Problème 1 : d'après Centrale TSI 2023 : mathématiques 1

Q1) Si f appartient à E alors, par définition, f est intégrable sur $]0,+\infty[$, donc

par absolue convergence : $\boxed{\int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt \text{ est convergente.}}$

Q2) D'après Q1) : $\mathcal{L}$ est bien définie. Il reste à montrer la linéarité.
Soit $(f,g) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
On pose $F = \mathcal{L}(f)$, $G = \mathcal{L}(g)$ et $H = \mathcal{L}(f+\lambda g)$
Pour commencer $f + \lambda g \in E$ car E est un sous-espace vectoriel.
Par définition : $\forall p > 0\ ,\ H(p) = \int\limits_0^{+\infty} (f+\lambda g)(t)e^{-pt}dt = \int\limits_0^{+\infty} (f(t)+\lambda g(t))e^{-pt}dt = \int\limits_0^{+\infty} f(t)dt + \lambda \int\limits_0^{+\infty} g(t)dt$
Car toutes les intégrales sont convergentes. On a donc : $H(p) = F(p) + \lambda G(p) = (F + \lambda G)(p)$
Comme ce résultat est valable pour tout $p > 0$, on a : $H = F + \lambda G$ et donc $\mathcal{L}(f + \lambda g) = \mathcal{L}(f) + \lambda \mathcal{L}(g)$

Bilan : $\boxed{\mathcal{L} \text{ est bien une application linéaire.}}$

Q3) f_n est continue sur $[0,+\infty[$, il reste à montrer que pour tout $p > 0$:
$\int\limits_0^{+\infty} |f_n(t)|\, e^{-pt}dt = \int\limits_0^{+\infty} t^n e^{-pt}dt$ est convergente.

Comme $t \mapsto t^n e^{-pt}$ est continue sur $[0,+\infty[$ alors l'intégrale ne pose problème que en $+\infty$.
Mais $\frac{t^n e^{-pt}}{e^{\frac{-p}{2}t}} = t^n e^{\frac{-p}{2}t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $t^n e^{-pt} = |f_n(t)|\, e^{-pt} = o(e^{\frac{-p}{2}t})$ au voisinage de $+\infty$
Par négligeabilité, comme $t \mapsto e^{\frac{-p}{2}t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$, on a : $t \mapsto |f_n(t)|\, e^{-pt}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ donc $\int\limits_0^{+\infty} |f_n(t)|\, e^{-pt}dt$ est convergente et donc $\boxed{f_n \in E}$

Q4) • Soit $p > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. $F_n(p) = \int\limits_{n=0}^{+\infty} t^n e^{-pt}$
Comme $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1} e^{-pt} = 0$, on peut faire une intégration par parties et on a :
$F_n(p) = \int\limits_{n=0}^{+\infty} t^n e^{-pt} = [\frac{t^{n+1}}{n+1} e^{-pt}]_0^{+\infty} + \int\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1} p e^{-pt}dt$
et donc $F_n(p) = \frac{p}{n+1} F_{n+1}(p)$ ou encore $F_{n+1}(p) = \frac{n+1}{p} F_n(p)$

• $F_0(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}dt = [-\frac{e^{-pt}}{p}]_0^{+\infty} = \frac{1}{p}$

• Avec les deux calculs précédent on va pouvoir démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que :
$\forall p > 0\ ,\ F_n(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$

Initialisation : Au rang $n = 0$: $F_n(p) = \frac{n!}{p^{n+1}} \Leftrightarrow F_0(p) = \frac{1}{p}$ ce que l'on vient de montrer.

Hérédité : Si on suppose la propriété vraie au rang n.
Alors par le calcul précédent :
$F_{n+1}(p) = \frac{n+1}{p} F_n(p) = \frac{n+1}{p} \frac{n!}{p^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{n^{p+2}}$ qui est bien la formule au rang $n+1$

Conclusion : on a montrer par récurrence que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \forall p > 0\ ,\ F_n(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}}$

Q5) • $g_{a,b}$ et $h_{a,b}$ sont bien continues sur $[0,+\infty[$.
De plus $|g_{a,b}(t)| \leq e^{-at} \leq 1$ et donc $\forall p > 0\ ,\ 0 \leq |g_{a,b}(t)|\, e^{-pt} \leq e^{-pt}$
D'après le cours $t \mapsto e^{-pt}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$, donc, par comparaison : $t \mapsto |g_{a,b}(t)|\, e^{-pt}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et donc $\int\limits_0^{+\infty} |g_{a,b}(t)|\, e^{-pt}dt$ est convergente.
On en déduit que : $g_{a,b} \in E$

