Exercices posés aux oraux 2025 aux élèves de PSI* de La-Fayette

$\boxed{\text{ccINP}}$

Planche 1. ccINP *(Mélissande E.)*

Exercice 1 (déjà tombé en 2024)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} 0_n & A \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}$

1) Montrer que A est inversible $\Leftrightarrow 0 \notin sp(A)$

2) Calculer le rang de B en fonction de n et du rang de A.

3) Exprimer le polynôme caractéristique de B en fonction de celui de A.

4) Montrer que : $x^2 \in sp(A) \Leftrightarrow x \in sp(B)$

5) Montre que si A est inversible avec n valeurs propres distinctes, alors B est diagonalisable.

---

1) A inversible $\Leftrightarrow det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \chi_A(0) = (-1)^n det(A) \neq 0 \Leftrightarrow 0 \notin sp(A)$

2) Si on note $(e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}, \ldots, e_{2n})$ la base canonique de $\mathbb{R}^{2n}$, alors les colonnes $n+1$ à $2n$ de B engendre un sous espace vectoriel $F \subset vect(e_1, \ldots, e_n)$ et les colonnes 1 à n de B engendre le sous espace vectoriel $G = vect(e_{n+1}, \ldots, e_{2n})$
On a alors $Im(B) = F \oplus G$ et donc $rg(B) = dim(F) + dim(G) = rg(A) + n$

On a donc : $\boxed{rg(B) = rg(A) + n}$

3) $\chi_B(X) = \begin{vmatrix} XI_n & -A \\ -I_n & XI_n \end{vmatrix}$ On effectue $C_{n+k} \longleftarrow C_{n+k} + XC_k$ pour $k \in [\![1, n]\!]$

$\chi_B(X) = \begin{vmatrix} XI_n & X^2I_n - A \\ -I_n & 0_n \end{vmatrix}$ On effectue $C_k \longleftrightarrow C_{n+k}$ pour $k \in [\![1, n]\!]$

$\chi_B(X) = (-1)^n \begin{vmatrix} X^2I_n - A & XI_n \\ 0_n & -I_n \end{vmatrix} = (-1)^n(-1)^n \chi_A(X^2)$ par blocs puisque $det(-I_n) = (-1)^n$

On a donc : $\boxed{\chi_B(X) = \chi_A(X^2)}$

4) $x^2 \in sp(A) \Leftrightarrow \chi_A(x^2) = 0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{3)} \chi_B(x) = 0 \Leftrightarrow x \in sp(B)$

5) • Si A est inversible avec n valeurs propres distinctes, on sait alors que A est diagonalisable et qu'il existe $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in(\mathbb{R}\backslash\{0\})^n$ avec les λ_i distincts deux à deux tel que A soit semblable à $diag(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$

On a ainsi que le polynôme caractéristique de A s'écrit : $\chi_A(X)=\prod_{k=1}^{n}(X-\lambda_k)$

Comme on est dans $\mathbb{C}$, on peut choisir, pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $\mu_k\in\mathbb{C}$ tel que $\mu_k^2=\lambda_k$

Avec la relation du 3) on obtient :

$\chi_B(X)=\chi_A(X^2)=\prod_{k=1}^{n}(X^2-\lambda_k)=\prod_{k=1}^{n}(X^2-\mu_k^2)=\prod_{k=1}^{n}(X-\mu_k)(X+\mu_k)$

Comme μ_k est non nul (car $\lambda_k\neq 0$) alors $\mu_k\neq-\mu_k$ et comme les λ_k sont distincts deux à deux alors finalement $\chi_B(X)$ est scindé simple donc, d'après le cours : $\boxed{B \text{ est diagonalisable.}}$

• Remarque : autre méthode, avec les mêmes notations.

On a il existe une base $B_A=(X_1,\dots,X_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tels que : $\forall k\in[\![1,k]\!]$, $AX_k=\lambda_kX_k$ et $\lambda_k\neq 0$

On pose alors : $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $Y_k^+=\begin{pmatrix}\mu_kX_k\\ X_k\end{pmatrix}$ et $Y_k^-=\begin{pmatrix}-\mu_kX_k\\ X_k\end{pmatrix}$

Alors $BY_k^+=\begin{pmatrix}AX_k\\ \mu_kX_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_kX_k\\ \mu_kX_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu_k^2X_k\\ \mu_kX_k\end{pmatrix}=\mu_k\begin{pmatrix}\mu_kX_k\\ X_k\end{pmatrix}$

On a donc : $BY_k^+=\mu_kBY_k^+$ et de même $BY_k^-=-\mu_kBY_k^+$

Posons $B_B=(Y_1^+,\dots,Y_n^+,Y_1^-,\dots,Y_n^-)$

B_B est alors une famille de vecteurs propres de $\mathbb{R}^{2n}$

Soit $(a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n)\in\mathbb{R}^{2n}$ tel que : $\sum_{k=1}^{n}(a_kY_k^++b_kY_k^-)=0$

On a alors, en regardant par blocs : $\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)\mu_kX_k=0$ et $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)X_k=0$

Comme B_A est une base, on a $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $\begin{cases}(a_k-b_k)\mu_k=0\\ a_k+b_k=0\end{cases}$

Comme de plus $\mu_k\neq 0$: $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $\begin{cases}a_k-b_k=0\\ a_k+b_k=0\end{cases}$

On en déduit : $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $a_k=b_k=0$ et donc B_B libre.

Comme on a le bon nombre de vecteurs alors B_B est une base de $\mathbb{R}^{2n}$

On a une base formée de vecteurs propres de B donc : $\boxed{B \text{ est diagonalisable.}}$

Exercice 2

1. Donner la définition d'une norme.

Soit $E = \mathbb{R}^2$. On pose $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\ ,\ N(x,y) = \sup_{t\in[0,1]} |xt+y|$

2. Montrer que N est une norme.

3) Dessiner la boule unité associé à N.

4) Trouver $\alpha > 0$ le plus grand possible et $\beta > 0$ le plus petit possible tels que : $\forall X \in \mathbb{R}^2\ ,\ \alpha N(X) \leq ||X||_\infty \leq \beta N(X)$

Planche 2. ccINP *(Jeanne P.)*

Exercice 1

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$ on pose $f_n(x) = \frac{1}{sh(nx)}$

1) Pour quelles valeurs de $x > 0$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle ?

