TD du 19 mai

Exercice A

On pose pour tout réel x : $f(x) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{te^{-tx}}{e^t - 1} dt$

1) Déterminer le domaine de définition D de f.

2) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

3) Calculer, pour $x > 0$: $f(x-1) - f(x)$

4) Montrer que f est continue sur son domaine.

5) On donne $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Calculer $f(0)$

Exercice B

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variable aléatoire indépendantes et suivant toute une loi de Bernoulli de paramètre p. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$

1) Déterminer la loi de S_n.

2) Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $\sum\limits_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k}$

Soit N une variable aléatoire telle que $N+1$ suive une loi géométrique de paramètre p.

On considère une urne contenant une boule rouge et une boule verte indiscernable au toucher.

On effectue N tirages avec remise et on note X le nombre de boules vertes tirées.

3) Déterminer la loi de X.

Exercice C

Soient $n \geqslant 2$, et A, B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On définit $M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ la matrice par blocs de la façon suivante: $M = \begin{pmatrix} A & A \\ 0_n & A \end{pmatrix}$, où 0_n est la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, si A et B sont sont semblables, alors $P(A)$ et $P(B)$ sont semblables.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$, donner l'expression de M^k.
3. En déduire une expression par blocs de la matrice $P(M)$ en fonction de $P(A), P'(A)$ et A.
4. Montrer que si M est diagonalisable, alors A est diagonalisable.
5. Étudier la réciproque
6. Montrer que si M est diagonalisable alors A est nulle.

Correction : Exercice A

1) On pose $I =]0, +\infty[$ et $\begin{array}{cccc} g & : & \mathbb{R} \times I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,t) & \longmapsto & \frac{te^{-tx}}{e^t - 1} \end{array}$ pour avoir $f(x) = \int\limits_0^{+\infty} g(x,t)dt$

Pour $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto g(x,t)$ est continue sur I. Il faut regarder les problèmes en 0 et en $+\infty$.

Au voisinage de $t = 0$: $g(x,t) \sim \frac{t}{1+t-1+o(t)} \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 1$ donc $t \mapsto g(x,t)$ est prolongeable par continuité en 0 et intégrable sur $]0,1]$.

Au voisinage de $t = +\infty$: $g(x,t) \sim \frac{te^{-tx}}{e^t} = te^{-t(x+1)}$ donc :

Si $x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -1$ alors $g(x,t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\int\limits_1^{+\infty} g(x,t)dt$ est divergente.

Si $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$ alors $g(x,t) = o(\frac{1}{t^2})$ et par comparaison à une intégrale de Riemann $\int\limits_1^{+\infty} g(x,t)dt$ est convergente.

On a donc : $\boxed{\text{Le domaine de } f \text{ qui vaut : } D =]-1, +\infty[}$

2) On peut prolonger $t \mapsto \frac{t}{e^t - 1}$ par 1 en 0. On a alors une fonction continue sur $[0, +\infty[$, de limite nulle en $+\infty$. Alors cette fonction est bornée sur $[0, +\infty[$ et $\exists M > 0$, $\forall t \in I$, $0 \leq \frac{t}{e^t - 1} \leq M$

Alors $0 \leq g(x,t) \leq Me^{-xt}$ et en intégrant entre 0 et $+\infty$: $0 \leq f(x) \leq \frac{M}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

Donc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0}$ Remarque : on peut aussi utiliser le théorème de convergence dominée avec paramètre ...

3) Soit $x>0$, alors $x \in D$ et $x-1 \in D$ et on a :

$$f(x-1)-f(x) = \int_0^{+\infty} [\frac{te^{-t(x-1)}}{e^t-1} - \frac{te^{-tx}}{e^t-1}]dt = \int_0^{+\infty} \frac{te^{-tx}}{e^t-1}[e^t-1]dt = \int_0^{+\infty} te^{-tx}dt = \underbrace{[t\frac{-e^{-tx}}{x}]_0^{+\infty}}_{=0} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{x}dt$$

$$= [\frac{-e^{-tx}}{x^2}]_0^{+\infty} = \frac{1}{x^2}$$

On a donc : $\boxed{\forall x>0 \ , \ f(x-1)-f(x) = \frac{1}{x^2}}$

4) Soit $a \in]0,1[$. Alors : $\forall x \geq a, \ 0 \leq g(x,t) \leq \frac{te^{-ta}}{e^t-1} = g(a,t)$
On a donc :
i) $\forall t \in I \ , \ x \mapsto g(x,t)$ est continue sur $[a,+\infty[$
ii) $\forall x \in [a,+\infty[\ , \ t \mapsto g(x,t)$ est continue par morceaux sur I
iii) $\forall (x,t) \in [a,+\infty[\times I \ , \ |g(x,t)| \leq g(a,t)$ avec $t \mapsto g(a,t)$ qui est intégrable sur I (car $a \in D$)

Par le théorème de continuité pour les intégrales à paramètre on en déduit que f est continue sur $[a,+\infty[$.
Comme de plus $\bigcup\limits_{a>-1} [a,+\infty[= D$ alors $\boxed{g \text{ est continue sur } D.}$

5) On a $\sum\limits_{n=1}^{N}(f(n-1)-f(n)) = \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$ en utilisation la relation du 3).