On démontre de même que $h_{a,b} \in E$

On a donc : $\boxed{g_{a,b} \in E \text{ et } h_{a,b} \in E}$

• Pour calculer les transformées de Laplace de ces fonctions on va passer par les complexes.
Son sait que : $g_{a,b} + ih_{a,b}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$. On a alors :

$$G_{a,b}(p) + iH_{a,b}(p)$$
$$= \int\limits_0^{+\infty} (f_{a,b}(t) + ig_{a,b}(t))e^{-pt}dt$$
$$= \int\limits_0^{+\infty} e^{-at}e^{ibt}e^{-pt}dt$$
$$= \int\limits_0^{+\infty} e^{(-(a+p)+ib)t}dt$$
$$= [\tfrac{e^{(-(a+p)+ib)t}}{-(a+p)+ib}]_0^{+\infty}$$
$$= \lim_{t\to+\infty} \tfrac{e^{(-(a+p)+ib)t}}{-(a+p)+ib} + \tfrac{1}{(a+p)-ib} \text{ on utilise } a+p>0$$
$$= 0 + \tfrac{a+p+ib}{(a+p)^2+b^2}$$

On a donc : $\boxed{\begin{array}{ccccc} G_{a,b} & : &]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & p & \longmapsto & \frac{a+p}{(a+p)^2+b^2} \end{array} \text{ et } \begin{array}{ccccc} H_{a,b} & : &]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & p & \longmapsto & \frac{b}{(a+p)^2+b^2} \end{array}}$

Q6) a) Si f est continue et bornée sur $\mathbb{R}$ alors $\exists M > 0\ ,\ \forall t \geq 0\ ,\ |f(t)| \leq M$
Donc $\forall p > 0\ ,\ 0 \leq |f(t)|\, e^{-pt} \leq Me^{-pt}$
Comme d'après le cours $\int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}dt$ est convergente, alors par comparaison : $\int\limits_0^{+\infty} |f(t)|\, e^{-pt}dt$ est convergente et donc $f \in E$

Bilan : $\boxed{\text{Si } f \text{ est continue et bornée sur } \mathbb{R} \text{ alors } f \in E}$

Q6) b) Considérons $\begin{array}{ccccc} \varphi & : & [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \longmapsto & e^t \end{array}$.
Alors φ est continue et sur $[0,+\infty[$ mais $\varphi \notin E$ car $\int\limits_0^{+\infty} |f(t)|\, e^{-t}dt = \int\limits_0^{+\infty} 1dt$ est divergente.

Q7) Comme f et f' sont dans E on peut considérer $\mathcal{L}(f)$ et $\mathcal{L}(f')$. Pour $p>0$ on a :
$\mathcal{L}(f')(p)$
$= \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt$ on peut intégrer par parties car $\lim_{t\to+\infty} f'(t)e^{-pt}=0$
$= [f(t)e^{-pt}]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} f(t)(-pe^{-pt})dt$
$= 0 - f(0) + p\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$

On a donc : $\boxed{\forall p>0\ ,\ \mathcal{L}(f')(p) = p\mathcal{L}(f)(p) - f(0)}$

Q8) Vu les hypothèses ajoutées à f on peut utiliser Q7) pour f et pour f', ce qui donne pour $p>0$:
$$\begin{cases} \mathcal{L}(f')(p) = p\mathcal{L}(f)(p) - f(0) \\ \mathcal{L}(f'')(p) = p\mathcal{L}(f')(p) - f'(0) \end{cases} \Rightarrow \mathcal{L}(f'')(p) = p\Big(p\mathcal{L}(f)(p) - f(0)\Big) - f'(0) = p^2\mathcal{L}(f)(p) - pf(0) - f'(0)$$
On a donc : $\boxed{\forall p>0\ ,\ \mathcal{L}(f'')(p) = p^2\mathcal{L}(f)(p) - f(0)p - f'(0)}$

