

Question de cours

1°) et 2°) Voir cours sur cahier-prépa

3°) f est continue sur $]0, +\infty[$. I pose problème en 0 et $+\infty$

Au voisinage de 0 : $f(t) \sim \ln(t)$

Or d'après le cours, $t \mapsto \ln(t)$ est intégrable sur $]0, 1]$ et donc, par équivalent, f est intégrable sur $]0, 1]$

Au voisinage de $+\infty$: $\frac{f(t)}{\frac{1}{t^2}} = \frac{\ln(t)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$

On a donc $f(t) = o(\frac{1}{t^2})$. Comme d'après le cours, $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, on a, par négligeabilité f est intégrable sur $[1, +\infty[$

f est intégrable sur $]0, 1$ et $[1, +\infty[$ donc sur $]0, +\infty[$ et donc I est convergente.

Problème 1

1°) $t \mapsto e^{-t}R(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$.

L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}R(t)dt$ pose donc problème uniquement en $+\infty$.

De plus $\frac{e^{-t}R(t)}{e^{-t/2}} = e^{-t/2}R(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ par comparaison exp-puissance, donc $e^{-t}R(t) = o(e^{-t/2})$ au voisinage de $+\infty$.

Comme $t \mapsto e^{-t/2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, alors, par négligeabilité $t \mapsto e^{-t}R(t)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$

On en déduit que : $\int_0^{+\infty} e^{-t}R(t)dt$ est convergente.

2°) • Soit $k \in \mathbb{N}$.

Pour $a > 0$, on fait une intégration par partie pour avoir :

$$\int_0^a t^k e^{-t} dt = \left[\frac{t^{k+1}}{k+1} e^{-t} \right]_0^a - \int_0^a \frac{t^{k+1}}{k+1} (-e^{-t}) dt$$

$$\Rightarrow \int_0^a t^k e^{-t} dt = \frac{a^{k+1}}{k+1} e^{-a} + \frac{1}{k+1} \int_0^a t^{k+1} e^{-t} dt$$

Comme les intégrales sont convergentes, on peut faire tendre a vers $+\infty$ pour obtenir :

$$I_k = 0 + \frac{I_{k+1}}{k+1} \text{ autrement dit : } \forall k \in \mathbb{N}, I_{k+1} = (k+1)I_k$$

• On a : $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1$

On reconnaît la formule de récurrence définissant la factorielle (on peut aussi faire une récurrence) et on a : $\forall k \in \mathbb{N}, I_k = k!$

3°) On sait que les intégrales sont convergentes avec le 1°) et par linéarité de l'intégrale on a :

$$\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}dt = \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^n p_k t^k e^{-t} dt = \sum_{k=0}^n p_k \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = \sum_{k=0}^n p_k k! \quad (\text{On a utilisé le 2°)})$$

$$\text{Donc : } \boxed{\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}dt = \sum_{k=0}^n p_k k!}$$

4°) Soit $(P, Q, R) \in E^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

i) $\langle P, Q + \lambda R \rangle = \int_0^{+\infty} e^{-t} P(t)(Q(t) + \lambda R(t)) dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} P(t) Q(t) dt + \lambda \int_0^{+\infty} e^{-t} P(t) R(t) dt$ car les intégrales sont convergentes et donc $\langle P, Q + \lambda R \rangle = \langle P, Q \rangle + \lambda \langle P, R \rangle$

ii) On a : $\langle P, Q \rangle = \langle Q, P \rangle$, évident par commutativité de la multiplication dans \mathbb{R} .

iii) $\langle P, P \rangle = \int_0^{+\infty} e^{-t} P(t)^2 dt \geq 0$ car $\forall t \geq 0, e^{-t} P(t)^2 \geq 0$ et par positivité de l'intégrale.

iv) $\langle P, P \rangle = 0 \Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-t} P(t)^2 dt = 0$

Mais $t \mapsto e^{-t} P(t)^2$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$.

