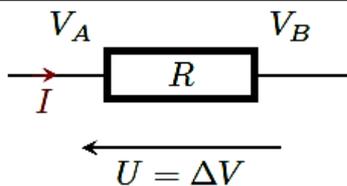
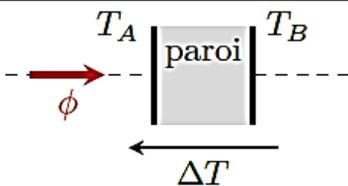


TRANSFERTS

Chapitre 2 - Transferts thermiques

Conduction électrique	Conduction thermique
	
Intensité électrique $I = \iint_S \vec{j}_{\text{elec}} \cdot \vec{dS}$	Flux thermique $\phi = \iint_S \vec{j}_{\text{th}} \cdot \vec{dS}$
Loi des nœuds $I_e = I_s = I$	Conservation du flux $\phi_e = \phi_s = \phi$
Tension = différence de potentiel $U = \Delta V = V_A - V_B$	Différence de température $\Delta T = T_A - T_B$
Loi d'Ohm locale (mésoscopique) $\vec{j}_{\text{elec}} = \gamma \vec{E} = -\gamma \overrightarrow{\text{grad}} V$	Loi de Fourier $\vec{j}_{\text{th}} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$
Loi d'Ohm globale (macroscopique) $U = RI$ (convention récepteur)	Résistance thermique $\Delta T = R_{\text{th}} \phi$ (convention récepteur)

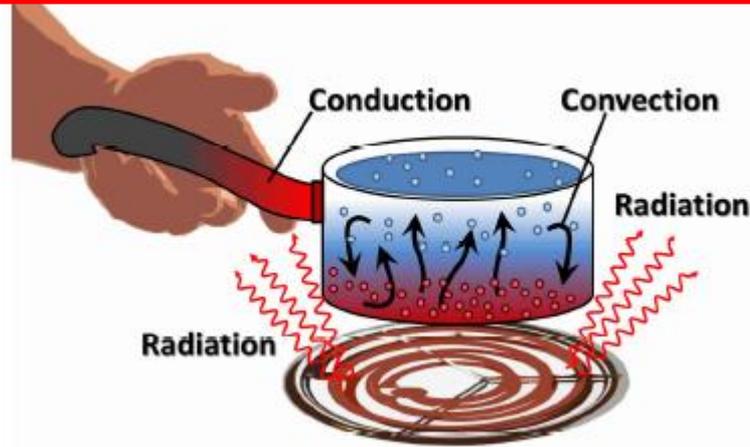
1. Définitions et loi de Fourier

3 modes de transferts thermiques :

CONDUCTION

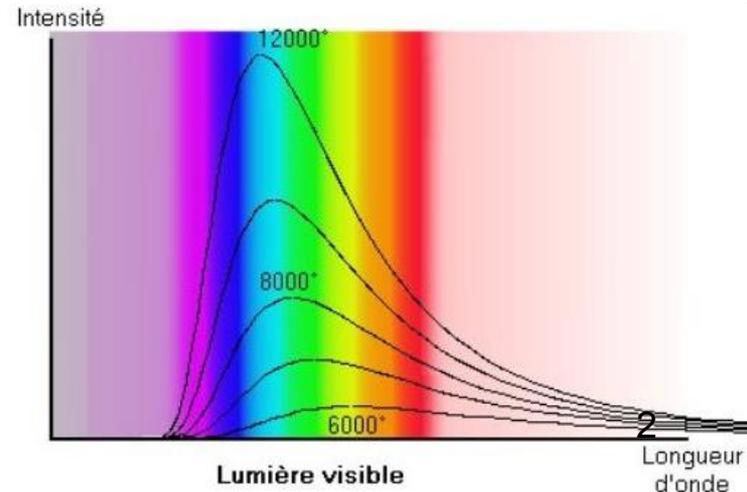
CONVECTION

RAYONNEMENT

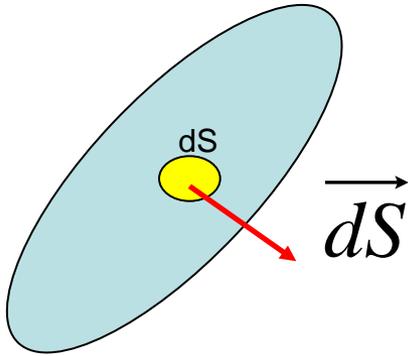


Un corps chauffé émet de l'énergie sous forme de rayonnement électromagnétique.

Le rayonnement thermique se déplace vers les courtes longueurs d'ondes quand la température du corps augmente



Flux thermique (en W)

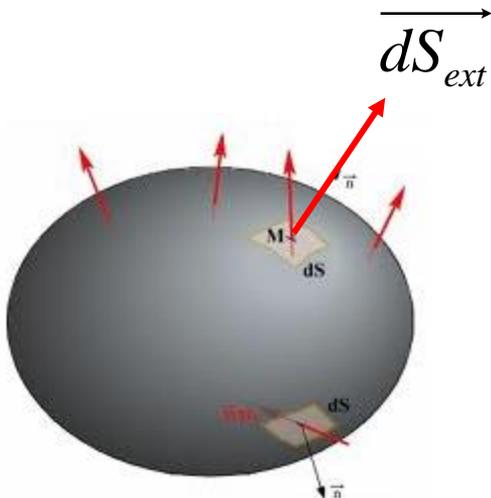


$$\delta Q_r = \Phi \cdot dt = P_{th} \cdot dt$$

(J)

$$\Phi(t) = \iint_S \vec{J}_{th} \cdot \vec{dS}$$

Densité de flux thermique (W.m⁻²)



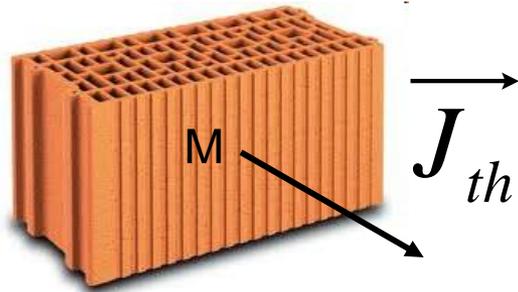
Surface fermée :

Flux positif si « sortant »

$$\Phi(t) = \oiint_S \vec{J}_{th} \cdot \vec{dS}_{ext}$$

$$\delta Q_r = -\Phi_{sortant} \cdot dt$$

Conduction thermique : loi de Fourier



Loi de Fourier : (loi locale en un point M du matériau)

$$\vec{J}_{th}(M, t) = -\lambda \cdot \text{grad}[T(M, t)]$$

W.m⁻²

Transfert naturel du chaud vers le froid

λ : **Conductivité thermique du matériau en W.K⁻¹.m⁻¹**

Matériaux	λ [W/mK]	Remarques
Cuivre	380	Très bon conducteur
Aluminium	230	
Acier	50	
Terre comprimée	1.05	
Terre cuite	1.15	
Béton	1.75	
Béton caverneux	1,40	
Plâtre	0.35	
Bois naturel	0.15 à 0.23	
Panneau de contreplaqué	0.12	
Panneau de particule	0,14	
Polystyrène expansé	0.04	Isolant thermique
Laine de Verre	0.04	Idem
Laine de roche	0,038 à 0,047	
Liège comprimé	0,10	
Verre	1.10	

