Feuille d'exercices n°65 : chap. 22

Exercice 506. *Soit φ une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$; on définit la fonction g sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ par $g(x,y) = \varphi(\frac{y}{x})$.*

1°) a) Justifier que g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et calculer ses dérivées partielles premières en fonction de φ'.
1°) b) Calculer les dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y)$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y)$ en fonction de φ' et φ''.

2°) Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$(1) \Leftrightarrow (1+t^2)x''(t) + 2tx'(t) = t$$

3°) On veut déterminer les fonctions φ pour lesquelles g vérifie l'équation aux dérivées partielles :

$$(2) \Leftrightarrow \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = \frac{y}{x^3} \ , \ (x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$$

a) Montrer que si g vérifie (2) alors φ vérifie l'équation différentielle (1).
b) En déduire l'expression de φ puis celle de g.
c) Vérifier que les fonctions trouvées ci-dessus sont effectivement solutions de (2).

Exercice 507. *Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique et du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on considère Γ la courbe d'équation cartésienne : $8x^2 - 12xy + 17y^2 = 20$*
a) Montrer que l'équation cartésienne de Γ peut s'écrire : $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ avec $A \in M_2(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle.
b) Diagonaliser A dans une base orthonormale $(\vec{u}, \vec{v})$.
c) Déterminer l'équation de Γ dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
d) Tracer Γ en utilisant une analogie avec un cercle.

Exercice 508. *Soit Σ la surface d'équation $x^2 + 4xy - 4xz + 4y^2 - 8yz + 4z^2 + 6x - 6y - 3z = 0$*
a) Déterminer $A \in M_3(\mathbb{R})$, symétrique, pour que Σ ait pour équation :
$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 6x - 6y - 3z = 0$
b) Diagonaliser A dans une base orthonormée $B' = (e_1, e_2, e_3)$
c) On note (X, Y, Z) les coordonnées dans le repère (O, B')
Exprimer X,Y et Z en fonctions de x,y et z.
d) Donner l'équation de Σ dans le repère (O, B')
e) Dessiner grossièrement l'allure de Σ