On pose $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$

2) Déterminer le domaine `de définition` et le domaine de continuité de f

3) Déterminer les variations de f.

4) Montrer que $\forall n \geq 2$, $\forall x \geq 1$, $0 \leq f_n(x) \leq \frac{2}{1-e^{-4}} e^{-nx}$

5) Montrer que : $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{sh(x)}$

---

1) Comme $x > 0$: $f_n(x) = \frac{2}{e^{nx}-e^{-nx}} \sim \frac{2}{e^{nx}} \sim 2e^{-nx} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

$\boxed{\text{La suite de fonctions } (f_n) \text{ converge donc simplement vers la fonction nulle sur }]0,+\infty[}$

2) • Comme $f_n(x) \sim 2e^{-nx} > 0$ et que $\sum e^{-nx} = \sum (e^{-x})^n$ est absolument convergente (série géométrique de raison $e^{-x} \in]-1, 1[$), alors, par règle de l'équivalent, $\sum f_n(x)$ converge.

$\boxed{f \text{ est définie sur }]0,+\infty[}$

• Soit $a > 0$, alors $\forall x \geq a$, $0 \leq f_n(x) \leq f_n(a)$
On en deduit donc : $||f_n||_\infty^{[a,+\infty[} = \sup\limits_{x\in[a,+\infty[} = f_n(a)$
Comme $\sum f_n(a)$ est convergente, alors, par comparaison : $\sum ||f_n||_\infty^{[a,+\infty[}$ est convergente et donc $\sum f_n$ converge normalement sur $[a,+\infty[$
Donc $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a,+\infty[$
Comme les f_n sont continues et que la continuité est conservée par convergence uniforme, on a : f continue sur $[a,+\infty[$

Comme ce résultat est vraie pour tout $a >$ alors : $\boxed{f \text{ est continue sur }]0,+\infty[}$

3) Si $0 < x < y$ alors $f_n(x) > f_n(y)$ et donc en sommant $f(x) \geq f(y)$ et donc $\boxed{f \text{ est décroissante sur }]0,+\infty[}$

4) $f_n(x)e^{nx} = \frac{2e^{nx}}{e^{nx}-e^{-nx}} = \frac{2}{1-e^{-2nx}} \leq \frac{2}{1-e^{-4}}$ (car $nx \geq 2$) et donc
$\boxed{\forall n \geq 2 \ , \ \forall x \geq 1 \ , \ 0 \leq f_n(x) \leq \frac{2}{1-e^{-4}} e^{-nx}}$

5) Pour $x \geq 1$: $f(x) - \frac{1}{sh(x)} = f(x) - f_1(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} f_n(x)$

Avec le 4) on en déduit : $0 \leq f(x) - \frac{1}{sh(x)} \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{1-e^{-4}} e^{-nx}$

On utilise la somme des termes d'une série géométrique de raison e^{-x} et de premier terme $2e^{-2x}$:
$0 \leq f(x) - \frac{1}{sh(x)} \leq \frac{2}{1-e^{-4}} e^{-2x} \frac{1}{1-e^{-x}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2}{1-e^{-4}} e^{-2x}$

On a alors : $f(x) - \frac{1}{sh(x)} = O(e^{-2x})$

Comme $\frac{1}{sh(x)} \sim 2e^{-x}$ et que $O(e^{-2x}) = o(e^{-x})$ alors $f(x) = 2e^{-x} + o(e^{-x})$ donc $f(x) \sim 2e^{-x} \sim \frac{1}{sh(x)}$

On a bien : $\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{sh(x)}}$

Exercice 2

Soit u en endomorphisme d'un $\mathbb{R}$ espace vectoriel E de dimension finie.
Soit P un polynôme annulateur de u.

1) a) Rappeler la définition de polynôme annulateur.

1) b) Est-ce que u admet un polynôme annulateur ?

1) c) Rappeler la définition de racine simple d'un polynôme.

1) d) Si on écrit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients de P pour que 0 soit racine simple de P.

On suppose de plus que 0 est valeur propre simple de u.

2) a) Est-ce-que 0 est racine de P ?

2) b) Est-ce-que 0 est racine simple de P ?

3) Montrer que $ker(u) = ker(u^2)$

Définition : on dit que $f \in L(E)$ est nilpotent si et seulement si $\exists k \in \mathbb{N}^*$, $f^k = 0_{L(E)}$

4) a) Si f est nilpotent quelles sont les valeurs propres possibles de f ?

4) b) Si f est nilpotent est-ce-que 0 est valeur propre simple de f ?

5) Si $dim(E) \geq 2$. Est-ce que u peut-être nilpotent ?

Planche 3. ccINP *(Mattéo B.)*

Exercice 1

Soit n un entier non nuls et u un endomorphisme de $E = \mathbb{C}^n$.

1) Montrer que : u diagonalisable $\Rightarrow u^2$ diagonalisable

2) Trouver un exemple où la réciproque est fausse.

3) Soit λ un complexe non nul. Montrer que $Ker(u^2 - \lambda^2 Id_E) = Ker(u - \lambda Id_E) \oplus Ker(u + \lambda Id_E)$

4) Montrer que : $\begin{cases} u \text{ bijectif} \\ u^2 \text{ diagonalisable} \end{cases} \Rightarrow u$ diagonalisable

---

Exercice 2

On considère une urne contenant des boules vertes et des boules rouges.
On effectue des tirages indépendants, avec remise. La probabilité de tirer une boule verte étant de $p \in]0,1[$.

1) Déterminer la loi de probabilité et l'espérance de X la variable aléatoire donnant le rang du premier tirage d'une boule verte.

2) Déterminer la loi de probabilité et l'espérance de Y la variable aléatoire donnant le rang du tirage de la deuxième boule verte.

