mathbb{P}\Big([S_1\neq0]\cap[S_2\neq0]\cap\cdots\cap[S_{2n-1}\neq0]\cap[S_{2n}\neq0]\Big)=\mathbb{P}(S_{2n}=0)}$

Q41) Comme $T_{2n}=2k$ est l'événement la dernière visite en 0 à lieu en $2k$, on a :
$[T_{2n}=2k]=\Big([S_{2k}=0]\cap\big([S_{2k+1}\neq0]\cap\cdots\cap[S_{2n}\neq0]\Big)$

Par la formule des probabilités conditionnelle :
$\mathbb{P}(T_{2n}=2k)=\mathbb{P}(S_{2k}=0)\mathbb{P}_{(S_{2k}=0)}\big([S_{2k+1}\neq0]\cap\cdots\cap[S_{2n}\neq0]\Big)$

Comme $\sum\limits_{m=1}^{\ell}X_m$ et $\sum\limits_{m=1+2k}^{\ell+2k}X_{m+2k}$ ont même loi (admis dans l'énoncé), alors, la connaissance $S_{2k}=0$ permet de translater le problème de $2k$ et donc :
$$\mathbb{P}_{(S_{2k}=0)}\big([S_{2k+1}\neq0]\cap\cdots\cap[S_{2n}\neq0]\Big)$$
$$=\mathbb{P}\Big([S_{2k+1-2k}\neq0]\cap\cdots\cap[S_{2n-2k}\neq0]\Big)$$
$$=\mathbb{P}\Big([S_1\neq0]\cap\cdots\cap[S_{2n-2k}\neq0]\Big)$$

On en déduit finalement : $\boxed{\mathbb{P}(T_{2n}=2k)=\mathbb{P}(S_{2k}=0)\mathbb{P}\Big([S_1\neq0]\cap\cdots\cap[S_{2n-2k}\neq0]\Big)}$

Q42) • D'après Q25) : $\mathbb{P}(S_{2k}=0)=\frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k}}$

• D'après Q40) : $\mathbb{P}\Big([S_1\neq 0]\cap\cdots\cap[S_{2n-2k}\neq 0]\Big)=\mathbb{P}(S_{2n-2k}=0)$

En réutilisant Q25 : $\mathbb{P}\Big([S_1\neq 0]\cap\cdots\cap[S_{2n-2k}\neq 0]\Big)=\frac{\binom{2n-2k}{n-k}}{2^{n-k}}=\frac{\binom{2n-2k}{n-k}}{2^{2n-2k}}$

• Avec Q41), on a alors : $\mathbb{P}(T_{2n}=2k)=\frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k}}\frac{\binom{2n-2k}{n-k}}{2^{2n-2k}}=\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}\frac{1}{4^n}$

On a donc : $\boxed{\mathbb{P}(T_{2n}=2k)=\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}\frac{1}{4^n}}$

Q43) • Par construction f est continue sur $[0,1]$

Alors, par le théorème sur les sommes de Riemann on a : $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}f(\frac{k}{n})\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\int\limits_0^1 f(t)dt$

• $k\leq\lfloor n\alpha\rfloor\Rightarrow k\leq n\alpha\Rightarrow\frac{k}{n}\leq\alpha\Rightarrow f(\frac{k}{n})=f(\alpha)$
$k>\lfloor n\beta\rfloor+1\Rightarrow k\geq n\beta\Rightarrow\frac{k}{n}\geq\beta\Rightarrow f(\frac{k}{n})=f(\beta)$