La conductivité thermique d'un matériau **solide** est fonction de :

1. sa densité : plus un matériau est léger plus il est isolant
2. sa température : plus un matériau est « chaud » plus il est conducteur

Air : 0,026 W.K⁻¹.m⁻¹

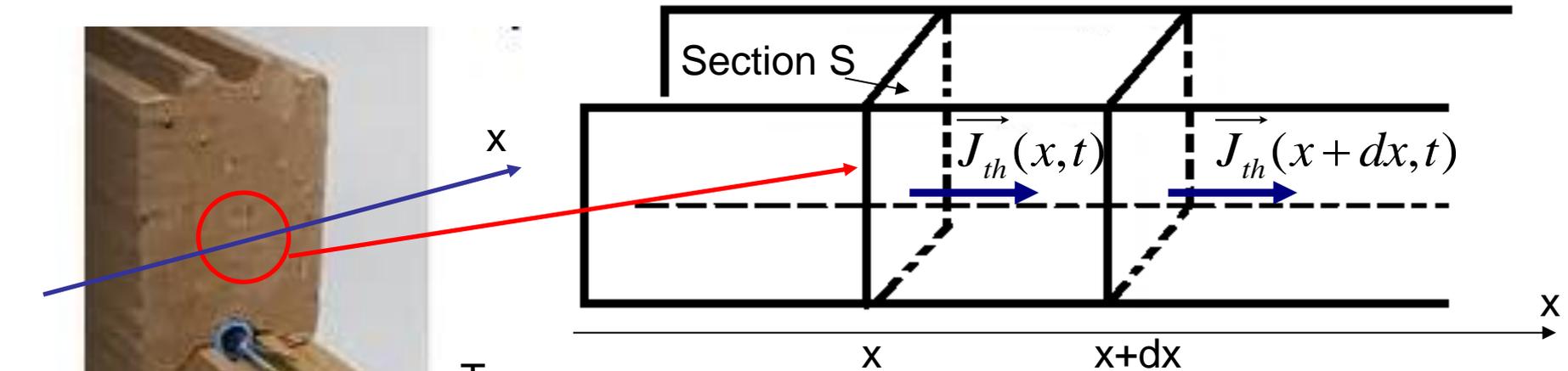
La conductivité thermique des gaz, au voisinage de la pression atmosphérique, croît avec la température.

Eau : 0,6 W.K⁻¹.m⁻¹

À l'exception de l'eau, de quelques solutions aqueuses, de quelques molécules à plusieurs fonctions amine ou hydroxy, les conductivités thermiques de la plupart des liquides décroissent avec la température.

2. Conduction thermique : équation locale (1D) de T(x,t)

Exemple : matériau solide homogène (λ, c, ρ) uniformes.



Premier principe à la tranche de volume $S \cdot dx$:

$$dU = \cancel{\delta W_r} + \delta Q_r$$

$$dU = U(t + dt) - U(t) = \rho \cdot S \cdot dx \cdot u(M, t + dt) - \rho \cdot S \cdot dx \cdot u(M, t)$$

$$dU = \rho \cdot S \cdot dx \cdot \frac{\partial u}{\partial t} dt = \rho \cdot S \cdot c \cdot dx \cdot \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} dt$$

$$\delta Q_r = \delta Q_{ech} + \delta Q_{produit}$$

« reçue » par les sections en x et $x+dx$

produite dans le milieu (effet Joule⁵...)

Conduction thermique : équation locale (1D) de T(x,t)

$$\delta Q_{produite} = p_V \cdot (S \cdot dx) \cdot dt$$

avec p_V = **puissance volumique** créée dans le milieu en $W \cdot m^{-3}$, nulle si milieu « passif »

$$\delta Q_{ech} = [J_x(x,t) \cdot S - J_x(x+dx,t) \cdot S] \cdot dt = -\frac{\partial J_x}{\partial x} \cdot S \cdot dx \cdot dt$$

$$J_x = -\lambda \cdot \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \quad \Longrightarrow \quad \delta Q_{ech} = \lambda \cdot \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \cdot S \cdot dx \cdot dt$$

Premier principe :

Équation locale de la conduction thermique

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho \cdot c} \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} + \frac{p_V}{\rho \cdot c}$$

- Milieu passif : $p_V = 0$

- Régime stationnaire : $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$

$a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c}$ est la **diffusivité** du matériau

3. Conduction thermique : généralisation à 3D

3.1 Equation de diffusion 3D

Si $T(x,y,z)$ montrer que :

$$\frac{\partial T(M,t)}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho.c} \Delta T(M,t) + \frac{p_v}{\rho.c}$$

Conduction thermique : généralisation à 3D

Pour une diffusion dans les trois directions de l'espace : $T(x,y,z,t)$:

$$\frac{\partial T(M, t)}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho \cdot c} \Delta T(M, t) + \frac{p_V}{\rho \cdot c}$$

Opérateur **LAPLACIEN**

Expressions en coordonnées:

- Cartésiennes:
$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

- Cylindriques:
$$\Delta V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

- Sphériques :
$$\Delta V = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rV)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}$$

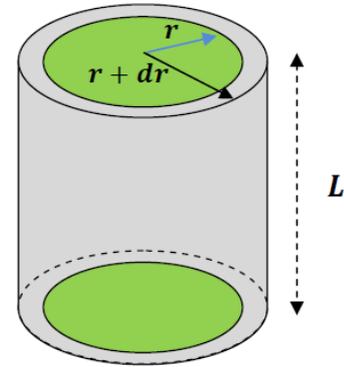
3.2 Application : conduction thermique dans une gaine cylindrique

Milieu passif, $T(M,t) = T(r, t)$

Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $T(r, t)$:

Par application de l'équation de la diffusion thermique

Par application du 1^{er} principe (bilan thermique)

