

## Feuille d'exercices n°63 : chap. 22

**Exercice 496.** On pose  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = x^2 + y^2 + xy + 7$

Montrer que  $f$  admet un unique point critique et que  $f$  atteint en ce point critique un extremum global.

**Exercice 497.** On pose  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = x^3 + y^2$

Montrer que  $f$  admet un unique point critique et que  $f$  n'admet pas d'extremum local.

**Exercice 498.** On pose  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \begin{cases} f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y \\ g(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y + 1 \\ h(x, y) = x^3 + y^3 \\ k(x, y) = (x - y)^2 + (x + y)^3 \end{cases}$

Etudier les extremums locaux des fonctions ci-dessus.

**Exercice 499.** On pose  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = xy(1 - x - y)$  et  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \text{ et } x + y \leq 1\}$

Déterminer les extremums globaux de  $f$  sur  $D$

**Exercice 500.** On pose  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = x - y + x^3 + y^3$  et  $D = [0; 1]^2$

Déterminer les extremums globaux de  $f$  sur  $D$ .

**Exercice 501.** Soit  $f(x, y) = y^2 - x^2y + x^2$  et  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2\}$

1°) Représenter  $D$  et justifier que  $f$  admet un maximum et un minimum sur  $D$ .

2°) Déterminer les points critiques de  $f$  sur  $D$ .

3°) Déterminer le minimum et le maximum de  $f$  sur  $\partial D$

4°) En déduire le minimum et le maximum de  $f$  sur  $D$ .

**Exercice 502.** Soit  $g$  une fonction de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  de classe  $C^1$ .

On pose  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = g(2x - y, x + 3y)$ .

On veut résoudre l'équation aux dérivées partielles : (EDP)  $\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} + 2\frac{\partial f}{\partial y} = 0$

On notera  $u = 2x - y$  et  $v = x + 3y$ .

On a donc  $g(u, v) = f(x, y)$ .

On notera  $\frac{\partial g}{\partial u}$  et  $\frac{\partial g}{\partial v}$  les dérivées partielles de  $g$ .

a) Montrer que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  et calculer les dérivées partielles de  $f$  en fonction de celles de  $g$ .

b) Ecrire (EDP) en fonction de  $g$  et résoudre l'équation obtenue en  $g$ .

c) Donner des solutions de (E)