Donc par le théorème de l'intégrale nulle, on a $\forall t \geq 0, e^{-t} P(t)^2 = 0$ et donc $P(t) = 0$

P est alors un polynôme ayant une infinité de racines et donc $P = 0_E$

$$\text{On a alors : } \forall (P, Q, R) \in E^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} i) \langle P, Q + \lambda R \rangle = \langle P, Q \rangle + \lambda \langle P, R \rangle \\ ii) \langle P, Q \rangle = \langle Q, P \rangle \\ iii) \langle P, P \rangle \geq 0 \\ iv) \langle P, P \rangle = 0 \implies P = 0_E \end{cases} \quad \text{et on en}$$

déduit que : $\boxed{\langle, \rangle \text{ est un produit scalaire sur } E.}$

$$\begin{aligned} 5^\circ) \text{ a) } & \|1 + R_a\|^2 \\ &= \langle 1 + R_a, 1 + R_a \rangle \\ &= \int_0^{+\infty} (1 + R_a(t))^2 e^{-t} dt \\ &= \int_0^{+\infty} (1 + at)^2 e^{-t} dt \\ &= \int_0^{+\infty} (1 + 2at + a^2 t^2) e^{-t} dt \\ &= A_0 + 2aA_1 + a^2 A_2 \\ &= 1 + 2a + 2a^2 \end{aligned}$$

On pose $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $a \mapsto 1 + 2a + 2a^2$

f est C^1 sur \mathbb{R} et $f'(a) = 2 + 4a = 2(1 + 2a)$

On a donc le tableau de variation suivant :

$f'(a)$	$-\infty$	$-$	$\frac{-1}{2}$	$+$	$+\infty$
f	$+\infty$	\searrow	$\frac{1}{2}$	\nearrow	$+\infty$

En prenant la racine on peut minimiser $\|1 + R_a\| = \sqrt{f(a)}$ On a donc :

$\boxed{\text{La valeur pour que } \|1 + R_a\| \text{ soit minimum est } a = \frac{-1}{2} \text{ et le minimum vaut alors } \frac{\sqrt{2}}{2}}$

$$5^\circ) \text{ b) } \langle R_a, R_a + 1 \rangle = \int_0^{+\infty} (at)(1+at)e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} (at + a^2 t^2)e^{-t} dt = aA_1 + a^2 A_2 = a + 2a^2$$

Si $a = \frac{-1}{2}$ alors $\langle R_a, R_a + 1 \rangle = \frac{-1}{2} + 2\frac{1}{4} = 0$ et donc :

pour la valeur de a minimisant $\|1 + R_a\|$, les polynômes R_a et $R_a + 1$ sont orthogonaux.

6°) a) Par définition de Q_n : $-1 - Q_n = -(1 + Q_n)$ est orthogonal à tous vecteur de V_n , donc $(1 + Q_n)$ est orthogonal à tous vecteur de V_n et en particulier à X^k

donc $\langle 1 + Q_n, X^k \rangle = 0$ et donc $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \int_0^{+\infty} (1 + Q_n(x))x^k e^{-x} dx = 0$

6°) b) On a aussi :

$$\int_0^{+\infty} (1 + Q_n(x))x^k e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} (1 + \sum_{i=1}^n q_i x^i)x^k e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} (x^k + \sum_{i=1}^n q_i x^{i+k})e^{-x} dx = k! + \sum_{k=1}^n q_i (i+k)!$$

Mas on remarque que : $P_n(k) = 1 + q_1(k+1) + q_2(k+1)(k+2) + \dots + q_n(k+1)(k+2)\dots(k+n)$

Donc : $k!P_n(k) = k! + q_1 k!(k+1) + q_2 k!(k+1)(k+2) + \dots + q_n k!(k+1)(k+2)\dots(k+n)$

Donc : $k!P_n(k) = k! + q_1 k!(k+1)! + q_2 k!(k+2)! + \dots + q_n (k+n)!$

En identifiant on a : $\int_0^{+\infty} (1 + Q_n(x))x^k e^{-x} dx = k!P_n(k)$, puis en utilisant le 6°)a) et $k! \neq 0$ on en déduit $P_n(k) = 0$. On a donc : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, P_n(k) = 0$

7°) D'après sa définition on voit que P_n est un polynôme de degré au plus n de coefficient en X^n : $q_n X^n$

De plus le 6°)b) permet de voir que P_n admet n racines : $1, 2, \dots, n$: on en déduit :

$$P_n(X) = q_n(X-1)(X-2)\dots(X-n)$$

8°) Avec la première expression de P_n : $P_n(-1) = 1 + 0 + 0 + \dots + 0$ donc $P_n(-1) = 0$

Avec l'expression du 7°) : $P_n(-1) = q_n(-1)^n(n+1)!$

donc $q_n(-1)^n(n+1)! = 1$ et donc $q_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)!}$

9°) On remarque que $m(n)$ est la distance du polynôme constant -1 à V_n , donc, par le théorème de projection orthogonale : $m(n) = \|1 + Q_n\|$

10°) a) $Q_n \in V_n$ et par définition de Q_n , comme à la question 6°)a) : $\langle 1 + Q_n, Q_n \rangle = 0$

