

Feuille d'exercices n°67 : Révisions

Exercice 512. Soit $n \geq 2$. On pose : $\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - \sum_{i=1}^n x_i$$

On cherche à étudier les éventuels extremums locaux de f .

1) Montrer que f admet un unique point critique que l'on notera Ω

2) Calculer la matrice Hessienne de f en tout point et en déduire A la matrice Hessienne de f en Ω .

3) Déterminer le spectre de A .

4) Que dire de f en Ω ?

Exercice 513. Calculer $A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(2n+1)}$

Exercice 514. On considère la série de fonctions $\sum f_n$ définie sur \mathbb{R}^+ par $f_n(x) = (-1)^n \frac{x}{n^2+x^2}$

On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ pour $x \geq 0$

a) Montrer que cette série de fonctions converge simplement sur $[0; +\infty[$.

b) Montrer que cette série de fonctions ne converge pas normalement sur $[0; +\infty[$.

c) Montrer que cette série de fonctions converge uniformément sur $[0; +\infty[$.

d) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

e) Montrer que f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^+

Exercice 515. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{k=0}^n \sin(k\theta)$

Exercice 516. On considère les nombres complexes suivants : $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = 1 + i$ et $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$

a) Écrire z_3 sous forme algébrique.

b) Écrire z_3 sous forme trigonométrique.

c) En déduire les valeurs exactes de $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$

Exercice 517. Résoudre dans \mathbb{C} : $e^z = 3\sqrt{3} - 3i$

Exercice 518. Résoudre dans \mathbb{C} : $z^2 + iz - \frac{1}{2} - \frac{i}{\sqrt{2}}$

Exercice 519. Linéariser $\cos^2(x)\sin^3(x)$

Exercice 520. Exprimer $\cos(4t)$ en fonction de $\cos(t)$ et $\sin(4t)$ avec une formule de la même forme.

Exercice 521.

E3A 2020 : EXERCICE 2

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que la matrice A est à diagonale propre lorsque son polynôme caractéristique est $\chi_A = \prod_{i=1}^n (X - a_{ii})$.

1. Donner deux exemples de matrices à diagonale propre qui ne sont pas diagonales.

2. Soient α et β deux réels et $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta \\ \alpha & \beta & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur les réels α et β pour que M soit une matrice à diagonale propre.

3. Soient X_1 , X_2 et X_3 des variables aléatoires mutuellement indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et qui suivent toutes les trois la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{3}$.

3.1. Préciser $X_1(\Omega)$. Donner la loi de la variable aléatoire X_1 et donner sans démonstration les valeurs de son espérance et de sa variance.

3.2. Exprimer l'évènement $(X_1 = X_2)$ sous forme d'une réunion dénombrable d'évènements incompatibles.

3.3. Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose:

$$B(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & X_1(\omega) - X_2(\omega) \\ 0 & 0 & X_2(\omega) - X_3(\omega) \\ X_1(\omega) - X_2(\omega) & X_2(\omega) - X_3(\omega) & 0 \end{pmatrix}.$$

On notera ainsi $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & X_1 - X_2 \\ 0 & 0 & X_2 - X_3 \\ X_1 - X_2 & X_2 - X_3 & 0 \end{pmatrix}$ la fonction qui, à tout ω de Ω , associe $B(\omega)$.

Déterminer la probabilité pour que B soit une matrice à diagonale propre.

4. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On rappelle que A^T désigne la matrice transposée de la matrice A .

4.1. Calculer $\text{tr}(A^T A)$ en fonction des coefficients de la matrice A où $\text{tr}(M)$ désigne la trace de la matrice M .

4.2. On suppose dans cette question que A est une matrice symétrique réelle.

Démontrer que $\text{tr}(A^T A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$ où les λ_i sont les n valeurs propres distinctes ou non de la matrice A .

4.3. Déterminer les matrices symétriques réelles à diagonale propre.

Exercice 522.

E3A PSI 2020 : EXERCICE 4

Soient E un plan vectoriel, $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une base de E et $\theta \in]0, \pi[$ fixé.

On considère l'endomorphisme f de E représenté par sa matrice C dans la base \mathcal{B} : $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

On définit alors sur E une forme bilinéaire symétrique Φ par les relations:

$$\Phi(\vec{i}, \vec{j}) = \Phi(\vec{j}, \vec{i}) = \cos(\theta) \text{ et } \Phi(\vec{i}, \vec{i}) = \Phi(\vec{j}, \vec{j}) = 1.$$

On rappelle qu'une forme bilinéaire sur E est une application de E^2 dans \mathbb{R} , linéaire par rapport à chacune des variables.