---

1) Tirer une boule verte ou non est une épreuve de Bernoulli de paramètre p.
Dans ce 1) on effectue cette épreuve, de manière indépendante, jusqu'à l'obtention d'un premier succès.
On reconnaît donc une loi géométrique de paramètre p et on a :
$\boxed{X \hookrightarrow G(p) \text{ et } E(X) = \frac{1}{p}}$

2) • On remarque que : $Y(\Omega) = [\![2; +\infty[\![$ ($+\infty$ impossible) et que :

$$\forall k \in Y(\Omega) \text{ , } (Y = k) = \bigcup_{i \in [\![1,k-1]\!]} \Big(\big(\bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k-1} \overline{V_j} \big) \cap V_i \cap V_k \Big)$$

avec V_i ="tirer une boule verte au i-ième tirage"

Par incompatibilité on a : $P(Y=k)=\sum\limits_{i=1}^{k-1} P\Big(\big(\bigcap\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k-1} \overline{V_j}\big)\cap V_i\cap V_k\Big)$

Puis, par indépendance : $P(Y=k)=\sum\limits_{i=1}^{k-1}\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k-1} P(\overline{V_j})\big)P(V_i)P(V_k)$

$\Rightarrow P(Y=k)=\sum\limits_{i=1}^{k-1}(1-p)^{k-2}p^2=(k-1)(1-p)^{k-2}p^2$

La loi de Y est donc donnée par :

$\boxed{Y(\Omega)=[\![2,+\infty]\!] \text{ et } \forall k\in Y(\Omega)\ ,\ P(Y=k)=(k-1)(1-p)^{k-2}p^2}$

- On a alors $E(Y)=\sum\limits_{k=2}^{+\infty} kP(Y=k)=\sum\limits_{k=2}^{+\infty} k(k-1)(1-p)^{k-2}p^2$

Mais d'après le cours : $\forall x\in]-1,1[\ ,\ \frac{1}{1-x}=\sum\limits_{k=0}^{+\infty} x^k$

Comme on a une série entière, $x\mapsto\frac{1}{1-x}$ est C^2 sur $]-1,1[$ et on peut dériver deux fois terme à terme. On en déduit : $\forall x]-1,1[\ ,\ \frac{2}{(1-x)^3}=\sum\limits_{k=0}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2}$

On peut appliquer ceci en $1-p\in]-1,1[$ et on a : $E(Y)=p^2\frac{2}{(1-(1-p))^3}=\frac{2p^2}{p^3}=\frac{2}{p}$

$\boxed{Y \text{ admet une espérance et } E(Y)=\frac{2}{p}}$

Planche 4. ccINP *(Jean X.)*

Exercice 1

Soit E l'espace des fonctions à valeurs réelles continues sur $[0,1]$.

On pose : $\begin{array}{cccc} \varphi & : & E & \longrightarrow & E \\ & & f & \longmapsto & F \end{array}$ avec $\forall x \in [0,1]$, $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\int\limits_0^x f(t)dt & \text{si } x \in]0,1] \\ f(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1) Montrer que φ est un endomorphisme.

2) Montrer que 0 n'est pas valeurs propres de φ.

3) Montrer que 1 est valeur propre de φ.

4) Donner les autres valeurs propres et déterminer les sous espaces propres associés.

Exercice 2

Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = f(\frac{3}{16x})$

1) Montrer que f vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 2 que l'on notera (E).

2) Trouver une solution de (E) de la forme : $x \mapsto x^\alpha$

3) Trouver les fonctions f répondant au problème.

Planche 5. ccINP *(Mathis M.)*

Exercice 1

Soit $E = \{f \in C^1([0,1], \mathbb{R})$, $f(0) = 0\}$

1) Montrer que $f \mapsto ||f||_\infty = \sup\limits_{x \in [0,1]} |f(x)|$ et $f \mapsto ||f'||_\infty = \sup\limits_{x \in [0,1]} |f'(x)|$ sont bien définies.

2) Montrer que : $N : f \mapsto ||f||_\infty + ||f'||_\infty$ est une norme.

3) Montrer que : $\forall f \in E$, $f(x) = e^{-x}\int\limits_0^x e^t(f(t) + f'(t))dt$

4) On pose $\forall f \in E$, $N'(f) = \sup\limits_{t \in [0,1]} |e^t(f(t) + f'(t))|$

Montrer que N' est une norme sur E.

5) Montrer que N et N' sont équivalentes.

---

1) Comme f est C^1 : $x \mapsto |f(x)|$ et $x \mapsto |f'(x)|$ sont deux fonctions continues sur une partie fermée bornée de $\mathbb{R}$.
Ces fonctions sont donc bornées et atteignent leurs bornes, on peut donc définir : $||f||_\infty$ et $||f'||_\infty$

Remarque : on sait même d'après le cours que : $f \mapsto ||f||_\infty$ est une norme sur E.

2) On remarque pour commencer que N prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

Soit $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
i) Par propriété de la norme infinie :
$N(\lambda f) = ||\lambda f||_\infty + ||\lambda f'||_\infty = |\lambda|\,||f||_\infty + |\lambda|\,||\lambda f'||_\infty = |\lambda|\,N(f)$

ii) De même $N(f+g) = ||f+g||_\infty + ||f'+g'||_\infty \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty + ||f'||_\infty + ||g'||_\infty = N(f) + N(g)$

iii) $N(f) = 0 \Rightarrow ||f||_\infty + ||f'||_\infty = 0 \Rightarrow ||f||_\infty = ||f'||_\infty = 0 \Rightarrow ||f||_\infty = 0 \Rightarrow f = 0_E$ puisque la norme infinie est une norme.

Bilan : $\boxed{N \text{ est bien une norme sur } E.}$

3) On remarque que $\frac{d}{dt}\big(e^t f(t)\big) = e^t(f(t) + f'(t))$ donc :
$\int\limits_0^x \big(e^t(f(t)+f'(t))\big)dt = [e^t f(t)]_0^x = e^x f(x) - f(0) = e^x f(x)$puisque $f(0) = 0$ car $f \in E$

On a donc bien : $\boxed{\forall f \in E \ , \ \forall x \in [0,1] \ , \ f(x) = e^{-x} \int\limits_0^x e^t(f(t)+f'(t))dt}$