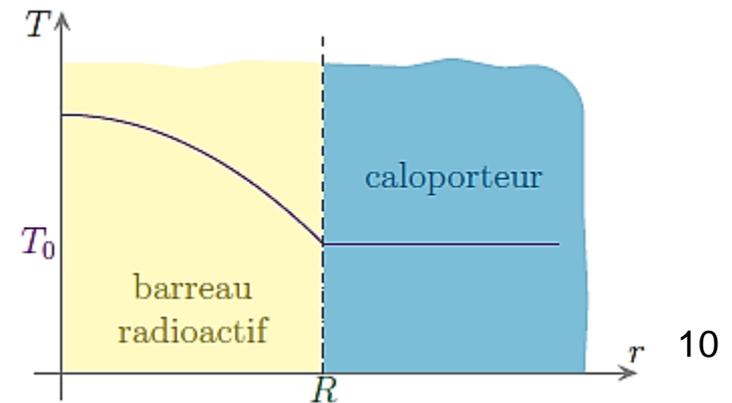
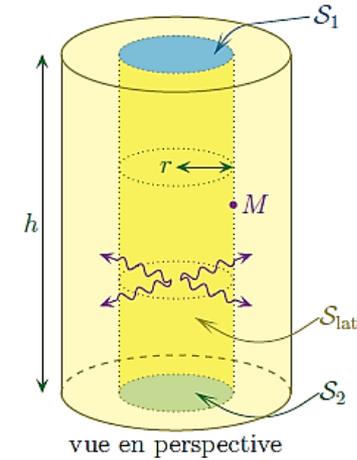
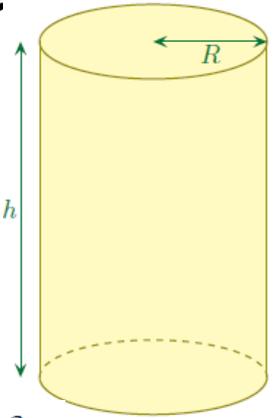


3.3 Exemple d'un milieu actif en géométrie cylindrique

barreau radioactif

Nous considérerons le barreau suffisamment grand pour pouvoir négliger les effets de bord.
En admettant que la température ambiante soit uniforme et constante égale à T_0 , quelle est la température dans le barreau ?

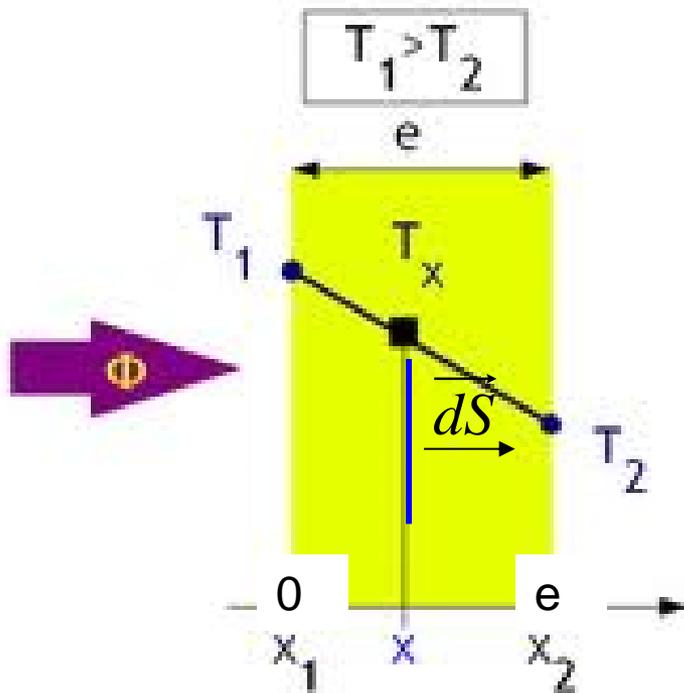
comme le barreau est radioactif, il y a un terme de source que nous prendrons uniforme et constant à \mathcal{P}_0 (en W.m^{-3});



4. Conduction thermique en régime permanent

Géométrie axiale 1D – Résistances thermiques

4.1 Mur en béton, régime stationnaire, milieu passif



$$\frac{d^2T(x)}{dx^2} = 0 \implies T(x) = A.x + B$$

Conditions aux limites : $T(0) = T_1$; $T(e) = T_2$

$$T(x) = \frac{T_2 - T_1}{e} . x + T_1$$

Profil **linéaire** de température dans le mur

Densité de flux thermique :

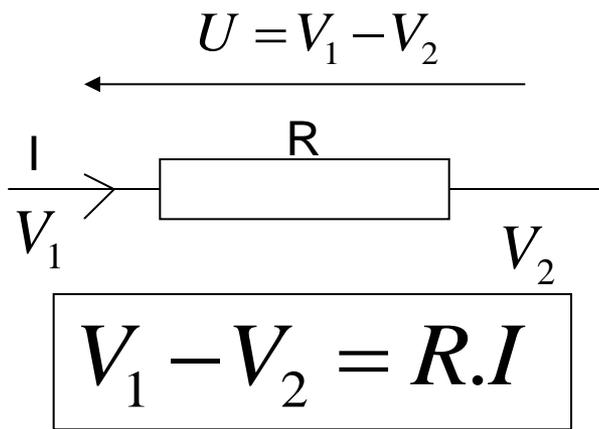
$$\vec{J}_{th} = -\lambda . \vec{grad}T(x) = -\lambda . \frac{dT}{dx} \vec{e}_x = \lambda \frac{T_1 - T_2}{e} \vec{e}_x$$

Puissance (ou flux)
thermique traversant une
section S du mur :

$$\Phi = \iint_S \vec{J}_{th} . \vec{dS} = \frac{\lambda . S}{e} (T_1 - T_2)$$

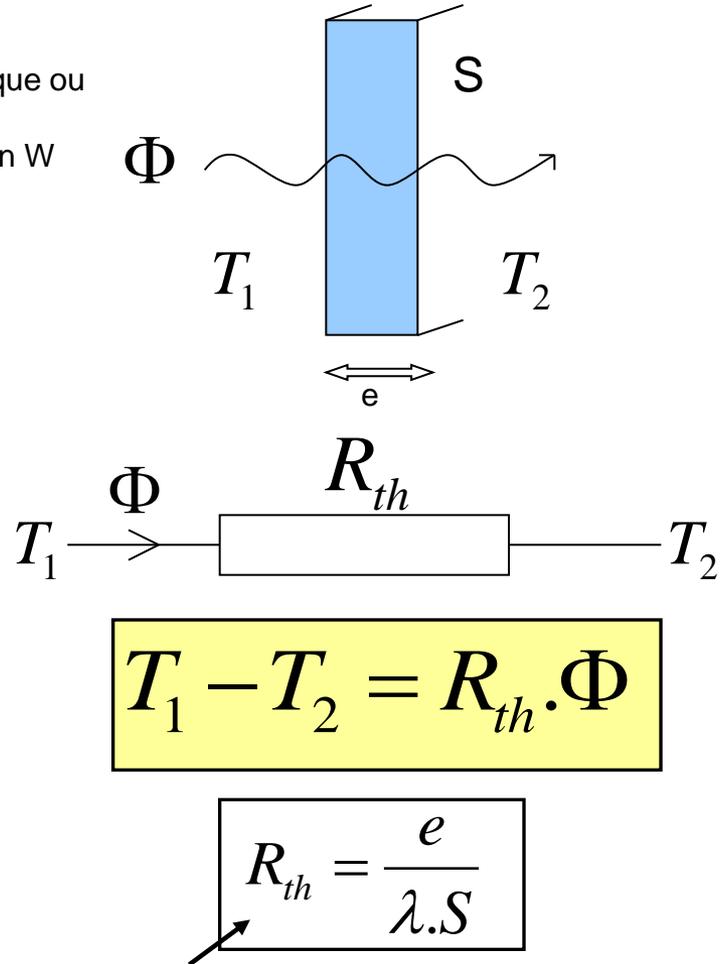
4.2 Modélisation électrocinétique des échanges thermiques en régime stationnaire