10°) b) On a alors :

$$\begin{aligned} & \|1 + Q_n\|^2 \\ &= \langle 1 + Q_n, 1 + Q_n \rangle \\ &= \underbrace{\langle 1 + Q_n, Q_n \rangle}_{=0} + \langle 1 + Q_n, 1 \rangle \text{ par 10°)a)} \\ &= \langle 1 + q_1 X + q_2 X^2 + \dots + Q_n X^n, 1 \rangle \text{ on utilise le 3°)} \\ &= 1 + q_1 + q_2 2! + \dots + q_n n! \text{ on utilise la première expression de } P_n \\ &= P_n(0) \text{ on utilise maintenant l'expression du 7°)} \\ &= q_n(-1)^n n! \text{ on utilise le 8°)} \\ &= \frac{(-1)^n}{(n+1)!} (-1)^n n! = \frac{1}{n+1} \text{ et on a donc } \|\langle 1 + Q_n, 1 + Q_n \rangle\| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \end{aligned}$$

Bilan : $\forall n \in \mathbb{N}^*, m(n) = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

Problème 2

1°) $t \mapsto \exp(-t^2)$ est continue sur $[0, +\infty[$. G ne pose donc problème qu'en $+\infty$

On a au voisinage de $+\infty$, par comparaison exponentielle-puissance : $\exp(-t^2) = o(\frac{1}{t^2})$

puisque $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\exp(-t^2)}{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 \exp(-t^2) = 0$

Mais $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ par Riemann, donc par négligeabilité $t \mapsto \exp(-t^2)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$

Comme il n'y a pas de problème sur $[0, 1]$, $t \mapsto \exp(-t^2)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et par absolue

convergence $G = \int_0^{+\infty} \exp(-t^2) dt$ est convergente.

$$2^\circ) W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2} \quad W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) dt = [\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

Bilan : $W_0 = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = 1$

$$3^\circ) \text{ Pour } n \geq 2 : W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1}(t) \cos(t) dt$$

On fait une intégration par parties avec des fonctions dérivables :

$$W_n = [\cos^{n-1}(t) \sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)(-\sin(t)) \cos^{n-2}(t) \sin(t) dt$$

$$W_n = 0 + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2(t)) \cos^{n-2}(t) dt = (n-1)(W_{n-2} - W_n)$$

Et donc : $\forall n \geq 2, nW_n = (n-1)W_{n-2}$

$$4^\circ) \bullet \text{ Pour } n \in \mathbb{N}^* ; W_{n+1} - W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}(t) dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)(\cos(t) - t) dt$$

Mais $\cos^n(t)(\cos(t) - t) \leq 0$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ donc $W_{n+1} - W_n \leq 0$ et donc (W_n) est décroissante.

• Comme (W_n) est décroissante, on a pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} & W_{n+2} \leq W_{n+1} \leq W_n \text{ on remarque que } W_n > 0 \\ \Rightarrow & \frac{W_{n+2}}{W_n} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1 \text{ on utilise la relation de } 3^\circ \text{ (décalée)} \\ \Rightarrow & \underbrace{\frac{n+2}{n}}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1 \end{aligned}$$

Par encadrements : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1$ et donc, par définition : $W_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} W_n$

5°) $\theta_{n+1} - \theta_n = (n+2)W_{n+2}W_{n+1} - (n+1)W_{n+1}W_n = W_{n+1}((n+2)W_{n+2} - (n+1)W_n) = 0$ d'après la relation de récurrence du 3°).

Donc (θ_n) est constante et vaut $\theta_0 = W_1 W_0 = \frac{\pi}{2}$

6°) D'après le 5°) : $(n+1)W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2}$ mais $W_{n+1} \sim W_n$ et $n+1 \sim n$ donc : $nW_n^2 \sim \frac{\pi}{2}$ et comme $W_n > 0$ on a : $W_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$

7°) a) Posons $\forall x \in]-1, +\infty[$, $a(x) = x - \ln(1+x)$
 Alors a est dérivable sur $] - 1, +\infty[$ et $\forall x \in] - 1, +\infty[$, $a'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$

x	-1	0	$+\infty$
$a'(x)$		-	+
$a(x)$	$+\infty$	\searrow	\nearrow
		0	

On a donc le tableau de variation suivant :

D'après le tableau de variation on a : $\forall x \in] - 1, +\infty[$, $a(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(1+x) \leq x$