4) Déjà N' prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$
Soit $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

i) $N'(\lambda f)$
$= \sup\limits_{x\in[0,1]} |e^t(\lambda f(t) + \lambda f'(t))| = \sup\limits_{x\in[0,1]} |\lambda|\,|e^t(f(t)+f'(t))| = |\lambda| \sup\limits_{x\in[0,1]} |e^t(f(t)+f'(t))| = |\lambda|\,N'(f)$

ii) Pour $t \in [0,1]$:
$|e^t((f+g)(t) + (f+g)'(t))|$
$= |e^t((f(t)+f'(t)) + (g(t)+g'(t))'(t))| \leq |e^t((f(t)+f'(t))| + |e^t((g(t)+g'(t))| \leq N'(f) + N'(g)$
en passant au sup pour $t \in [0,1]$: $N'(f+g) \leq N'(f) + N'(g)$

iii) $N'(f) = 0$
$\Rightarrow \sup\limits_{t\in[0,1]} |e^t(f(t)+f'(t))| = 0$
$\Rightarrow \forall t \in [0,1] \ , \ |e^t(f(t)+f'(t))| = 0$
$\Rightarrow \forall t \in [0,1] \ , \ e^t(f(t)+f'(t)) = 0$

Avec la relation du 3) , on en déduit : $\forall x \in [0,1] \ , \ f(x) = 0$ et donc $f = 0_E$

Finalement : $\boxed{N' \text{ est une norme sur } E}$

5) • On a, comme $e^t \leq e$ sur $[0,1]$:
$|e^t(f(t)+f'(t))| \leq |e^t f(t)| + |e^t f'(t)| \leq e^t\,||f||_\infty + e^t\,||f'||_\infty \leq ||f||_\infty + e\,||f'||_\infty = eN(f)$
En passant au sup sur $[0,1]$ on a $N'(f) \leq eN(f)$

• En dérivant l'égalité de la question 3) :
$f'(x) = -e^{-x}\int\limits_0^x e^t(f(t)+f'(t))dt + e^{-x}(e^x(f(x)+f'(x))$
Par inégalité de la moyenne et inégalité triangulaire :
$|f'(x)| \leq e^{-x}\int\limits_0^x N'(f) + e^{-x}N'(f) \leq 1 \times xN'(f) + N'(f) \leq 2N'(f)$ car $x \leq 1$
En passant au sup sur $[0,1]$: $||f'||_\infty \leq 2N'(f)$

• Avec l'égalité de la question 3) : $|f(x)| \leq e^{-x}\int\limits_0^x N'(f)dt \leq xN'(f) \leq N'(f)$
En passant au sup sur $[0,1]$: $||f||_\infty \leq N'(f)$

• Avec les deux dernières inégalités : $N(f) = ||f||_\infty + ||f'||_\infty \leq 3N'(f)$

• On a donc : $N'(f) \leq eN(f)$ et $N(f) \leq 3N'(f)$ donc $\frac{1}{e}N'(f) \leq N(f) \leq 3N'(f)$

Donc : $\boxed{N \text{ et } N' \text{ sont équivalentes.}}$

Exercice 2

1) Montrer que : $A = \int\limits_0^1 \frac{ln(t)}{1+t}dt$ est convergente.

2) Exprimer A sous forme de somme et calculer A.

On admettra que : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Planche 6. ccINP *(Laureana P.)*

Exercice 1
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda > 0$ et $\mu > 0$. On pose $Z = X + Y$

1) Montrer que Z suit une loi de Poisson.

2) Maintenant X et Y suivent une même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ et sont indépendantes.
Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

---

1) On sait que la fonction génératrice de X vaut $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$ et que celle de Y vaut $G_Y(t) = e^{\mu(t-1)}$

Comme X et Y sont indépendantes alors : $G_Z = G_{X+Y} = G_X G_Z$

Comme tout les rayons de convergence valent $+\infty$, on a a :
$\forall t \in \mathbb{R}\ ,\ G_Z(t) = G_X(t)G_Y(t) = e^{\lambda(t-1)}e^{\mu(t-1)} = e^{(\lambda+\mu)(t-1)}$

On reconnaît la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$. Comme la fonction génératrice caractérise la loi, alors :
$\boxed{X + Y \text{ suit une loi de Poisson de paramètre } \lambda + \mu}$

2) D'après le cours,en posant $q = 1 - p$, on a $\forall t \in]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}[\ ,\ G_X(t) = G_Y(t) = \frac{pt}{1-qt}$

Comme en 1) : $G_Z(t) = \left(\frac{pt}{1-qt}\right)^2 = p^2t^2\frac{1}{(1-qt)^2}$

On sait que : $\forall u \in\ ]-1, 1[\ ,\ \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u^n = \frac{1}{1-u}$
Comme on a une série entière, la fonction est C^∞ et on peut la dériver terme à terme sur $]-1, 1[$ l'intervalle ouverte de convergence.
On obtient : $\forall u \in\ ]-1, 1[\ ,\ \sum\limits_{n=1}^{+\infty} nu^{n-1} = \frac{1}{(1-u)^2}$

Donc : $\forall t \in]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}[\ ,\ \frac{1}{(1-qt)^2} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n(qt)^{n-1}$

En multipliant par p^2t^2 : $G_z(t) = p^2t^2\frac{1}{(1-qt)^2} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} np^2t^2(qt)^{n-1} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} np^2q^{n-1}t^{n+1}$
Par changement d'indice $N = n + 1$: $G_z(t) = \sum\limits_{N=2}^{+\infty}(N-1)p^2q^{N-2}t^N$

Comme la fonction génératrice caractérise la loi, on en déduit :

$\boxed{Z(\Omega) = \mathbb{N}\backslash\{0, 1\} \text{ et } \forall n \in Z(\Omega)\ ,\ \mathbb{P}(Z = n) = (n-1)p^2q^{n-2}}$

Exercice 2

Soit E un K espace vectoriel de dimension finie, $u \in L(E)$ et H un hyperplan de E.

1) Montrer que si H est stable par u alors $\exists \lambda \in K\ ,\ Im(u - \lambda Id_E) \subset H$

2) ???

Planche 7. ccINP *(Akram M.)*

Exercice 1

On dit qu'une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ est à diagonale propre si ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux (avec leur ordre de multiplicité).
On note E_n l'ensemble des matrices à diagonale propre de $M_n(\mathbb{R})$.

1) Donner des exemples de matrices à diagonales propres.

2) La matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle à diagonale propre ?