Par télescopage : $f(0)-f(N) = \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$. Comme avec la question 2) $f(N) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors :

$\boxed{f(0) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$

Correction : Exercice B

1) (cours) S_n est la somme de n variable aléatoires indépendantes suivantes toutes une même loi de Bernoulli de paramètre p, donc, d'après le cours S_n suit une loi binomiale de paramètre (n,p).

2) D'après le cours : $\forall x \in]-1,1[\ , \ \frac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$
C'est une série entière, on peut dériver autant de fois que l'on veut, terme à terme, sur l'intervalle ouvert de convergence. On a, en dérivant k fois :
$\forall x \in]-1,1[\ , \ \frac{d^k}{dx^k}[\frac{1}{1-x}] = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}$
$\Rightarrow \forall x \in]-1,1[\ , \ \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k} \Rightarrow \forall x \in]-1,1[\ , \ \frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!k!}x^{n-k}$

On a donc : $\boxed{\forall x \in]-1,1[\ , \ \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}}$

3) On a, par définition d'une loi géométrique : $N(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(N = k) = (1-p)^k p$
On remarque que : $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

Par la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements $(N = k)_{k\in\mathbb{N}}$, on a donc $\forall k \in \mathbb{N}$
$\mathbb{P}(X = k) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k \cap N = n) = \sum\limits_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k|\ N = n)\mathbb{P}(N = n)$

On remarque que $X|_{N=n}$ soit une loi binomiale de paramètre (n, p) (c'est la question 1), donc :

$\mathbb{P}(X = k) = \sum\limits_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k}[p^k(1-p)^{n-k}](1-p)^n p = p^{k+1}(1-p)^k \sum\limits_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k}((1-p)^2)^{n-k}$

On utilise alors le 2) :

$\mathbb{P}(X = k) = p^{k+1}(1-p)^k \frac{1}{(1-(1-p)^2))^{k+1}} = p^{k+1}(1-p)^k \frac{1}{(2p-p^2))^{k+1}} = (1-p)^k \frac{1}{(2-p))^{k+1}} = \frac{1}{2-p}[\frac{1-p}{2-p}]^k$

$\boxed{\text{La loi de probabilité de } X \text{ est donc donnée par : } X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}\ ,\ \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{2-p}[\frac{1-p}{2-p}]^k}$

Remarque : $X + 1$ suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2-p}$

Correction : Exercice C

1) A et B semblable $\Rightarrow \exists Q \in Gl_n(\mathbb{R})$, $A = QBQ^{-1}$
Par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = QB^kQ^{-1}$, puis par linéarité $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $P(A) = QP(B)Q^{-1}$ et donc $\boxed{P(A) \text{ et } P(B) \text{ sont semblables.}}$

2) $M^2 = \begin{pmatrix} A^2 & 2A^2 \\ 0 & A^2 \end{pmatrix}$, $M^3 = \begin{pmatrix} A^3 & 3A^3 \\ 0 & A^3 \end{pmatrix}$, puis, par récurrence : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}\ ,\ M^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^k \\ 0 & A^k \end{pmatrix}}$

3) Si $P = \sum\limits_{k=0}^{N} a_k X^k$ alors, $P(M) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=0}^{N} a_k A^k & \sum\limits_{k=0}^{N} k a_k A^k \\ 0 & \sum\limits_{k=0}^{N} a_k A^k \end{pmatrix}$

et donc $\boxed{P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & AP'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}}$

4) M diagonalisable
$\Rightarrow \exists P \in \mathbb{R}[X]$ scindé simple tel que : $P(M) = 0$ `[on utilise l'expression du 3) ]`
$\Rightarrow \exists P \in \mathbb{R}[X]$ scindé simple tel que : $P(A) = 0$
$\Rightarrow A$ est diagonalisable

On a donc : $\boxed{M \text{ diagonalisable} \Rightarrow A \text{ diagonalisable.}}$

5) Si $A = I_2$ alors $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On a A diagonalisable et M qui ne l'est pas car M n'admet qu'une seule valeur propre et M n'est pas diagonale.

$\boxed{\text{La réciproque est fausse.}}$

6) Si M est diagonalisable, alors d'après 4), A est aussi diagonalisable et donc A est semblable a une matrice du type : $D = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$

M diagonalisable donc il existe un polynôme annulateur de M scindé simple tel que $P(M) = 0$

Avec l'expression du 2) : $P(A) = 0$ et $AP'(A) = 0$, avec le 1) : $P(D) = DP'(D) = 0$ et comme D est diagonale on a : $\forall k \in [\![1; n]\!]$, $P(\lambda_k) = \lambda_k P'(\lambda_k) = 0$

Comme λ_k est racine simple de P alors $P'(\lambda_k) \neq 0$ et donc $\lambda_k P'(\lambda_k) = 0 \Rightarrow \lambda_k = 0$

Tous les λ_k sont donc nuls, donc D est nulle, donc $\boxed{A \text{ est nulle.}}$