Q9) Comme $f\in E$ alors f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et donc $s\mapsto f(s)e^{-s}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
Alors g est une primitive d'une fonction continue donc :
$\boxed{g \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}^+ \text{ et } \forall t\in\mathbb{R}^+\ ,\ g'(t) = f(t)e^{-t}}$

Q10) $f\in E \Rightarrow \mathcal{L}(f)(1) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-t}dt$ est convergente.
On a donc $\lim_{t\to+\infty} g(t)$ qui existe et $\lim_{t\to+\infty} g(t) = \mathcal{L}(f)(1)$
On a $\begin{cases} g \text{ est continue sur } \mathbb{R}^+ \\ \lim_{t\to+\infty} g(t)\in\mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \boxed{g \text{ est bornée sur } \mathbb{R}^+}$

Q11) • D'après Q6)a) $g\in E$ on a donc $\boxed{\text{l'existence de } \mathcal{L}(g)(p)}$

• Comme g est bornée on a : $\lim_{t\to+\infty} g(t)\frac{e^{-pt}}{-p} = 0$ et on peut donc faire l'intégration par partie suivante :
$\mathcal{L}(g)(p) = \int_0^{+\infty} g(t)e^{-pt}dt$
$= [g(t)\frac{e^{-pt}}{-p}]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} g'(t)\frac{e^{-pt}}{-p}dt$ on utilise que $g'(t) = f(t)e^{-t}$
$= 0 - g(0) + \frac{1}{p}\int_0^{+\infty} f(t)e^{-t}e^{-pt}dt$ on remarque que $g(0)=0$
$= \frac{1}{p}\int_0^{+\infty} f(t)e^{-(p+1)t}dt$
$= \frac{1}{p}\mathcal{L}(f)(p+1)$

On a bien : $\boxed{\forall p>0\ ,\ \mathcal{L}(g)(p) = \frac{1}{p}\mathcal{L}(f)(p+1)}$

Q12) • $\begin{cases} u\mapsto -ln(u) \text{ est continue sur }]0,1] \text{ à valeurs dans } \mathbb{R}^+ \\ g \text{ est continue sur } \mathbb{R}^+ \end{cases}$ donc, par composition de fonctions continues, φ est continue sur $]0,1]$

• Il reste à montrer la continuité de φ en $u = 0$

$\varphi(u) = \int\limits_0^{-ln(u)} f(t)e^{-t}dt$ et comme $\int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-t}dt$ est convergente et que $ln(u) \underset{u\to 0}{\longrightarrow} +\infty$

alors $\lim\limits_{u\to 0} \varphi(u) = \int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-t}dt = \varphi(0)$

• Conclusion : $\boxed{\varphi \text{ est continue sur } [0,1]}$

Q13) Dans $\mathcal{L}(g)(p) = \int\limits_0^{+\infty} g(t)e^{-pt}dt$ qui est convergente car g bornée, on effectue le changement de variable C^1 bijectif (car $p > 0$) : $u = e^{-t}$

On a $du = -e^{-t}dt \Rightarrow dt = \frac{-du}{u}$, $t = -ln(u)$, si $t = 0$ alors $u = 1$, $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t} = 0$, $e^{-pt} = (e^{-t})^p = u^p$

Donc $\int\limits_0^{+\infty} g(t)e^{-pt}dt = \int\limits_1^{0} g(-ln(u))u^p(\frac{-du}{u}) = \int\limits_0^{1} g(-ln(u))u^{p-1}du$

On a donc bien : $\boxed{\forall p > 0 \ , \ \int\limits_0^{+\infty} g(t)e^{-pt}dt = \int\limits_0^{1} g(-ln(u))u^{p-1}du}$

Q14) • Soit $n \in \mathbb{N}$.

En posant $p = n + 1 > 0$ dans la question Q13) on a : $\mathcal{L}(g)(n + 1) = \int\limits_0^{1} g(-ln(u))u^n du$

En utiisant Q11) on a : $\mathcal{L}(g)(n + 1) = \frac{1}{n+1}\mathcal{L}(f)(n + 2) = \int\limits_0^{1} g(-ln(u))u^n du$

Mais, comme $\mathcal{L}(f) = 0$ alors $\mathcal{L}(f)(n + 2) = 0$ et donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \ , \ \int\limits_0^{1} g(-ln(u))u^n du = 0}$

• Soit $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$.