3) Soit A une matrice antisymétrique à diagonale propre.
a) Que dire des coefficients diagonaux de A ?
b) Montrer qu'il existe un entier naturel $p \geq 2$ tel que $A^p = 0$
c) Calculer $(A^T A)^p$.
En remarquant que $A^T A$ est symétrique, montrer que $A^T A = 0$ puis que $A = 0$.

4) Donner la dimension de $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $M_n(\mathbb{R})$.

5) a) Soit F un sous-espace vectoriel de E_n. Montrer que : $dim(F) \leq \frac{n(n+1)}{2}$
5) b) Quelle est la dimension maximale de F ?

Exercice 2

Soit f la fonction définie par $f(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} t^{n^2}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.

2) Montrer que f est continue sur son ensemble de définition.

3) Donner un équivalent de f en 1^-.

On donne $\int\limits_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Planche 8. ccINP *(Nino D.)*

Exercice 1

Soit $E = \mathbb{R}$. On considère le produit scalaire sur E donné par :
$\forall (P, Q) \in E^2$ on écrit $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k X^k$ avec $n \geq deg(P)$ et $n \geq deg(Q)$ et certains coefficients qui peuvent être nul.
On pose alors : $< P, Q >= \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_k$

On définit f sur E par : $\forall P \in E$, $f(P) = a_0$

On définit g sur E par : $\forall P \in E$, $g(P) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$

0) Montrer que $<,>$ définit un produit scalaire sur E.

1) Montrer que f est continue.

2) Trouver une suite $(P_k)_{k\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ telle que : $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{|g(P_k)|}{||P_k||} = +\infty$

3) Est-ce que g est continue sur E ?

4) Est-ce que la restriction de g à $\mathbb{R}_n[X]$ est une fonction continue de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}$?

5) On pose $H = ker(g)$. Montrer que $H^{\perp} = \{0_E\}$

6) Comparer H et $(H^{\perp})^{\perp}$

Exercice 2

On pose $f_n(x) = \frac{e^{-x}}{1+n^2x^2}$ et $u_n = \int\limits_0^1 f_n(x)dx$

1) Etudier la convergence simple de la suite (f_n) sur $[0,1]$.

2) Y-a-t-il convergence uniforme de (f_n) sur $[a,1]$ avec $a \in]0,1[$?

3) Y-a-t-il convergence uniforme sur $[0,1]$?

4) Trouver la limite de la suite (u_n) en $+\infty$.

Planche 9. ccINP *(Swann L.)*

Exercice 1

Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $u \in L(E)$.
On note B la base canonique de E. On note A la matrice de u relativement à B.
On note u^* l'endomorphisme admettant A^T comme matrice relativement à B.

1) Montrer que : $\forall (x,y) \in E^2$, $< u(x), y >=< x, u^*(y) >$

2) Montrer que si un sous-espace vectoriel F est stable par u, $F^{\perp}$ est stable par u^*.

3) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

3) a) A et A^T sont-elle diagonalisable ?

3) b) Trouver les sous-espaces vectoriel stable par u.

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ on pose : $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $v_n = sin(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})$ et $w_n = ln(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})$

1) Rappeler le critère spécial pour les séries alternées.

2) Montrer que : $u_n \sim v_n \sim w_n$

3) Etudier $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$

Planche 10. ccINP *(Ryann D.)*

Exercice 1

Un centre d'appel téléphonique reçoit des appels pour deux produits A et B.
Les appels successifs sont supposés indépendants.
Lors d'un appel, la probabilité de recevoir un appel pour le produit A est de 20% et celle de recevoir un appel pour le produit B de 80%.

On note X_A la variable aléatoire qui correspondant au rang du premier appel pour le produit A et X_B le rang du premier appel pour le produit B.

On note L la longueur de la première série d'appels successifs du premier produit.

Exemple : $AAABBAA$ donne $X_A = 1$, $X_B = 4$ et $L = 3$.

1) a) Donner la loi de probabilité de X_A.

1) b) Justifier que X_A admet une espérance et une variance finie. Les définir et les calculer.

1) c) De même pour X_B.

2) a) Exprimer $(L = n)$ en fonction de $(X_A = n+1)$ et de $(X_B = n+1)$

2) b) Déterminer une expression de $P(L = n)$

2) c) Montrer que : $P(L = n) = 0.8P(X_A = n) + 0.2P(X_B = n)$

3) En déduire que L admet une espérance finie et la calculer.

4) a) X_A et X_B sont-elles indépendantes ?

4) b) L et X_A sont-elles indépendantes ?

Exercice 2 Pas de retour ...

Planche 11. ccINP *(Nicolas P.)*

Exercice 1

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson `de paramètre` $\lambda > 0$.

1) Démontrer que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$: $P(X \leq n) = \frac{1}{n!} \int_{\lambda}^{+\infty} e^{-x} x^n dx$

2) En déduire une équivalent simple quand n tend vers $+\infty$ de : $u_n = \int_{\lambda}^{+\infty} e^{-x} x^n dx$

Soit G_X la fonction génératrice de X.

3) Calculer $G_X(1)$ et $G_X(-1)$.

4) En déduire la probabilité que X prenne une valeur paire.

Soit Y une variable aléatoire indépendante de X suivant une loi uniforme sur $\{1, 2\}$.

5) Calculer la probabilité que XY prenne une valeur paire.

---

1) • Commençons par montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_{\lambda}^{+\infty} e^{-x} x^n dx$ est convergente.

On a : $x \mapsto e^{-x} x^n$ continue sur $[\lambda, +\infty[$ et de plus $e^{-x} x^n = o(e^{-x/2})$ au voisinage de $+\infty$. Comme $x \mapsto e^{-x/2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, alors par négligeabilité $x \mapsto e^{-x} x^n$ est intégrable sur $[\lambda, +\infty[$.

On a donc : $\int_{\lambda}^{+\infty} e^{-x} x^n dx$ convergente.

• Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(X \leq n) = \frac{1}{n!} \int_{\lambda}^{+\infty} e^{-x} x^n dx$

Initialisation :
Comme $X(\Omega) = \mathbb{N}$ alors $(X \leq 0) = (X = 0)$ donc $P(X \leq 0) = P(X = 0) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^0}{0!} = e^{-\lambda}$
D'autre part : $\frac{1}{0!} \int_{\lambda}^{+\infty} e^{-x} x^0 dx = \int_{\lambda}^{+\infty} e^{-x} dx = [-e^{-x}]_{\lambda}^{+\infty} = e^{-\lambda}$
On a donc bien la formule au rang 0.