7°) b) i) Soit $t \in [0; \sqrt{n}[$ alors $x = \frac{-t^2}{n} > -1$ et on peut appliquer le a)
 On obtient : $\ln(1 - \frac{t^2}{n}) \leq -\frac{t^2}{n} \Rightarrow n \ln(1 - \frac{t^2}{n}) \leq -t^2$ et en composant par exponentielle qui est croissante,
 on obtient : $(1 - \frac{t^2}{n})^n \leq \exp(-t^2)$
 On remarque que l'inégalité est aussi vraie pour $t = \sqrt{n}$ car $0 \leq \exp(-n)$

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in [0; \sqrt{n}]$, $(1 - \frac{t^2}{n})^n \leq \exp(-t^2)$

7°) b) ii) Soit $t \in [0; \sqrt{n}]$ alors $x = \frac{t^2}{n} > -1$ et on peut appliquer le a)
 On obtient : $\ln(1 + \frac{t^2}{n}) \leq \frac{t^2}{n} \Rightarrow n \ln(1 + \frac{t^2}{n}) \leq t^2$ et en composant par exponentielle qui est croissante,
 on obtient : $(1 + \frac{t^2}{n})^n \leq \exp(t^2)$
 En prenant l'inverse qui est décroissante sur $]0; +\infty[$, on obtient $\exp(-t^2) \leq (1 + \frac{t^2}{n})^{-n}$

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in [0; \sqrt{n}]$, $\exp(-t^2) \leq (1 + \frac{t^2}{n})^{-n}$

7°) c) i) La fonction sous l'intégrale de v_n est continue sur $[0, +\infty[$ et ne pose problème que en $+\infty$.

$$(1 + \frac{t^2}{n})^{-n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2n}} > 0$$

Comme $n \in \mathbb{N}^*$ alors $2n > 1$ et donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{2n}} dt$ est convergente.

Par la règle de l'équivalent on a donc $\int_1^{+\infty} (1 + \frac{t^2}{n})^{-n} dt$ qui est convergente, et comme il n'y a pas de problème sur $[0; 1]$ alors v_n est convergente.

7°) c) ii) En intégrant la relation du 7°) b) i) entre 0 et \sqrt{n} on obtient directement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq I_n$$

En intégrant la relation du 7°) b) ii) entre 0 et \sqrt{n} on obtient directement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n \leq \int_0^{\sqrt{n}} (1 + \frac{t^2}{n})^{-n} dt$$

7°) c) iii) $\int_{\sqrt{n}}^{+\infty} (1 + \frac{t^2}{n})^{-n} dt \geq 0$ comme intégrale d'une fonction positive.

$$\text{Donc } \int_0^{\sqrt{n}} (1 + \frac{t^2}{n})^{-n} dt \leq \int_0^{+\infty} (1 + \frac{t^2}{n})^{-n} dt = v_n$$

On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq I_n \leq v_n$

$$8^\circ) \text{ a) } u_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt$$

On effectue le changement de variable $t = \sqrt{n}\sin(x) \Leftrightarrow x = \arcsin\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$, alors $dt = \sqrt{n}\cos(x)dx$

$$\text{Alors : } u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2(x))^n \sqrt{n}\cos(x)dx = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}(x)dx$$

$$\text{On a donc } \boxed{u_n = \sqrt{n}W_{2n+1}}$$

$$8^\circ) \text{ b) } v_n = \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt$$

On effectue le changement de variable C^1 bijectif : $t = \sqrt{n}\tan(x) \Leftrightarrow x = \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$, alors $dt = \sqrt{n}(1 + \tan^2(x))dx$

$$\text{Alors : } v_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \tan^2)^{-n} \sqrt{n}(1 + \tan^2(x))dx$$

En utilisant la relation rappeler dans l'énoncé, on obtient :

$$v_n = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2}(x)dx = W_{2n-2}$$

$$\text{On a donc } \boxed{\forall n \geq 1, v_n = \sqrt{n}W_{2n-2}}$$

$$8^\circ) \text{ c) D'après 2°) c) iii) : } u_n \leq I_n \leq v_n$$

On y reporte les résultats du 8°) b) et du 8°) c) , on obtient :

$$\sqrt{n}W_{2n+1} \leq I_n \leq \sqrt{n}W_{2n-2}$$

$$\text{Mais } \sqrt{n}W_{2n-2} \sim \sqrt{n} \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\text{et } \sqrt{n}W_{2n-2} \sim \sqrt{n} \sqrt{\frac{\pi}{2(2n-2)}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\text{et donc par encadrement } \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\text{Comme } G = \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n \text{ alors } \boxed{G = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$