Alors : $\int\limits_0^{1} g(-ln(u))P(u)du = \int\limits_0^{1} g(-ln(u)) \sum\limits_{k=0}^{n} a_k u^k du = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \underbrace{\int\limits_0^{1} g(-ln(u))u^k du}_{=0} = 0$

En utilisant la linéarité de l'intégrale, on a montrer que : $\boxed{\forall P \in \mathbb{R}[X] \ , \ \int\limits_0^{1} g(-ln(u))P(u)du = 0}$

Q15) D'après le résultat admis, comme φ est une fonction continue sur le segment $[0,1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors il existe une suite $(P_n)_{n\geq 1}$ de fonctions polynomiales telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sup\limits_{t\in[0,1]} |\varphi(t) - P_{\mathrm{n}}(t)| \right) = 0$

Posons : $M_n = \sup\limits_{t\in[0,1]} |\varphi(t) - P_{\mathrm{n}}(t)|$ (qui est bien définit comme le sup d'une fonction continue sur un segment).

On a alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n = 0$

On a : $\left|\int\limits_0^1 P_n(t)\varphi(t)dt - \int\limits_0^1 \varphi(t)^2 dt\right|$

$= \left|\int\limits_0^1 \big(P_n(t)-\varphi(t)\big)\varphi(t)dt\right|$ on utilise l'inégalité de la moyenne

$\leq \int\limits_0^1 |P_n(t)-\varphi(t)|\,|\varphi(t)|\,dt$ on utilise la définition de M_n

$\leq \int\limits_0^1 M_n\,|\varphi(t)|\,dt$

$\leq M_n \underbrace{\int\limits_0^1 |\varphi(t)|\,dt}_{constante}$

Et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n = 0$, alors, par comparaison : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\Big(\int\limits_0^1 P_n(t)\varphi(t)dt - \int\limits_0^1 \varphi(t)^2dt\Big) = 0}$

Q16) On sait, d'après Q14) que $\int\limits_0^1 P_n(t)\varphi(t)dt = 0$.

La question Q15) donne alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\int\limits_0^1 \varphi(t)^2dt = 0$ et donc $\int\limits_0^1 \varphi(t)^2dt = 0$

Mais $t \mapsto \varphi(t)^2$ est une fonction continue et positive sur $[0,1]$, donc, d'après le théorème de l'intégrale nulle : $\forall t \in [0,1]\ ,\ \varphi(t)^2 = 0$
$\Rightarrow \forall t \in [0,1]\ ,\ \varphi(t) = 0$
$\Rightarrow \forall t \in]0,1]\ ,\ \varphi(t) = 0$ on utilise la définition de φ
$\Rightarrow \forall t \in]0,1]\ ,\ g(-ln(t)) = 0$ en posant $u = -ln(t)$
$\Rightarrow \forall u \in [0,+\infty[\ ,\ g(u) = 0$ en dérivant
$\Rightarrow \forall u \in [0,+\infty[\ ,\ g'(u) = 0$ utilisation du calcul de g' trouvé en Q9)
$\Rightarrow \forall u \in [0,+\infty[\ ,\ f(u)e^{-u} = 0$ et comme $e^{-u} \neq 0$
$\Rightarrow \forall u \in [0,+\infty[\ ,\ f(u) = 0 \Rightarrow f = 0$ On a donc bien : $\boxed{f = 0}$

Q17) De Q9) à Q16) on a démontrer que : $\mathcal{L}(f) = 0 \Rightarrow f = 0$
Comme la réciproque est évidente, on en déduit : $ker(\mathcal{L}) = \{0_E\}$ et donc, comme $\mathcal{L}$ est linéaire, que : $\boxed{\mathcal{L} \text{ est injective.}}$

Q18) On a : $\forall t \in \mathbb{R}^+\ ,\ y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = t + 1$
On applique $\mathcal{L}$ qui est linéaire : $\mathcal{L}(y'') + 2\mathcal{L}(y') + 2\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(t \mapsto t) + \mathcal{L}(t \mapsto 1) = F_1 + F_0$ avec les notations de Q3)

On en déduit, en utilisant Q4) : $\forall p > 0\ ,\ \mathcal{L}(y'')(p) + 2\mathcal{L}(y')(p) + 2\mathcal{L}(y)(p) = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}$