• On coupe alors la somme de Riemann en trois et on utilise les remarques ci-dessus :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}f(\tfrac{k}{n})$$
$$=\sum_{k=0}^{\lfloor n\alpha\rfloor}\frac{1}{n}f(\tfrac{k}{n})+\sum_{k=\lfloor n\alpha\rfloor+1}^{\lfloor n\beta\rfloor}\frac{1}{n}f(\tfrac{k}{n})+\sum_{k=\lfloor n\beta\rfloor+1}^{n-1}\frac{1}{n}f(\tfrac{k}{n})$$
$$=\sum_{k=0}^{\lfloor n\alpha\rfloor}\frac{1}{n}f(\alpha)+\sum_{k=\lfloor n\alpha\rfloor+1}^{\lfloor n\beta\rfloor}\frac{1}{n}f(\tfrac{k}{n})+\sum_{k=\lfloor n\beta\rfloor+1}^{n-1}\frac{1}{n}f(\beta)$$
$$=\frac{\lfloor n\alpha\rfloor+1}{n}f(\alpha)+\sum_{k=\lfloor n\alpha\rfloor+1}^{\lfloor n\beta\rfloor}\frac{1}{n}f(\tfrac{k}{n})+\frac{n-\lfloor n\beta\rfloor+1}{n}f(\beta)$$

• On a (pour n assez grand) : $n\alpha-1\leq\lfloor n\alpha\rfloor\leq n\alpha\Rightarrow\alpha-\frac{1}{n}\leq\frac{\lfloor n\alpha\rfloor}{n}\leq\alpha$

Donc par encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\lfloor n\alpha\rfloor}{n}=\alpha$

On montrer de même que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\lfloor n\beta\rfloor}{n}=\beta$

• De l'égalité ci-dessus on déduit :

$$\sum_{k=\lfloor n\alpha\rfloor+1}^{\lfloor n\beta\rfloor}\frac{1}{n}f(\tfrac{k}{n})=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}f(\tfrac{k}{n})-\frac{\lfloor n\alpha\rfloor+1}{n}f(\alpha)-\frac{n-\lfloor n\beta\rfloor+1}{n}f(\beta)$$

Tous les termes du membres de droites ont une limite et on en déduit donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=\lfloor n\alpha\rfloor+1}^{\lfloor n\beta\rfloor}\frac{1}{n}f(\tfrac{k}{n})$$
$$=\int_0^1 f(t)dt-\alpha f(\alpha)-(1-\beta)f(\beta)$$
$$=\int_0^1 f(t)dt-\int_0^\alpha f(t)dt-\int_\beta^1 f(t)dt=\int_\alpha^\beta f(t)dt$$

(par la relation de Chasles et puisque : $\int\limits_0^\alpha f(t)dt=\alpha f(\alpha)$ et $\int\limits_\beta^1 f(t)dt=(1-\beta)f(\beta)$

Bilan : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=\lfloor n\alpha\rfloor+1}^{\lfloor n\beta\rfloor}\frac{1}{n}f(\frac{k}{n})=\int\limits_\alpha^\beta f(t)dt}$

Q44) On a : $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ et utilisant Q22) : $\binom{2n}{n} = \frac{\sqrt{4\pi n}(\frac{2n}{e})^{2n})\left(1+\frac{1}{24n}+\frac{q_{2n}}{2n}\right)}{2\pi n(\frac{n}{e})^{-2n})\left(1+\frac{1}{12n}+\frac{q_n}{n}\right)^2}$

Comme q_n tend vers 0 : $\binom{2n}{n} = \frac{2^{2n+1}\sqrt{\pi}n^{2n+1/2}e^{-2n}(1+\frac{1}{24n}+o(\frac{1}{n}))}{2\pi n^{2n+1}e^{-2n}(1+\frac{1}{6n}+o(\frac{1}{n}))}$

On simplifie : $\binom{2n}{n} = \frac{4^n}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}(1+\frac{1}{24n}+o(\frac{1}{n}))(1-\frac{1}{6n}+o(\frac{1}{n})) = \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}(1-\frac{1}{8n}+o(\frac{1}{n}))$

On a donc montrer que : $\boxed{\text{il existe } (\epsilon_n) \text{ tel que } \lim\limits_{n\to+\infty}\epsilon_n = 1 \text{ et } \binom{2n}{n} = \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}(1-\frac{\epsilon_n}{8n})}$