1. Soient $X = x_1\vec{i} + x_2\vec{j}$ et $Y = y_1\vec{i} + y_2\vec{j}$ deux vecteurs de E . Exprimer $\Phi(X, Y)$ en fonction des réels x_1, x_2, y_1, y_2 et θ .
2. Montrer que Φ est un produit scalaire sur E .
3. Prouver que f est une isométrie pour le produit scalaire Φ .
4. Déterminer un vecteur $\vec{k} \in E$ tel que (\vec{i}, \vec{k}) soit une base orthonormée pour Φ et que $\Phi(\vec{j}, \vec{k}) > 0$.
5. Expliciter la matrice de f dans la base (\vec{i}, \vec{k}) . Préciser la nature de f .
6. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Pour quelles valeurs de $\theta \in]0, \pi[$ a-t-on $f^m = \text{id}_E$?

Exercice 523. Soit E un \mathbb{C} espace vectoriel de dimension finie.

a) Soit $u \in L(E)$ et $\lambda \in \mathbb{C}^*$

Montrer que : $\ker(u^2 - \lambda^2 \text{Id}_E) = \ker(u - \lambda \text{Id}_E) \oplus \ker(u + \lambda \text{Id}_E)$

b) Soit $u \in L(E)$. Montrer que : u diagonalisable $\Rightarrow u^2$ diagonalisable.

Donner un contre exemple, montrant que la réciproque est fausse.

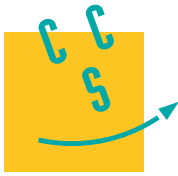
c) Soit $U \in E$ tel que u^2 est diagonalisable.

Montrer que : u diagonalisable $\Leftrightarrow \ker(u) = \ker(u^2)$

Exercice 524. On considère l'équation différentielle : $(E) \Leftrightarrow x(x-1)y''(x) + 3xy'(x) + y(x) = 0$
Chercher une solution développable en série entière en 0 puis résoudre (E) sur $]0, 1[$ avec la méthode de variation de la constante.

Exercice 525. Même exercice avec : $(E) \Leftrightarrow xy''(x) + 2y'(x) - xy(x) = 0$ sur $]0, +\infty[$

Exercice 526. Début de Centrale PC 2022, mathématiques 2 : polynôme de Lagrange



Ce sujet en trois parties étudie la convergence des polynômes d'interpolation de Lagrange sous différentes hypothèses et aborde le phénomène de Runge.

La partie I est consacrée à l'étude de deux familles de polynômes, les polynômes de Lagrange et les polynômes de Tchebychev.

La partie II donne des résultats généraux de convergence des polynômes d'interpolation de Lagrange pour des fonctions de classe C^∞ ; elle utilise également quelques résultats de la partie I.

Enfin la partie III présente le phénomène de Runge. Elle s'appuie sur les sous-parties III.A et III.B, qui portent sur une intégrale généralisée et sont indépendantes des parties I et II.

Notations

Si k_1 et k_2 sont deux entiers tels que $k_1 \leq k_2$, on note $\llbracket k_1, k_2 \rrbracket$ l'ensemble des entiers k tels que $k_1 \leq k \leq k_2$. Pour tout réel x , on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x .

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans \mathbb{R} de degré inférieur ou égal à n .

I Étude de deux familles de polynômes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et (a_1, \dots, a_n) une famille de n réels deux à deux distincts.

Pour tout i dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, on note L_i le polynôme de degré $n - 1$ défini par

$$L_i(X) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{X - a_j}{a_i - a_j}. \tag{I.1}$$

On dit que L_1, \dots, L_n sont les polynômes de Lagrange associés à a_1, \dots, a_n .

I.A – Polynômes de Lagrange

On définit l'application

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \begin{cases} \mathbb{R}_{n-1}[X] \times \mathbb{R}_{n-1}[X] & \rightarrow \mathbb{R} \\ (P, Q) & \mapsto \sum_{k=1}^n P(a_k)Q(a_k) \end{cases}$$

Q 1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Q 2. Montrer que, pour tout i et k dans $\llbracket 1, n \rrbracket$,

$$L_i(a_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Q 3. Montrer que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$,

$$\langle L_i, P \rangle = P(a_i).$$

Q 4. Montrer que la famille (L_1, \dots, L_n) est une base orthonormée de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Q 5. En déduire que, pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$,

$$P = \sum_{i=1}^n P(a_i)L_i.$$

Q 6. Montrer que, pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à $n - 2$,

$$\sum_{i=1}^n \frac{P(a_i)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (a_i - a_j)} = 0.$$

I.B – Polynômes de Tchebychev

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$T_n(X) = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^p \binom{n}{2p} X^{n-2p} (1-X^2)^p.$$

Q 7. En développant $(1+x)^n$ pour deux réels x bien choisis, montrer que

$$\sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2p} = 2^{n-1}.$$

Q 8. Montrer que T_n est un polynôme de degré n . Expliciter le coefficient dominant de T_n .