On utilise maintenant Q7) et Q8) (possible puisque l'on suppose que y vérifie les bonnes hypothèses) :
$\forall p > 0\ ,\ \big(p^2\mathcal{L}(y) - py(0) - y'(0)\big) + 2\big(p\mathcal{L}(y)(p) - f(0)\big) + 2\mathcal{L}(y)(p) = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}$

Mais $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$ donc : $\forall p > 0\ ,\ (p^2 + 2p + 2)\mathcal{L}(y)(p) - 1 = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}$

On en déduit : $\boxed{\forall p > 0\ ,\ (p^2 + 2p + 2)\mathcal{L}(y)(p) = \frac{1+p+p^2}{p^2}}$

Q19) Par équivalences :

$\forall p>0\ ,\ \frac{1+p+p^2}{p^2(p^2+2p+2)}=\frac{a}{p^2}+\frac{b}{(p+1)^2+1}$

$\Leftrightarrow \forall p>0\ ,\ \frac{1+p+p^2}{p^2((p+1)^2+1)}=\frac{a}{p^2}+\frac{b}{(p+1)^2+1}$

$\Leftrightarrow \forall p>0\ ,\ 1+p+p^2=a((p+1)^2+1)+bp^2$ par identification

$\Leftrightarrow \begin{cases}1=2a\\1=2a\\1=a+b\end{cases}$ (degré 0, puis 1, puis 2)

$\Leftrightarrow a=b=\frac{1}{2}$

On a donc : $\boxed{\forall p>0\ ,\ \frac{1+p+p^2}{p^2(p^2+2p+2)}=\frac{1}{2}\frac{1}{p^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{(p+1)^2+1}}$

Q20) On remarque avec Q4) et Q5) que : $\frac{1}{p^2}=F_1(p)$ et $\frac{1}{(p+1)^2+1}=H_{1,1}(p)$

Comme avec Q18) et Q19) on a : $\mathcal{L}(f)(p)=\frac{1+p+p^2}{p^2(p^2+2p+2)}=\frac{1}{2}\frac{1}{p^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{(p+1)^2+1}$

on en déduit que : $\mathcal{L}(f)(p)=\frac{1}{2}F_1(p)+\frac{1}{2}H_{1,1}(p)$

$\Rightarrow \mathcal{L}(f)(p)=\frac{1}{2}\mathcal{L}(f_1)(p)+\frac{1}{2}\mathcal{L}(h_{1,1})(p)$

Par linéarité de $\mathcal{L}$: $\mathcal{L}(f)=\mathcal{L}(\frac{1}{2}f_1+\frac{1}{2}h_{1,1})$

Par injectivité de $\mathcal{L}$: $f=\frac{1}{2}f_1+\frac{1}{2}h_{1,1}$

On en déduit que : $\boxed{\text{l'unique solution de } (PC) \text{ est la fonction : } t\mapsto \frac{1}{2}\big(t+te^{-t}\big)}$

Problème 2 : début de Centrale TSI 2025 mathématiques 2

Q1) Si on pose $E_j=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$ avec le 1 en j-ième position alors $AE_j=C_j$

De plus, par définition : $Im(A)=Vect(C_1,\dots,C_p)$ donc $(C_1,\dots,C_p)$ est bien génératrice de $Im(A)$

Q2) Comme la deuxième et la troisième colonne de A sont les mêmes alors :

$Im(A)=Vect(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix})$

Mais le déterminant de cette famille relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ vaut :

$\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&1\\1&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&0\\1&0&1\end{vmatrix}=1\neq 0$ ($C_3\longleftarrow C_3-C_2$ puis par blocs),

donc on a une base de $\mathbb{R}^3$ et donc de $Im(A)$

$\boxed{(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}) \text{ est une base de } Im(A)=\mathbb{R}^3}$

Remarque : on peut aussi prendre la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Q3) On vient de voir $Im(A) = \mathbb{R}^3$ donc $rg(A) = 3$.
Comme $rg(A) = rg(A^T)$ alors $rg(A^T) = 3$
Par le théorème du rang : $dim(\mathbb{R}^3) = rg(A^T) + dim(ker(A^T))$ et donc $dim(ker(A^T)) = 0$
On a alors : $ker(A^T) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$
Comme $Im(A) = \mathbb{R}^3$ alors $(Im(A))^\perp = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