Q45) Comme $\lfloor n\alpha\rfloor + 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ alors pour $k \geq \lfloor n\alpha\rfloor + 1$:

$$\frac{1}{4^n}\binom{2k}{k}\binom{2n-k}{n-k}$$
$$= \frac{1}{4n}\left(\frac{4^k}{\sqrt{\pi k}}(1-\frac{\epsilon_k}{8k})\right)\left(\frac{4^{n-k}}{\sqrt{\pi(n-k)}}(1-\frac{\epsilon_{n-k}}{8(n-k)})\right)$$
$$= \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}(1-\frac{\epsilon_k}{8k})(1-\frac{\epsilon_{n-k}}{8(n-k)})$$
$$= \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}(1-\frac{\epsilon_k}{8k}-\frac{\epsilon_{n-k}}{8(n-k)}+\frac{\epsilon_k\epsilon_{n-k}}{64k(n-k)})$$
$$= \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}(1+\theta_n) \quad \text{avec } \theta_n = -\frac{\epsilon_k}{8k}-\frac{\epsilon_{n-k}}{8(n-k)}+\frac{\epsilon_k\epsilon_{n-k}}{64k(n-k)}$$

Comme $k \geq n\alpha$ alors $\theta_n = O(\frac{1}{n})$ et donc $\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}\theta_n = O(\frac{1}{n^2})$

Alors $\sum\limits_{\lfloor n\alpha\rfloor+1}^{n\beta}\left(\frac{1}{4^n}\binom{2k}{k}\binom{2n-k}{n-k} - \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}\right) = \sum\limits_{\lfloor n\alpha\rfloor+1}^{n\beta} O(\frac{1}{n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ puisque la somme est de l'ordre de n termes

Bilan : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{\lfloor n\alpha\rfloor+1}^{n\beta}\left(\frac{1}{4^n}\binom{2k}{k}\binom{2n-k}{n-k} - \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}\right) = 0}$

Q46) • $\frac{T_{2n}}{2n} \in [\alpha,\beta] \Leftrightarrow n\alpha \leq \frac{T_{2n}}{2} \leq n\beta \Leftrightarrow \frac{T_{2n}}{2} \in [\![\lfloor n\alpha\rfloor+1, \lfloor n\beta\rfloor]\!]$

Par incompatibilité on a : $\mathbb{P}\left(\frac{T_{2n}}{2n} \in [\alpha,\beta]\right) = \sum\limits_{k=\lfloor n\alpha\rfloor+1}^{\lfloor n\beta\rfloor}\mathbb{P}(T_{2n} = 2k)$

En utilisant Q42) : $\mathbb{P}\left(\frac{T_{2n}}{2n} \in [\alpha,\beta]\right) = \sum\limits_{k=\lfloor n\alpha\rfloor+1}^{\lfloor n\beta\rfloor}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}\frac{1}{4^n}$

Avec Q45) et Q43) : $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left(\frac{T_{2n}}{2n} \in [\alpha,\beta]\right) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(t)dt$

• $\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = \int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}dt = \int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{\sqrt{t-t^2}}dt$

On effectue le changement de variable C^1 : $t = u^2$ donc $dt = 2udu$

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = \int\limits_{\sqrt{\alpha}}^{\sqrt{\beta}}\frac{1}{u^2-u^4}(2udu) = 2\int\limits_{\sqrt{\alpha}}^{\sqrt{\beta}}\frac{1}{1-u^2}du = 2[arcsin(u)]_{\sqrt{\alpha}}^{\sqrt{\beta}} = 2[arcsin(\sqrt{\beta}) - arcsin(\sqrt{\alpha})]$$

• Reporté ci-dessus, on a : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left(\frac{T_{2n}}{2n} \in [\alpha,\beta]\right) = \frac{2}{\pi}[arcsin(\sqrt{\beta}) - arcsin(\sqrt{\alpha})]}$