Feuille d'exercices n°62 : chap. 22

Exercice 489. *On considère la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$
b) f est-elle C^2 ?

Exercice 490. *On considère la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2y^2}{x^2+7y^4} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Calculer $f(x,ax)$ pour $a \in \mathbb{R}$ et $x \neq 0$.
b) Montrer que f n'est pas continue en $(0,0)$

Exercice 491. *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^2*
On considère la fonction F de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$F(x,y) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} & si\ x \neq y \\ f'(x) & si\ x = y \end{cases}$$

1°) Rappeler le théorème des accroissements finis
2°) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}^2$
3°) Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que F admet des dérivées partielles au point (a,a) et calculer $\vec{grad}(f)(a)$
4°) $(\star)$ F est-elle C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 492. $(\star)$ *Calculer la divergence et le laplacien en coordonnée polaire.*

Exercice 493. *Soit $n \geq 1$ et $||.||$ la norme euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$.*
Soit $\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & ||x||^2 \end{array}$
Etudier le le gradient de f.

Exercice 494. *Soit $n \geq 1$ et $||.||$ la norme euclidiene canonique de $\mathbb{R}^n$.*
Soit $\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & ||x|| \end{array}$
Etudier le le gradient de f.

Exercice 495. *a) Trouver f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ telle que :* $\nabla(f)(x,y) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ yx^2 \end{pmatrix}$

b) Trouver g de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ telle que : $\nabla(g)(x,y) = \begin{pmatrix} e^x y \\ e^x + 2y \end{pmatrix}$