Finalement on a bien : $\boxed{(Im(A))^\perp = ker(A^T)}$

Q4) X^TY est une matrice de taile $(1,1)$, donc un réel et donc X^TY est égale à sa transposée.
$X^TY = (X^TY)^T = Y^T(X^T)^T = Y^TX$

On a bien : $\boxed{X^TY = Y^TX}$

Q5) Si $\forall Y \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^TY = 0$ alors on peut choisir $Y = X$ et on a :
$X^TX = 0 \Leftrightarrow (X|X) = 0 \Leftrightarrow X = 0_{\mathbb{R}^n}$

$\boxed{\text{Si pour tout } Y \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ , } X^TY = 0 \text{ alors } X \text{ est nul.}}$

Q6) $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ et $Z \in M_{p,1}(\mathbb{R})$ implique : $AZ \in M_{n,1}(\mathbb{R})$
On peut alors appliquer Q4) avec $Y = AZ$ et on a :
$X^TY = Y^TX \Rightarrow X^T(AZ) = (AZ)^TX \Rightarrow \boxed{X^TAZ = Z^TA^TX}$

Q7) • $A^TX = 0 \Rightarrow (A^TX)^T = 0 \Rightarrow X^TA = 0 \Rightarrow \forall Z \in M_{p,1}(\mathbb{R})$, $X^TAZ = 0$

• $\forall Z \in M_{p,1}(\mathbb{R})$, $X^TAZ = 0$
$\Rightarrow \forall Z \in M_{p,1}(\mathbb{R})$, $(X^TAZ)^T = 0$
$\Rightarrow \forall Z \in M_{p,1}(\mathbb{R})$, $Z^TA^TX = 0$
$\Rightarrow A^TX = 0$ (avec la question Q5)

• Bilan : $\boxed{A^TX = 0 \Leftrightarrow \forall Z \in M_{p,1}(\mathbb{R}) \text{ , } X^TAZ = 0}$

Q8) On a : $X \in ker(A^T) \Leftrightarrow A^TX = 0$ on utilise Q7)
$\Leftrightarrow \forall Z \in M_{p,1}(\mathbb{R})$, $X^TAZ = 0$
$\Leftrightarrow \forall Z \in M_{p,1}(\mathbb{R})$, $(X|AZ) = 0$ mais AZ décrit $Im(A)$
$\Leftrightarrow X \in (Im(A))^\perp$

Finalement on a bien : $\boxed{(Im(A))^\perp = ker(A^T)}$

Q9) Avec le résultat de Q8) : $ker(A^T) \cap Im(A) = (Im(A))^\perp \cap Im(A) = \{0\}$ car $F \cap F^\perp = \{0\}$ pour tout sous espace vectoriel F.
On en déduit $ker(A^T) + Im(A) = ker(A^T) \oplus Im(A)$
Mais par le théorème du rang : $dim(ker(A^T)) + rg(A^T) = dim(M_{n,1}(\mathbb{R}))$
Or $dim(Im(A)) = rg(A) = rg(A^T)$ donc $dim(ker(A^T)) + dim(Im(A)) = dim(M_{n,1}(\mathbb{R}))$
On en déduit : $dim(ker(A^T) \oplus Im(A)) = dim(ker(A^T)) + dim(Im(A)) = dim(M_{n,1}(\mathbb{R}))$ et donc $ker(A^T) \oplus Im(A) = \mathbb{R}^n$

$\boxed{ker(A^T) \text{ et } Im(A) \text{ sont supplémentaires dans } M_{n,1}(\mathbb{R})}$

Q10) En appliquant Q9) à A^T au lieu de A, comme $(A^T)^T) = A$ on obtient :

$\boxed{ker(A) \text{ et } Im(A^T) \text{ sont supplémentaires dans } M_{n,1}(\mathbb{R})}$

Q11) • Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$
Avec la décomposition de Q9) on a : $\exists (X', Z) \in ker(A^T) \times Im(A)$ tel que : $X = X' + Z$
Comme $Z \in Im(A)$ alors on peut écrire $Z = AZ'$
On écrit Z' avec la décomposition de Q10), c'est-à-dire sous la forme :
$Z' = Y + X''$ avec $Y \in ker(A)$ et $X'' \in Im(A^T)$