Hérédité :
Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} \frac{x^{n+1}}{n+1} = 0$ on peut faire l'IPP suivante :
$\int_{\lambda}^{+\infty} e^{-x} x^n dx = [e^{-x} \frac{x^{n+1}}{n+1}]_{\lambda}^{+\infty} - \int_{\lambda}^{+\infty} (-e^{-x}) \frac{x^{n+1}}{n+1} dx = -e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{n+1} \int_{\lambda}^{+\infty} e^{-x} x^{n+1} dx$
En multipliant par $\frac{1}{n!}$ on a :
$\frac{1}{n!} \int_{\lambda}^{+\infty} e^{-x} x^n dx = -e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} \int_{\lambda}^{+\infty} e^{-x} x^{n+1} dx$

Donc avec l'hypothèse de récurrence et la définition de $X \hookrightarrow P(\lambda)$:

$P(X \leq n) = -P(X = n+1) + \frac{1}{(n+1)!} \int\limits_{\lambda}^{+\infty} e^{-x} x^{n+1} dx$

$\Rightarrow \frac{1}{(n+1)!} \int\limits_{\lambda}^{+\infty} e^{-x} x^{n+1} dx = P(X \leq n) + P(X = n+1)$

Mais $(X \leq n) \cup (X = n+1) = (X \leq n+1)$ et $(X \leq n)$ et $(X = n+1)$ sont incompatibles, donc $P(X \leq n) + P(X = n+1) = P(X \leq n+1)$

Finalement : $\frac{1}{(n+1)!} \int\limits_{\lambda}^{+\infty} e^{-x} x^{n+1} dx = P(X \leq n+1)$ et on a bien l'hypothèse de récurrence au rang suivant.

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \ , \ P(X \leq n) = \frac{1}{n!} \int\limits_{\lambda}^{+\infty} e^{-x} x^n dx}$

2) Notons $A_n = (X \leq n)$, alors comme $X(\omega) \leq n \Rightarrow X(\omega) \leq n+1$ on a : $A_n \subset A_{n+1}$

(A_n) est donc une suite croissante d'événements.

On a donc par le théorème de continuité croissante : $P\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} P(A_n)$

Mais $\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} (X \leq n) = \Omega$ Comme $P(\Omega) = 1$ alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} P(X \leq n) = 1$

Avec la question 1), on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n!} \int\limits_{\lambda}^{+\infty} e^{-x} x^n dx = 1$ et on en déduit : $\boxed{u_n = \int\limits_{\lambda}^{+\infty} e^{-x} x^n dx \sim n!}$

Remarque : on peut ne pas utiliser le théorème de continuité croissante et utiliser le DSE de exp

3) On sait d'après le cours que $\forall t \in \mathbb{R} \ , \ G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$

Alors : $\boxed{G_X(1) = 1}$ (comme pour toute fonction génératrice) et $\boxed{G_X(-1) = e^{-2\lambda}}$

4) Par définition de G_X on a :

$G_X(1) + G_X(-1) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(X = n) + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n P(X = n) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \big(1 + (-1)^n\big) P(X = n)$

Comme $1 + (-1)^n = \begin{cases} 2 \text{ si } n \text{ pair} \\ 0 \text{ si } n \text{ impair} \end{cases}$ alors : $G_X(1) + G_X(-1) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} 2P(X = 2n)$

Donc $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(X = 2n) = \frac{G_X(1) + G_X(-1)}{2} = P(X \text{ pair})$

Avec le résultat de 3) : $\boxed{P(X \text{ pair}) = \frac{1 + e^{-2\lambda}}{2}}$

5) Comme $Y(\Omega) = \{1, 2\}$, on remarque que : $(XY pair) = (Y = 2) \cup \Big((Y = 1) \cap (X pair)\Big)$

Comme $(Y = 2)$ et $\Big((Y = 1) \cap (X pair)\Big)$ sont incompatibles alors :

$P(XY pair) = P(Y = 2) + P\Big((Y = 1) \cap (X pair)\Big)$

Comme X et Y sont indépendantes : $P(XY pair) = P(Y = 2) + P(Y = 1) P(X pair)$

Comme $Y \hookrightarrow U(\{1, 2\})$ alors $P(Y = 1) = P(Y = 2) = \frac{1}{2}$ et avec le résultat du 4) :

$P(XY pair) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1+e^{-2\lambda}}{2} = \frac{3+e^{-2\lambda}}{4}$

Bilan : $\boxed{P(XY pair) = \frac{3+e^{-2\lambda}}{4}}$

Exercice 2

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.

1) Rappeler la définition d'un produit scalaire et du produit scalaire canonique de $M_2(\mathbb{R})$.

Par la suite $E = M_2(\mathbb{R})$ et le produit scalaire utilisé, noté $<,>$, est le produit scalaire canonique.

On pose $F = \{\begin{pmatrix} a-c & c \\ b & b+c \end{pmatrix} \quad (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$

2) Donner une base de F.

3) Donner la dimension de $F^\perp$ et donner une base de $F^\perp$.

Soit $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

4) Déterminer la distance de P à F ?

---

1) Voir cours

2) $\begin{pmatrix} a-c & c \\ b & b+c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

On pose $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Alors : $F = Vect(e_1, e_2, e_3)$.

De plus $ae_1 + be_2 + c_3 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} a-c & c \\ b & b+c \end{pmatrix} = (0) \Rightarrow a-c = c = b = b+c = 0 \Rightarrow a = b = c = 0$ donc (e_1, e_2, e_3) est libre.

(e_1, e_2, e_3) est libre et génératrice de F donc c'est une base de F.

3) D'après 2) $dim(F) = 3$, donc $dim(F^\perp) = dim(M_2(\mathbb{R})) - dim(F) = 4 - 3 = 1$.