Electrocinétique



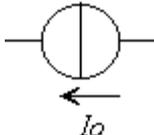
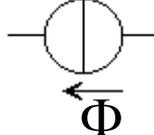
Thermique

Flux thermique ou puissance thermique en W



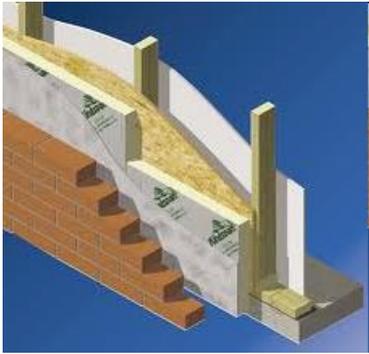
Résistance thermique en K.W⁻¹

Les analogies

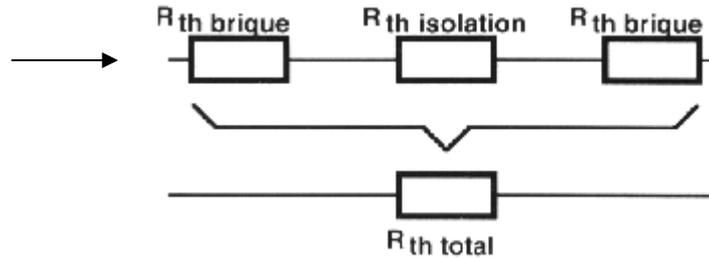
Électricité	Thermique
Potentiel électrique V 	Température T 
Intensité I 	Flux thermique 
Résistance électrique R	Résistance thermique R_{th}
Lois des nœuds et des mailles Associations série ou parallèle	Lois des nœuds et des mailles Associations série ou parallèle

Plus R_{th} est grande, plus l'isolation est importante

4.3 Association de résistances thermiques en série : exemple du double-vitrage



sont parcourues par le même flux



$$R_{th-éq} = \sum_i R_{th-i}$$

Simple vitrage



$$e = 6 \text{ mm}$$

$$\lambda_{verre} = 1,2 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$$

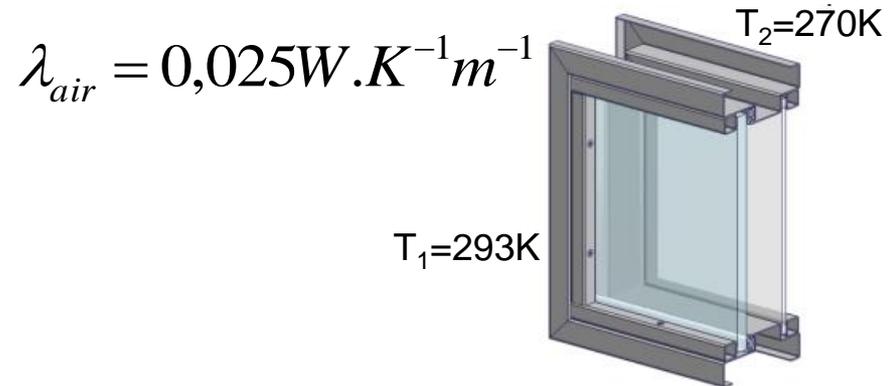
$$S = 1 \text{ m}^2$$

$$T_2 = 270 \text{ K}$$

$$T_1 = 293 \text{ K}$$

Calculer R_{th1} et le flux Φ_1

Double vitrage verre-air-verre



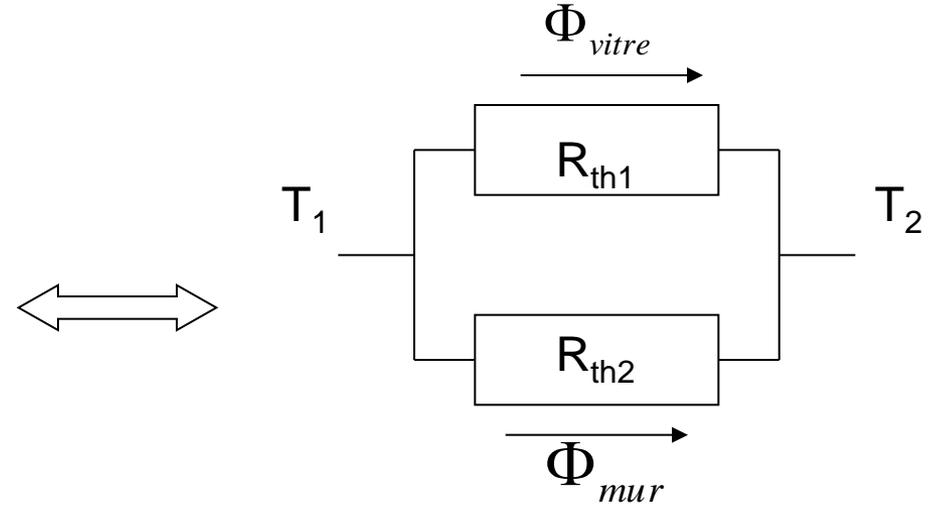
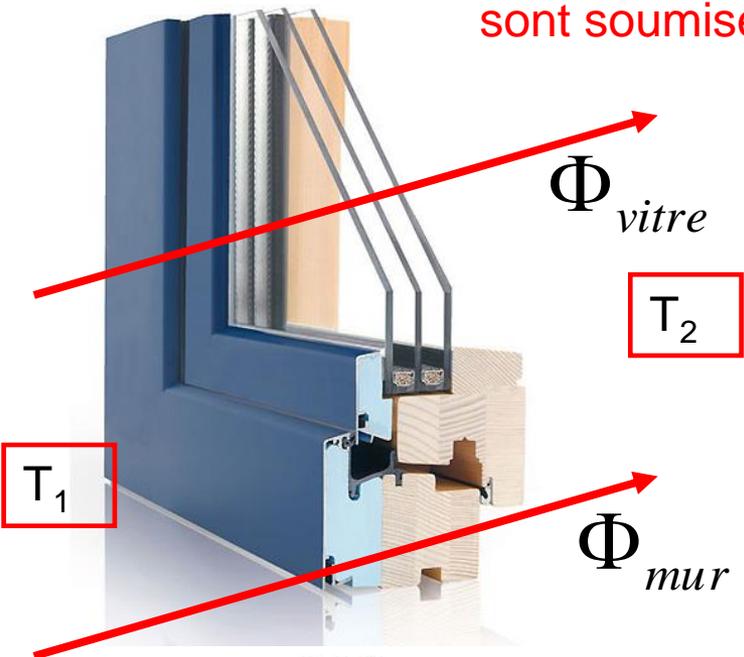
$$\lambda_{air} = 0,025 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$e_{v1} = 3 \text{ mm} ; e_{air} = 3 \text{ mm} ; e_{v2} = 3 \text{ mm}$$