Alors $Z = AZ' = \underbrace{AY}_{=0} + AX'' = AX''$ et il reste $X = X' + Z = X' + AX''$ avec $\begin{cases} X' \in ker(A^T) \\ X'' \in Im(A^T) \end{cases}$

On a donc : $\boxed{\forall x \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \ , \ \exists (X', X'') \in ker(A^T) \times Im(A^T) \ , \ X = X' + AX''}$

• Montrons alors l'unicité du couple (X', X'') :

Soit $(X', X'') \in ker(A^T) \times Im(A^T)$ et $(Y', Y'') \in ker(A^T) \times Im(A^T)$, $X = X' + AX'' = Y' + AY''$
Alors $\underbrace{X' - Y'}_{\in ker(A^T)} = \underbrace{A(Y'' - X'')}_{\in Im(A)}$
Mais $ker(A^T) \cap Im(A) = \{0\}$ (preuve en Q9) alors $X' - Y' = A(Y'' - X'') = 0$ donc $X' = Y'$ et $Y'' - X'' \in ker(A)$
On a alors : $Y'' - X'' \in ker(A) \cap Im(A^T)$, comme $ker(A) \cap Im(A^T) = \{0\}$ alors $Y'' - X'' = 0$ et donc $X'' = Y''$
On a bien montrer l'unicité de la décomposition et on a :

$\boxed{\forall x \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \ , \ \exists ! (X', X'') \in ker(A^T) \times Im(A^T) \ , \ X = X' + AX''}$

Q12) Soit $X, Y \in M_{,1}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On écrit, comme en Q11) : $X = X' + AX''$ et $Y = Y' + AY''$
Alors $X + \lambda Y = \underbrace{X' + \lambda Y'}_{\in ker(A^T)} + A \underbrace{(X'' + \lambda Y'')}_{\in Im(A^T)}$
Comme la décomposition est unique : $u(X + \lambda Y) = X'' + \lambda Y'' = u(X) + \lambda u(Y)$
u est bien linéaire. Comme u va de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$ alors : $\boxed{u \text{ est un endomorphisme de } M_{n,1}(\mathbb{R})}$

Q13) • Par construction $X - AX'' = X' \in ker(A^T)$.
En utilisant la question Q8) on a : $ker(A^T) = (Im(A))^{\perp}$ donc $X - AX'' \in (Im(A))^{\perp}$
De manière directe $AX'' \in Im(A)$
On a donc $\begin{cases} X - AX'' \in (Im(A))^{\perp} \\ AX'' \in Im(A) \end{cases}$

Mais par définition le projeté orthogonal de X sur $Im(A)$ est l'unique vecteur Y vérifiant : $\begin{cases} X - Y \in (Im(A))^{\perp} \\ Y \in Im(A) \end{cases}$

donc, on a : $\boxed{AX'' \text{ est le projeté orthogonal de } X \text{ sur } Im(A)}$

• Mais, par définition de B : $X'' = BX$ donc $AX'' = ABX$ qui est le projeté orthogonale de X sur $Im(A)$

On en conclut que : $\boxed{AB \text{ est la matrice de la projection orthogonale sur } Im(A).}$

Q14) On sait avec Q10) et Q8) que : $M_{n,1}(\mathbb{R}) = ker(A) \oplus^{\perp} Im(A^T)$

Soit $X_1 \in ker(A)$.
Alors $BAX_1 = B\underbrace{(AX_1)}_{=0} = 0$ car $X_1 \in ker(A) \Rightarrow AX_1 = 0$ et donc $BAX_1 = 0$

Soit $X_2 \in Im(A^T)$.
Alors on a : $AX_2 = \underbrace{0}_{\in ker(A^T)} + A \underbrace{X_2}_{\in Im(A^T)}$
Comme la décomposition de Q11) est unique alors $BAX_2 = X_2$

En regroupant les deux points précédents.
Si $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, on écrit, grâce à la somme directe $M_{n,1}(\mathbb{R}) = ker(A) \oplus^{\perp} Im(A^T)$:
$X = X_1 + X_2$ avec $X_1 \in ker(A) = (Im(A^T))^{\perp}$ (par Q8)) et $X_2 \in Im(A^T)$
X_2 est donc le projeté orthogonal de X sur $Im(A^T)$
Les calculs précédent permette de montrer que :
$BAX = BA(X_1 + X_2) = BAX_1 + BAX_2 = 0 + X_2 = X_2$