On a : $\boxed{dim(F^\perp) = 1}$

Par linéarité du produit scalaire et comme (e_1, e_2, e_3) est une base de F :

$$M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in F^{\perp} \Leftrightarrow \begin{cases} < M, e_1 >= 0 \\ < M, e_2 >= 0 \\ < M, e_3 >= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = -d \\ b = -d \end{cases} \Leftrightarrow M = d\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

En posant $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ on a : $\boxed{F^{\perp} = Vect(A)}$

4) Si on note Q le projeté orthogonal de P sur $F^{\perp}$ alors $d(P, F) = ||Q||$
Comme $P \in F^{\perp}$ alors $Q = P$ donc $\boxed{d(P, F) = \sqrt{3}}$

Planche 12. ccINP *(Valentin P.)*

Exercice 1

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On pose : $\begin{array}{cccc} \phi & : & M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ & & M & \longmapsto & AM \end{array}$

1) Montrer que ϕ est un endomorphisme.

2) Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$: ϕ^k

3) Exemple : dans ce 3) uniquement, on prend $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

On pose $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

On pose $B = (E_1, E_2, E_3, E_4)$

3) a) Déterminer la matrice de ϕ relativement à B.

3) b) Calculer $det(\phi)$ et $tr(\phi)$

4) Quel est le lien entre A inversible et ϕ inversible ?

5) Montrer que si A est une matrice de symétrie alors ϕ est une symétrie.

6) Montrer que si $rg(A) \geq 1$ alors $rg(\phi) \geq n$

7) Dans ce 7) on suppose que $n = 2$. Montrer alors que : $rg(\phi) = 2rg(A)$

8) Montrer que : $sp(\phi) = sp(A)$

9)

a) Montrer que si A est diagonalisable alors : $det(\phi) = det(A)^n$

b) Peut-on généraliser ce résultat avec A quelconque ?

Exercice 2

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int\limits_n^{+\infty} e^{-t^2} dt$

1) Montrer la convergence de I_n.

2) Déterminer la nature de $\sum I_n$

3) Déterminer la nature de $\sum nI_n$

Mines télécom

Planche 13. Mines-Télécom (Audric N.)

Exercice 1

Soient $(A, B) \in M_n(\mathbb{C})$ On pose $B^2 = A$

a) Montrer que si B est diagonalisable alors A est diagonalisable.

b) Si A est diagonalisable, B est elle nécessairement diagonalisable ?

c) Et si A est inversible, est-ce que A diagonalisable implique B diagonalisable ?

Exercice 2

a) Montrer que : $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{exp(-nx)}{1+n^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et C^1 sur $\mathbb{R}^+\backslash\{0\}$

b) S est-elle dérivable en 0 ?

Planche 14. Mines-Télécom (Nathan I.)

Exercice 1

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On considère p positions différentes pour un mobile.

A chaque instant $k \in \mathbb{N}$, le mobile se trouve à la position $S_k \in [\![1; p]\!]$.

On admet que S_k est une variable aléatoire.

Entre deux instants, le mobile change forcément de position et ce, de manière équiprobable.

On pose : $\forall k \in \mathbb{N}$, $X_k = \begin{pmatrix} P(S_k = 1) \\ P(S_k = 2) \\ \vdots \\ P(S_k = p) \end{pmatrix}$

1) Trouver $A \in M_p(\mathbb{R})$ telle que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $X_{k+1} = AX_k$

2) La matrice A est-elle diagonalisable ?

3) Préciser les valeurs propres de A.

4) Déterminer $\lim\limits_{k \to +\infty} X_k$

Exercice 2
Soit $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ -1 \leq x \leq y \leq 1\}$ et $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ -1 < x < y < 1\}$

On pose : $\forall (x,y) \in A \ , \ f(x,y) = (x-y)^3 - 6xy$

1) a) Montrer que A est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$.

1) b) Montrer que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

2) Déterminer les extremums globaux de f sur A.

Planche 15. Mines-Télécom (Yoan C.)

Exercice 1
Soit $x \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On pose la matrice de $M_n(\mathbb{C})$ suivante :

$$A_n(x) = \begin{pmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1+x^2 & x \\ 0 & \dots & 0 & x & 1+x^2 \end{pmatrix}$$

Calculer $det(A_n(x))$

Exercice 2
Une urne contient 2 boules blanches et une boule rouge.
On effectue des tirages avec remise. On suppose que les tirages sont indépendants et équiprobables.
Il y a deux joueurs A et B. Chaque joueur tire une boule à tour de rôle et A commence.
La partie se termine quand deux boules blanches sont tirées d'affilées pour la première fois.
Le vainqueur est celui qui tire la deuxième boule blanche de la série.

Quelle est la probabilité que A gagne ?

Planche 16. Mines-Télécom (Tom B.)

Exercice 1
On pose : $f(x) = ln(1+x+x^2)$

a) Donner le domaine de définition de f.
f est-elle continue ? C^1 ? C^∞ sur son domaine ?

b) Déterminer le DSE_0 de la fonction f

a) • $1+x+x^2=0$ a pour discriminant $\Delta=1-4=-3<0$, donc $1+x+x^2$ est de signe constant, donc $1+x+x^2>0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ et donc
$\boxed{\text{le domaine de définition de } f \text{ est } \mathbb{R}}$

• $\boxed{f \text{ est continue et même } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}}$ comme composée de fonctions C^∞.

b) On a : $\forall x\in\mathbb{R}$, , $f'(x)=\frac{1+2x}{1+x+x^2}=\frac{1+2x}{(x-j)(x-j^2)}=\frac{1}{x-j}+\frac{1}{x-j^2}$
avec $j=exp(\frac{2i\pi}{3})$, $j^2=\overline{j}$ et $1+j+j^2=0$

Alors : $f'(x)=\frac{-1}{j}\frac{1}{1-\frac{x}{j}}-\frac{1}{\overline{j}}\frac{1}{1-\frac{x}{\overline{j}}}$
On utilise le DSE_0 : $\frac{1}{1-u}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u^n$ valable pour $u\in\mathbb{C}$ tel que $|u|<1$

On obtient, pour $x\in]-1,1[$: $f'(x)=\frac{-1}{j}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{j^n}-\frac{1}{\overline{j}}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{\overline{j}^n}$
ou encore $f'(x)=-\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{j}\frac{x^n}{j^n}+\overline{\frac{1}{j}\frac{x^n}{j^n}}\right)=-2Re\Big(\frac{-1}{j}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{j^n}\Big)=-2Re\Big(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{j^{n+1}}\Big)$
Donc $f'(x)=-2Re\big(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}exp(-(n+1)\frac{2i\pi}{3})x^n\big)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}-2cos(-(n+1)\frac{2\pi}{3})x^n$

