

ORAUX BLANCS PSI, Mr Charitat : Mardi 19 Mai

Hélie T.

Exercice a préparé

Soit a un réel strictement positif.

1) Montrer que : $\int_0^1 \frac{1}{1+t^a} dt$ est convergente.

Calculer la valeur de l'intégrale dans le cas $a = 1$ et dans le cas $a = 2$

2) Montrer l'existence et calculer $\int_0^1 t^{na} dt$ pour $n \in \mathbb{N}$

3) On donne l'égalité $\int_0^1 \frac{1}{1+t^a} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+na}$

3)a) Peut-on montrer cette égalité à l'aide de la convergence uniforme ?

3)b) Peut-on montrer cette égalité grâce à la majoration du reste ?

3)c) Peut-on montrer cette égalité par le théorème d'intégration terme à terme ?

4) Que donne cette égalité pour $a = 1$?

5) Calculer $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{1}{1+t^a} dt$

6) Calculer $\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{1}{1+t^a} dt$

Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -5 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 associé.

1) Calculer les valeurs propres de A

2) A est-elle diagonalisable ?

3) Trouver u et v deux vecteurs propres de f , et w un vecteur de \mathbb{R}^3 pour que (u, v, w) soit une base.

4) Déterminer la matrice de f relativement à la base du 3).

MOREL M.

Exercice a préparé

Soit une suite de variables aléatoires indépendantes $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

On suppose que chaque X_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $p_k \in]0, 1[$.

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_n = \frac{p_1 + p_2 + \dots + p_n}{n}$.

a) Rappeler la définition de Y suit une loi de Bernoulli de paramètre p .

Rappeler dans ce cas les valeurs de l'espérance, de la variance et de la fonction génératrice de Y .
On redémontrera ces résultats.

b) Donner l'espérance et la variance de $\frac{S_n}{n}$.

c) Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{V}\left(\frac{S_n}{n}\right) = 0$

Soit $\varepsilon > 0$.

d) Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - P_n\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) = 0$

On suppose que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = p$.

e) Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) = 0$

Exercice 2

Soit $n \geq 2$ et A la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \dots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calculer le déterminant de A .

b) Montrer que A est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$ et donner ses valeurs propres.

c) Quel est la dimension de l'espace vectoriel engendré par la famille $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$?

d) On pose $B_N = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} A^k}{N}$. Déterminer $\lim_{N \rightarrow +\infty} B_N$

Thibault R.

Exercice a préparé

Soit $\alpha \in]0, 1[$ et $\beta > 0$.

Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{N} telles que :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = i, \cap Y = j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i < j \\ \frac{e^{-\beta} \beta^i \alpha^j (1-\alpha)^{i-j}}{j!(i-j)!} & \text{si } i \geq j \end{cases}$$

1. Rappeler la définition de X et Y sont indépendantes.
2. Rappeler le théorème de la formule des probabilités totales.
3. Donner la loi de X .
4. Donner la loi de Y .
5. X et Y sont-elles indépendantes ?
6. On pose $Z = X - Y$. Donner la loi de Z .
7. Donner la probabilité de $Y = j$ sachant $Z = k$.

Exercice 2

Soit $n \geq 2$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. On pose, pour $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^n b_k X^k$: $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^n a_k b_k$

On pose $H = \{P \in E, P(1) = 0\}$

- a) Montrer que \langle, \rangle est un produit scalaire.
 - b) Déterminer la projection orthogonale de $R = 1$ sur H .
-

Yoann C. (MT)

Exercice 1

On pose $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\operatorname{sh}(t)} dt$ et $\forall t > 0$, $f(t) = \frac{\sin(t)}{\operatorname{sh}(t)}$

- 1) Montrer que : I est convergente.
 - 2) Montrer que : f est prolongeable en 0 en une fonction C^∞ .
 - 3) Montrer que $I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)^2+1}$
 - 4) On donne : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Donner un encadrement de I .
-

Exercice 2

a) Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. On pose $A = MM^T$
Montrer que $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

b) Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Montrer qu'il existe $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A = MM^T$
Est-ce que M est unique ?

Valentin P. (MT)

Exercice 1

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^n(x)}$

1) Montrer que les fonctions f_n sont intégrables sur $[0, +\infty[$

On pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch}^n(x)} dx$

- 2) Calculer I_1 et I_2
 - 3) Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.
 - 4) Déterminer la nature de $\sum (-1)^n I_n$
 - 5) Déterminer la nature de $\sum I_n$
 - 6) Déterminer le rayon de convergence de $\sum I_n x^n$
-

Exercice 2

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non constant vérifiant : $P(X^2) = P(X)P(X+1)$

Déterminer les polynômes P solution de ce problème.

On pourra s'intéresser aux racines complexes de P .