Ceci permet d'affirmer que : $\boxed{BA \text{ est la matrice de la projection orthogonale sur } Im(A^T)}$

Q15) Clairement $\boxed{rg(A) = rg(A^T) = n - 1}$

Q16) D'après Q8) : $ker(A^T) = (Im(A))^{\perp}$
Comme $Im(A) = Vect(e_2, \dots, e_n)$ et que la base $(e_1, \dots, e_n)$ est orthonormée, alors :
$(Im(A))^{\perp} = Vect(e_1)$

On a donc : $\boxed{ker(A^T) = (Im(A))^{\perp} = Vect(e_1)}$

Q17) Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Si on pose $X'' = \begin{pmatrix} x_2 \\ 2x_3 \\ \vdots \\ (n-1)x_n \\ 0 \end{pmatrix}$ alors $AX'' = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

On remarque alors que : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + AX''$

Comme $\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in ker(A)$ alors on a la décomposition (unique) de Q13).
Par unicité de la décomposition, l'application u est bien celle donnée dans l'énoncé.

Q18) Avec la question Q17) : $\boxed{B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & n-1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

Q19) Avec les expressions de A et B on calcule ; $BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ 0 & \dots & \dots & 1 & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$

qui est bien la matrice de la projection orthogonale sur $Vect(e_1, \dots, e_{n-1}) = Im(A^T)$

Q20) $(x_1, \dots, x_k) \in ker(A) \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} x_i f_i = 0 \Rightarrow \forall i \in [\![1, k]\!]$, $x_i = 0$ car $(f_1, \dots, f_k)$ est libre
$\Rightarrow (x_1, \dots, x_k) = 0$

L'autre implication étant écident, on a donc : $\boxed{ker(A) = \{0\}}$

Q21) $X \in ker(A^T A)$
$\Rightarrow A^T AX = 0 \Rightarrow X^T A^T AX = 0 \Rightarrow (AX)^T AX = 0 \Rightarrow ||AX|| = 0 \Rightarrow X = 0$

On a donc : $\boxed{X \in ker(A^T A) \Rightarrow ||AX|| = 0 \Rightarrow X = 0}$

Q22) Avec Q21), on a : $ker(A^T A) = \{0\}$, donc $A^T A$ est injective, comme $A^T A$ est carré, alors $\boxed{A^T A \text{ est inversible.}}$

Q23) Par définiton $Im(A)$ est l'espace engendrée par ses colonnes, donc $Im(A) = Vect(f_1, \dots, f_k)$ et donc $\boxed{Im(A) = F}$

Q24) • On a $p_F(X) \in Im(p_F)$ donc $P_F(X) \in F = Im(A)$ et donc $\exists Y \in M_{p,1}(\mathbb{R})$, $AY = p_F(X)$

• Mais, puisque $M_{p,1}(\mathbb{R}) = Im(A) \oplus^{\perp} ker(A^T)$, et que p_F est la projection orthogonale sur $Im(A)$ (donc parallèlement à $ker(A^T)$), alors :
$X - p_F(X) \in ker(A^T)$ et donc $A^T(X - AY) = A^T(X - p_F(X)) = 0$

On a donc : $\boxed{\forall X \in M_{p,1}(\mathbb{R}) \text{ , } \exists Y \in\in M_{k,1}(\mathbb{R}) \text{ , } \begin{cases} p_F(X) = AY \\ X - AY \in ker(A^T) \end{cases}}$

Q25) Soit $X \in M_{p,1}(\mathbb{R})$ que l'on écrit sous la forme $X = AY + (X - AY)$ avec $Y \in M_{p,1}(\mathbb{R})$ comme en Q24).
Alors $A(A^T A)^{-1} A^T X$
$= A(A^T A)^{-1} A^T (AY + (X - AY))$
$= A \underbrace{(A^T A)^{-1} A^T A}_{I_p} Y + A(A^T A)^{-1} \underbrace{A^T (X - AY)}_{=0}$ car $X - AY \in ker(A^T)$
$= AY + 0 = AY = p_F(X)$

On en déduit que : $\boxed{A(A^T A)^{-1} A^T \text{ est la matrice de } p_F \text{ relativement à la base canonique de } M_{p,1}(\mathbb{R})}$