Q 9. Montrer que T_n est l'unique polynôme à coefficients réels vérifiant la relation

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$

Q 10. Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose $y_{k,n} = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)$. Montrer que

$$T_n(X) = 2^{n-1} \prod_{k=1}^n (X - y_{k,n})$$

I.C – Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et W un polynôme unitaire de degré n . L'objectif de cette sous-partie est de montrer que

$$\sup_{x \in [-1,1]} |W(x)| \geq \frac{1}{2^{n-1}} \tag{I.2}$$

puis d'étudier dans quel cas on a égalité.

Q 11. Montrer que $\sup_{x \in [-1,1]} |T_n(x)| = 1$. En déduire un polynôme unitaire de degré n réalisant le cas d'égalité dans (I.2).

On pose $Q = \frac{1}{2^{n-1}} T_n - W$ et, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $z_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

Q 12. Montrer que Q est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$.

Q 13. Dans cette question, on montre (I.2) par l'absurde.

— Si on suppose que $\sup_{x \in [-1,1]} |W(x)| < \frac{1}{2^{n-1}}$, montrer que, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $Q(z_k)Q(z_{k+1}) < 0$.

— En déduire une contradiction et conclure.

On suppose maintenant que $\sup_{x \in [-1,1]} |W(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}$.

Q 14. Montrer que, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$\frac{Q(z_k)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n (z_k - z_j)} \geq 0.$$

Q 15. En déduire que $Q = 0$, puis que $W = \frac{1}{2^{n-1}} T_n$.

On pourra considérer la somme des inégalités de la question précédente et exploiter la question 6 appliquée à des données convenables.

II Interpolation et convergence des polynômes d'interpolation pour une fonction de classe \mathcal{C}^∞

II.A – Interpolation d'une fonction de classe \mathcal{C}^n

Dans cette sous-partie, n est un entier naturel non nul et I est un segment $[a, b]$, où $a < b$. On considère n nombres réels distincts $a_1 < \dots < a_n$ de I .

On note L_1, \dots, L_n les polynômes de Lagrange associés à a_1, \dots, a_n définis par (I.1) et on note $W = \prod_{i=1}^n (X - a_i)$.

Exercice 527. Trouver tout les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que : $P(X^2) = P(X)P(X + 1)$

Exercice 528. Trouver les racines de $P = X^4 + 12X - 5$ sachant que la somme de deux de ces racines vaut 2.

Exercice 529. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme : $P = X^5 - X^4 + X - 1$

Exercice 530. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ $P = X^4 + 4$

Exercice 531. On cherche les polynômes non constant de $C[X]$ tel que : $P(X^2) = P(X)P(X - 1)$

a) Montrer que 0 n'est pas racine de P

b) Montrer que les racines non nuls de P vérifient $|\lambda| = |\lambda + 1| = 1$

c) Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{C}^*$ et $(n, m) \in \mathbb{N}$ tel que : $P(X) = a(X - j)^n(X - j^2)^m$ avec $j = \exp(\frac{2i\pi}{3})$

d) Finir de répondre au problème.

Exercice 532. a) Montrer que si $P \in \mathbb{R}[X]$ et $P \neq O_{\mathbb{R}[X]}$ alors $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - X$

b) Résoudre dans \mathbb{C} : $(z^2 + 3z + 1)^2 + 3z^2 + 8z + 4 = 0$

Exercice 533. On pose $\forall P \in K[X]$ $\phi(P) = (2X + 1)P - (X^2 - 1)P'$

1°) Montrer que $\Phi \in L(K[X])$

2°) Déterminer les éléments propres de Φ

Exercice 534. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $A^3 - A - I_n = 0_{M_n(\mathbb{C})}$. Montrer que $\det(A) > 0$

Exercice 535. Soit $M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a - b - c & 2a & 2a \\ 2b & b - a - c & 2b \\ 2c & 2c & c - a - b \end{pmatrix}$

a) On suppose que $x + y + z = 0$, calculer $M(a, b, c) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

b) $M(a, b, c)$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 536. Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 537. Soit E un K espace vectoriel de dimension finie et $u \in L(E)$ tel que : $u \circ u = -Id_E$
Montrer qu'il existe une base B de E telle que la matrice de u relativement à B soit une matrice diagonale par blocs avec les blocs $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sur la diagonale.

Exercice 538. Déterminer la nature de $\sum u_n$ avec $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$

Exercice 539. Déterminer a et b pour que la série de terme général : $u_n = \ln(n) + a \ln(n + 1) + b \ln(n + 2)$ soit convergente.

Calculer alors la somme de cette série.

Exercice 540. On définit la suite (u_n) par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = \frac{\exp(-u_n)}{1+n}$
Etudier la suite (u_n) puis la série $\sum u_n$