Calculer R_{th2} et le flux Φ_2

4.4 Association de résistances thermiques en parallèle

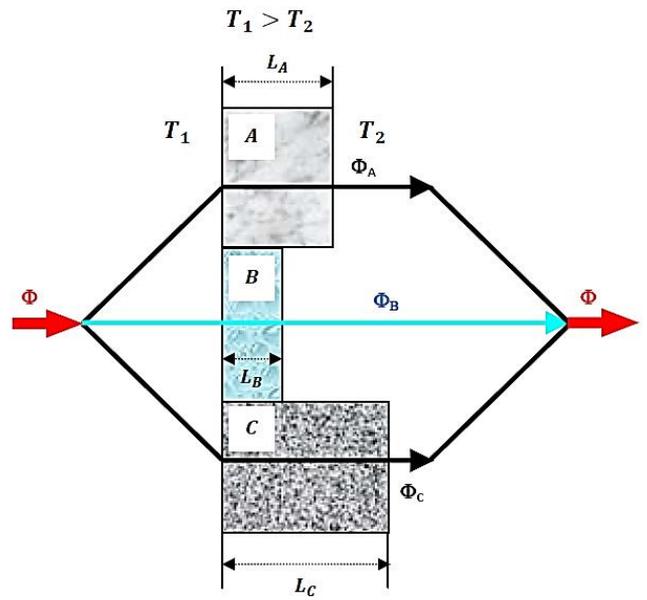
sont soumises à la même différence de température



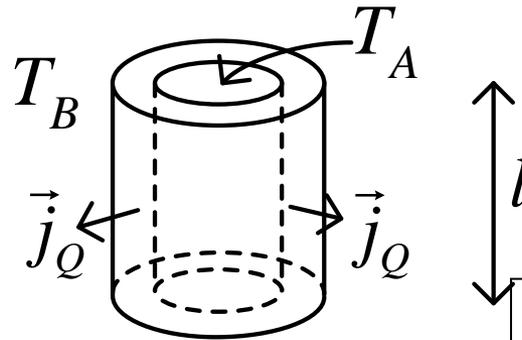
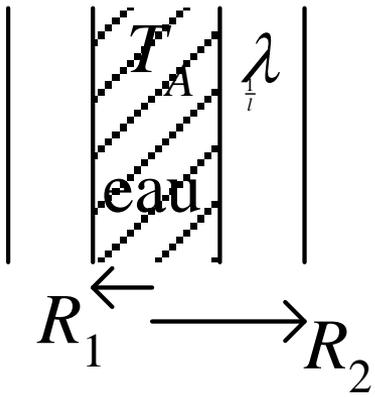
$$T_1 - T_2 = R_{th-eq} \cdot \Phi$$

$$\frac{1}{R_{th-eq}} = \frac{1}{R_{th1}} + \frac{1}{R_{th2}}$$

$$G_{th} = \frac{1}{R_{th}} = \frac{1}{R_{thA}} + \frac{1}{R_{thB}}$$



4.5 Résistance thermique d'une gaine cylindrique



Démonstration:

- On suppose que le flux de chaleur est uniquement radial.
- Le régime est stationnaire (flux constant)
- Milieu passif

On néglige ici les effets de bords :
La température dépend ainsi uniquement de r

$$\Rightarrow R_{th} = \frac{1}{2\pi \cdot l \lambda} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

5. Distance et temps de diffusion thermique en régime variable

Milieu passif, 1D:

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = a \cdot \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}$$

Evaluation d'ordres de grandeur: $\frac{T}{t} \approx a \cdot \frac{T}{x^2} \Rightarrow x \approx \sqrt{a \cdot t}$

Pendant une durée t, l'effet de la perturbation thermique s'est « propagée » sur une distance de l'ordre de $\sqrt{a \cdot t}$

Influence de la **diffusivité**

Matériaux à 300K	Masse volumique ρ kg/m ³	Chaleur massique C_p J.kg ⁻¹ .K ⁻¹	Capacité thermique $C = \rho C_p$ J.m ⁻³ .K ⁻¹	Conductivité thermique λ W.m ⁻¹ .K ⁻¹	Diffusivité thermique a m ² /s
Aluminium	2702	903	2,44 10 ⁶	237	97 10 ⁻⁶
Cuivre	8933	385	3,44 10 ⁶	401	117 10 ⁻⁶
Fer	7870	447	3,52 10 ⁶	80	23 10 ⁻⁶

$$a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c}$$

La distance caractéristique L de diffusion est :

- d'autant plus grande que la diffusivité a est grande;
- proportionnelle à $\sqrt{\tau}$ où τ est le temps caractéristique : c'est un phénomène *lent*.

Application : estimation d'un temps de brûlure

Pour le métal on donne $a = 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$

Estimer la durée caractéristique du transfert thermique :

