

## Feuille d'exercices n°64 : chap. 22

**Exercice 503.** On pose  $\Omega = ]0; +\infty[ \times ]0; \pi[$  et  $\forall (r, \theta) \in \Omega$   $\phi(r, \theta) = (x, y)$  avec  $x = r \cos(\theta)$  et  $y = r \sin(\theta)$ .

a) Déterminer  $U = \phi(\Omega)$ .

b) Montrer que :  $\phi$  est une bijection de classe  $C^1$  de  $\Omega$  dans  $U$  et exprimer  $\phi^{-1}$  (on utilisera la fonction arccos).

Montrer que  $\phi^{-1}$  est de classe  $C^1$ .

On cherche maintenant à résoudre sur  $U$  l'équation aux dérivées partielles :

$$(E) \Leftrightarrow x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 + y^2$$

c) Ecrire  $(E_0)$  l'équation homogène associée à  $(E)$  et trouver une solution particulière de  $(E)$ .

On va maintenant résoudre  $(E_0)$ . On suppose que  $f$  est une solution de  $(E_0)$  et on pose  $g = f \circ \phi$ .

d) Exprimer les dérivées partielles de  $f$  en fonction de celles de  $g$ .

e) En déduire une équation aux dérivées partielles  $(F)$  vérifiée par  $g$ .

f) Résoudre  $(F)$

g) En déduire les solutions de  $(E_0)$ .

h) Résoudre  $(E)$ .

**Exercice 504.** Soit  $c > 0$ . On considère l'équation aux dérivées partielles sur  $\mathbb{R}^2$  suivante :

$$E \Leftrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

On pose :  $\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2$   $\varphi(x, t) = (u, v)$  avec  $u = x + ct$  et  $v = x - ct$ .

a) Montrer que  $\varphi$  définit une bijection de classe  $C^2$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  et que la bijection réciproque de  $\varphi$  est  $C^2$ .

On suppose que  $f$  est une solution de  $E$ . On pose  $g = f \circ \varphi^{-1}$ .

b) Calculer les dérivées partielles premières de  $f$  en fonction de celle de  $g$ .

c) Calculer les dérivées partielles seconde de  $f$  en fonction de celle de  $g$ .

d) Déterminer une équation aux dérivées partielles  $F$  vérifiée par  $g$ .

e) Résoudre  $F$ .

f) Résoudre  $E$ .

g) Résoudre  $\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \\ f(0, t) = e^t \cos(t) + 2t \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0, t) = e^t (\cos(t) - \sin(t)) \end{cases}$

**Exercice 505.** Résoudre sur  $\mathbb{R}^2$ , en utilisant un changement de variable linéaire :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$