- pour une cuillère
- pour une louche

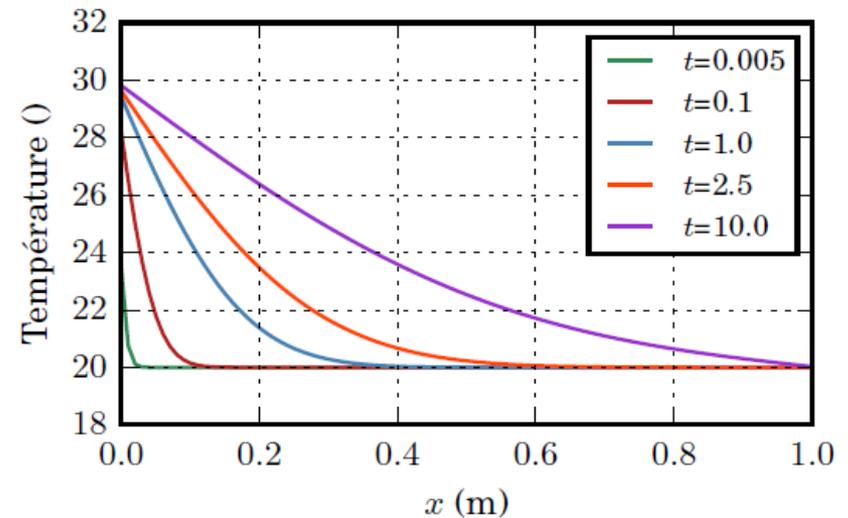
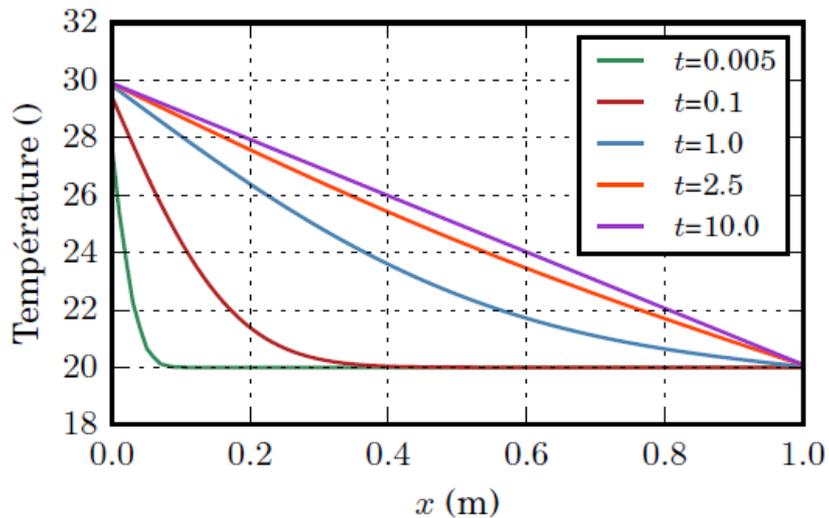
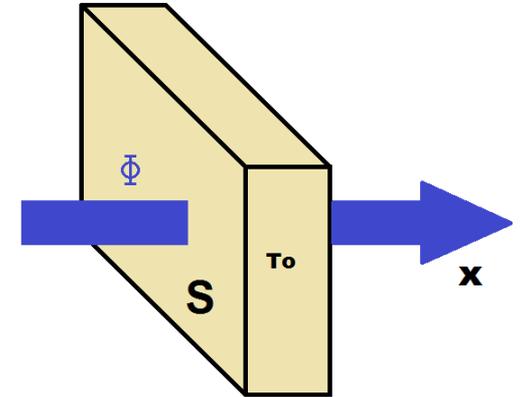
Vaut-il mieux utiliser une cuillère en cuivre ou en fer?



Résolution numérique de l'équation de la chaleur

Une résolution numérique est possible en régime variable, le cas général n'est pas au programme. L'analyse des simulation montre l'influence de la diffusivité.

On considère une plaque plane d'épaisseur 1m, initialement à la température uniforme $T_0 = 20^\circ\text{C}$. On impose un échelon de température $\Delta T = 10^\circ\text{C}$ en $x = 0$ et à l'instant $t = 0$, l'autre extrémité étant maintenue à T_0 .

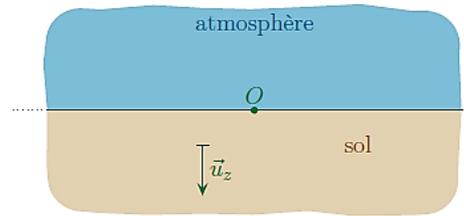


Diffusivité: $a = 0,1 \text{ m/s}^2$

$a = 0,01 \text{ m/s}^2$

On note l'avancée plus ou moins rapide du front de diffusion thermique.

6. Résolution en régime sinusoïdal forcé (ondes thermiques)



On s'intéresse dans cet exercice à l'évolution de la température dans le sol, lorsque la surface de la Terre est soumise à des variations périodiques de température, dues soit à l'alternance jour/nuit, soit à l'alternance été/hiver.

On néglige la sphéricité de la terre. On considère donc que la Terre emplit le demi-espace $z > 0$, l'axe (Oz) étant l'axe vertical, orienté vers le bas. On suppose que la température dépend de t et de z .

On suppose que la température au niveau du sol est de la forme : $T_0 + \theta_0 \cos(\omega t)$.

On suppose que la température dans le sous-sol est de la forme : $T(z, t) = T_0 + \theta(z, t)$, $\theta(z, t)$ étant à déterminer.

On note D la diffusivité thermique du sous-sol.

1) Donner l'équation aux dérivées partielles vérifiée par θ .

2) A la grandeur réelle $\theta(x, t)$, on associe la grandeur complexe $\underline{\theta}(z, t) = \underline{f}(z) \exp(j\omega t)$. Montrez que l'équation différentielle vérifiée par \underline{f} s'écrit :

$$\frac{d^2 \underline{f}}{dz^2} - \frac{i\omega}{D} \underline{f} = 0$$

3) Déterminez la solution générale de cette équation. Déduisez-en la forme générale de $\theta(z, t)$. A l'aide de condition aux limites, montrer que :

$$T(z, t) = T_0 + \theta_0 \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) e^{-\frac{z}{\delta}} ; \quad \text{avec : } \delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}}.$$

Quel nom donne-t-on à ce type de signaux ?

4) Représentez $T(z, t)$ à un instant donné. Indiquez sur le schéma la distance caractéristique δ .

5) On considère des variations journalières de température, et on suppose que l'amplitude de la variation de température au niveau du sol est de 20°C . A partir de quelle profondeur la variation de température n'est-elle que de 2°C ?

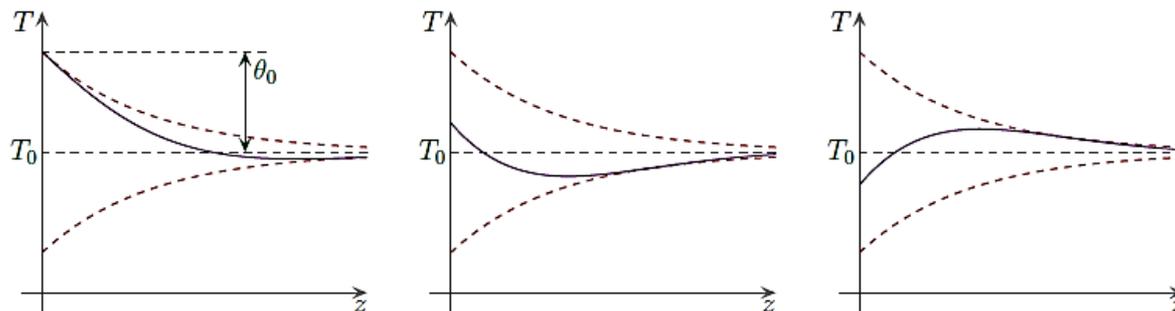
6) Même question pour des variations annuelles de température.

7) Quel est l'intérêt de stocker de la nourriture dans une cave ?

Données : $D = 6.10^{-7} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$

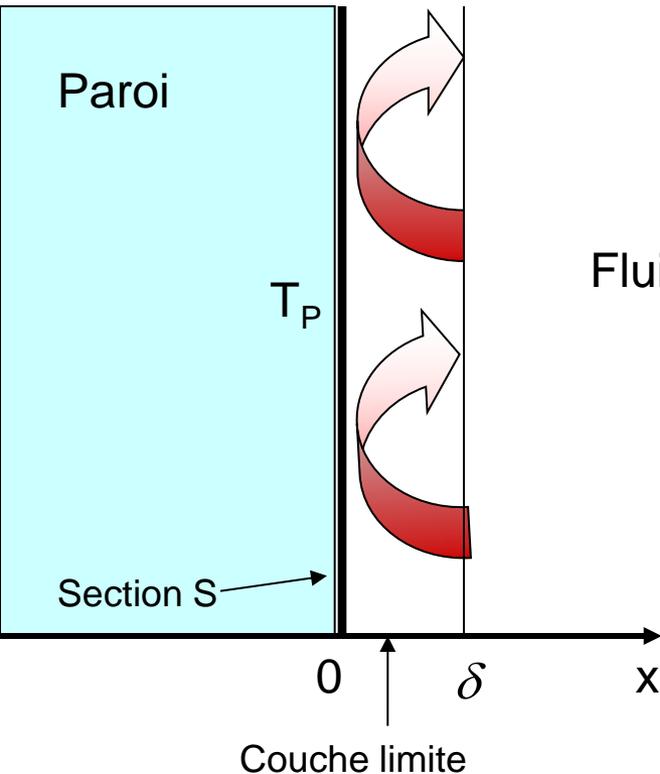
Résolution en régime sinusoïdal forcé (ondes thermiques)

Evolution en fonction de z à divers instants



7. Conducto – convection à l'interface paroi - fluide

La mécanique des fluides nous indique qu'au voisinage de la paroi apparaît dans le fluide une zone due à la convection et appelée **couche limite**.



Flux conducto-convectif donné par la **loi de Newton** :

$$\Phi_{cc} = h.S.(T_P - T_\infty)$$

h = coefficient de transfert conducto-convectif.

Convection naturelle

Gaz :

$$5 < h < 10 \text{ W.K}^{-1}.\text{m}^{-2}$$

Eau :

$$100 < h < 1000 \text{ W.K}^{-1}.\text{m}^{-2}$$

Convection forcée

Gaz :

$$10 < h < 300 \text{ W.K}^{-1}.\text{m}^{-2}$$

Eau :

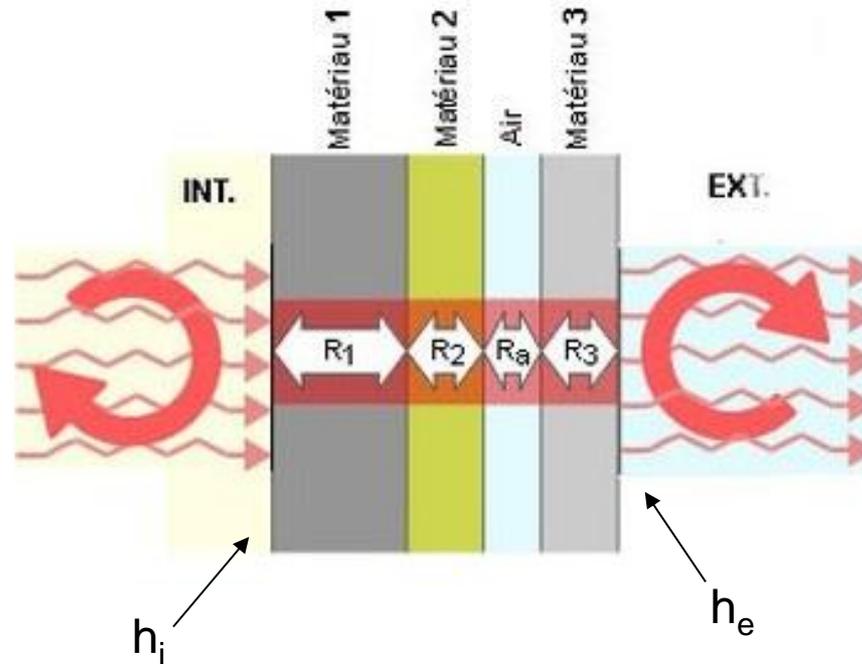
$$300 < h < 12000 \text{ W.K}^{-1}.\text{m}^{-2}$$

Prise en compte des résistances conducto-convectives

$$\Phi_{cc} = h.S.(T_P - T_\infty)$$

→

$$R_{cc} = \frac{1}{h.S}$$

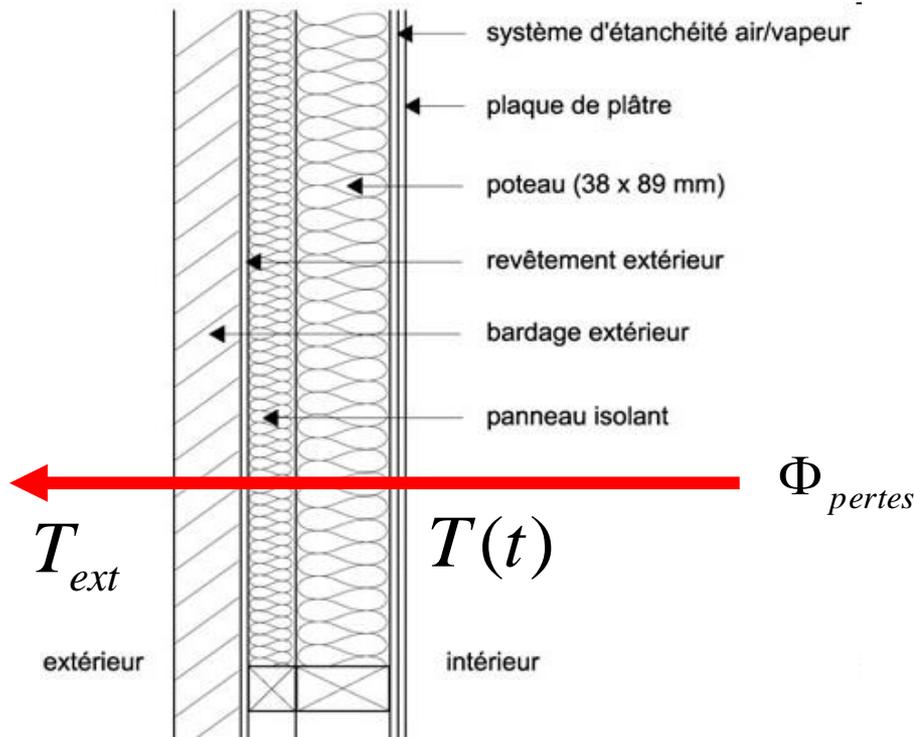


$$R_{th} = \frac{1}{h_i.S} + \sum R_{cond.} + \frac{1}{h_e.S}$$

8. Thermique de l'habitat : bilan thermique sur un local

La surface totale est connue, chaque épaisseur et conductivité aussi. On cherche toutes les résistances thermiques équivalentes.

Exemple d'un des murs



Enduit : $\lambda = 0,48 \text{ WK}^{-1} \text{ m}^{-1}$

Isolant : $\lambda = 0,039 \text{ WK}^{-1} \text{ m}^{-1}$

etc...

Les résistances thermiques sont en série :

$$R_{th-ég} = \sum_i R_{th-i}$$

En faisant de même pour le plafond, le plancher, les vitres (en parallèle), on obtient la résistance thermique totale du local.

$$\Phi_{pertes} = \frac{1}{R_{thT}} (T(t) - T_{ext})$$

On peut aussi prendre en compte la conducto-convection de coefficient d'échange h et sa résistance équivalente.

8.1 Bilan thermique sur un système fermé

Premier principe de la thermodynamique appliqué à la thermique.

$$\text{PRODUCTION} = \text{STOCKAGE} + \text{ECHANGES SORTANTS}$$

On allume la PAC

Dans les murs et dans l'air du local

Pertes thermiques

Démonstration: On suppose une température quasi uniforme dans le local à l'instant t : $T(t)$

La capacité thermique de l'ensemble (extensive) s'obtient en additionnant celle des parois (valeur moyenne) et de l'air, on donne les capacités massiques $c(\text{air}) = 1000 \text{ J.K}^{-1}\text{kg}^{-1}$; $c(\text{murs}) = 880 \text{ J.K}^{-1}\text{kg}^{-1}$.

$$C = \rho_{murs} \cdot V_{murs} \cdot c_{murs} + \rho_{air} \cdot V_{air} \cdot c_{air}$$

Premier principe appliqué à l'ensemble pendant dt :

$$dU = \delta Q_{reçu} + \delta Q_{produit}$$

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\delta Q_r}{dt} + \frac{\delta Q_p}{dt}$$

$$\frac{\delta Q_r}{dt} = -\Phi_{pertes} \quad (\text{murs...})$$

$$\frac{\delta Q_p}{dt} = \Phi_{sources} \quad (\text{PAC...})$$

$$\Phi_{sources} = C \cdot \frac{dT(t)}{dt} + \Phi_{pertes}$$

PRODUCTION

STOCKAGE

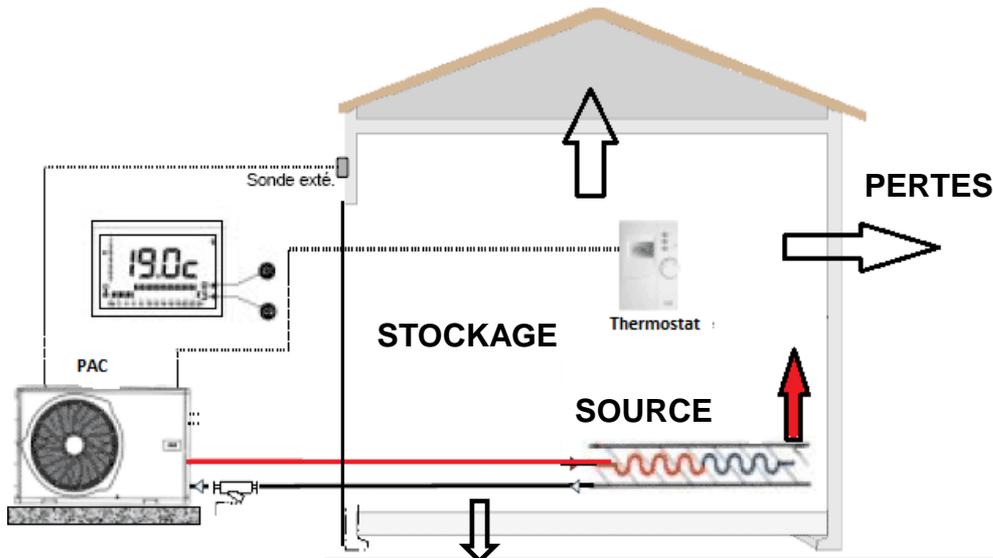
ECHANGES
SORTANTS

Pour les murs solides
et l'air (gaz parfait) :

$$dU = C \cdot dT$$

En régime permanent, la source compense les pertes...

8.2 Schéma électrocinétique équivalent au bilan thermique du local

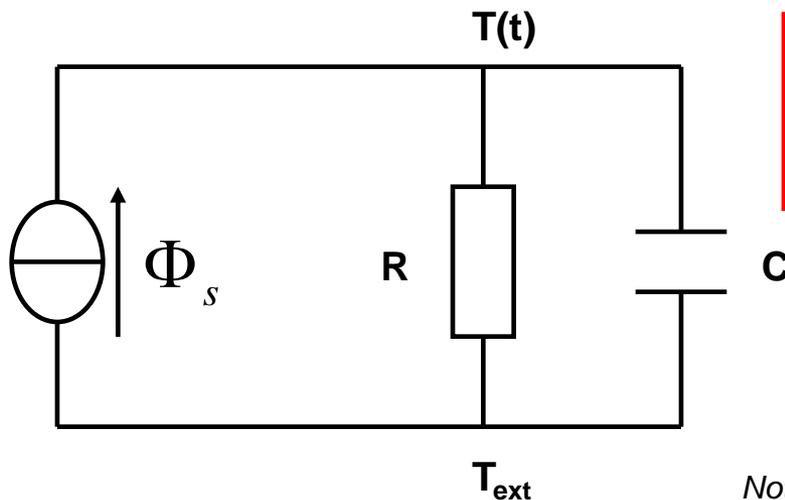


$$\Phi_{sources} = C \cdot \frac{dT(t)}{dt} + \Phi_{pertes}$$

Idem courant dans un condensateur

On traduit la loi des nœuds:

PRODUCTION = STOCKAGE + ECHANGES SORTANTS



$$\Phi_{sources} = C \cdot \frac{dT(t)}{dt} + \frac{1}{R_{th}} (T(t) - T_{ext})$$

Noter l'analogie capacité électrique – capacité thermique dans le stockage d'énergie.

Évolution temporelle de la température du local. Estimation de la puissance de chauffe nécessaire

Exemple de données numériques (d'après TIPE):

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{ext} = 0^{\circ}C \\ R_{th} = 2,85 \cdot 10^{-3} K \cdot W^{-1} \\ C = 6,27 \cdot 10^6 J \cdot K^{-1} \\ T(t=0) = 0^{\circ}C \end{array} \right.$$

On suppose ici le flux source constant apporté par la PAC.

$$\Phi_{sources} = C \cdot \frac{dT(t)}{dt} + \frac{1}{R_{th}} (T(t) - T_{ext}) \Rightarrow$$

$$T(t) = T_{ext} + R_{th} \cdot \Phi_s \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$\tau = R_{th} \cdot C = 17865s \Rightarrow t_{5\%} = 3 \cdot \tau$$

Cahier des charges:

On souhaite 20°C en régime permanent

$$\Rightarrow \Phi_s = 7kW$$

D'où le choix de la PAC :