On peut intégrer un DSE_0 et comme $f(0)=0$ alors :
$$\boxed{\forall x\in]-1,1[\ ,\ f(x)=ln(1+x+x^2)=-\sum_{n=0}^{+\infty}2cos(\frac{2(n+1)\pi}{3})\frac{x^{n+1}}{n+1}}$$

Exercice 2
Soit $(E,<,>)$ un espace préhilbertien et $u\in L(E)$ vérifiant : $\forall x\in E$, $<u(x),x>=0$

1) a) Montrer que $\forall(x,y)\in E^2$, $<u(x),y>=-<x,u(y)>$

1) b) Montrer que : $Ker(u)=(Im(u))^\perp$

2°) Montrer que si B une base orthonormée alors la matrice $M_B(u)$ de u relativement à B est antisymétrique.

---

1) a) Par propriété de u :
$<u(x+y),x+y>=0$
$\Rightarrow<u(x)+u(y),x+y>=0$
$\Rightarrow \underbrace{<u(x),x>}_{=0}+<u(x),y>+<u(y),x>+\underbrace{<u(y),y>}_{=0}=0$
$\Rightarrow<u(x),y>=-<x,u(y)>$

On a donc: $\boxed{\forall(x,y)\in E^2\ ,\ <u(x),y>=-<x,u(y)>}$

1) b) • Soit $x \in ker(u)$
Soit $y \in Im(u)$. Alors on écrit $y = u(z)$ et on a :
$< x, y >=< x, u(z) >= - < u(x), z >= - < 0_E, z >= 0_E$ puisque $x \in ker(u) \Rightarrow u(x) = 0_E$

On a : $\forall y \in Im(u)$, $< x, y >= 0$ donc $x \in (Im(u))^{\perp}$

On a donc $ker(u) \subset (Im(u))^{\perp}$

• Soit $x \in (Im(u))^{\perp}$
Alors $\forall y \in E$, $< x, u(y) >= 0$ donc $< u(x), y >= 0$
En particulier, si on prend $y = u(x)$, alors $< u(x), u(x) >= 0$ donc $u(x) = 0_E$ et donc $x \in ker(u)$
On a donc $(Im(u))^{\perp} \subset ker(u)$

• On a les deux inclusions pour montrer que $ker(u) = (Im(u))^{\perp}$

2°) Soit $A = M_B(u) = (a_{i,j})$ la matrice de u relativement à B.

On remarque que : $a_{i,j} =< u(e_j), e_i >$, donc le 1) a) donne :
$a_{i,j} =< u(e_j), e_i >= - < u(e_i), e_j >= -a_{j,i}$ et donc $\boxed{M_B(u) \text{ est antisymétrique.}}$

Planche 17. Akram M.

Exercice 1
Soit $f : x \mapsto \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}} dt$

a) Déterminer le domaine de définition D de f.

b) Montrer que f est C^{∞} sur D.

c) Déterminer la limite en $+\infty$ de f

---

a) Posons : $\begin{array}{cccc} F & : & \mathbb{R} \times I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,t) & \mapsto & \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}} \end{array}$ avec $I = [0, +\infty[$ pour avoir : $f(x) = \int\limits_I F(x,t)dt$

• Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto F(x,t)$ est continue sur I, l'intégrale $f(x)$ pose donc problème en $+\infty$.

• Si $x < 0$ alors $\lim\limits_{t \to +\infty} F(x,t) = +\infty$, donc $F(x,t) \geq 1 > 0$ au voisinage de $t = +\infty$, donc $\int\limits_I F(x,t)dt$ est divergente.

• Si $x = 0$: $F(x,t) = F(0,t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \sim \frac{1}{t} > 0$, et comme $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ est divergente, par équivalent, $f(0)$ est divergente.

• Si $x > 0$, $F(x,t) = o(\frac{1}{t^2})$ pour t au voisinage de $+\infty$ et donc, par négligeabilité, comme $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, $f(x)$ est convergente.

• BILAN : $\boxed{\text{Le domaine de } f \text{ est } D =]0,+\infty[}$

b) Soit $a > 0$.
F est C^∞ sur son domaine et $\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times I$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\frac{\partial^k F}{\partial x^k}(x,t) = \frac{(-t)^k}{\sqrt{1+t^2}} e^{-xt}$

On a $\forall (x,t) \in [a,+\infty[\times I$, $\left| \frac{\partial^k F}{\partial x^k}(x,t) \right| \leq \frac{t^k}{\sqrt{1+t^2}} e^{-at}$

Comme $t \mapsto \frac{t^k}{\sqrt{1+t^2}} e^{-at}$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$ et que au voisinage de $+\infty$: $\frac{t^k}{\sqrt{1+t^2}} e^{-at} = o(\frac{1}{t^2})$ alors $t \mapsto \frac{t^k}{\sqrt{1+t^2}} e^{-at}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ donc par comparaison : $t \mapsto \frac{\partial^k F}{\partial x^k}(x,t)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a : $\begin{cases} \forall t \in [0,+\infty[\ , \ x \mapsto f(x,t) \text{ est de classe } C^n \text{ sur } [a,+\infty[\\ \forall x \in [a,+\infty[\ , \ \forall k \in [\![0,n-1]\!] \ , \ t \mapsto \frac{\partial^k F}{\partial x^k}(x,t) \text{ est CPM et intégrable sur } [0,+\infty[\\ \forall x \in [a,+\infty[\ , \ t \mapsto \frac{\partial^n F}{\partial x^n}(x,t) \text{ est continue par morceaux sur } [0,+\infty[\\ \forall (x,t) \in [a,+\infty[\times [0,+\infty[\ , \ \left| \frac{\partial^k F}{\partial x^n}(x,t) \right| \leq \frac{t^n}{\sqrt{1+t^2}} e^{-at} \\ \text{ avec } t \mapsto \frac{t^n}{\sqrt{1+t^2}} e^{-at} \text{ intégrable sur } [0,+\infty[\end{cases}$

On peut donc appliquer la généralisation du théorème de dérivation pour les intégrales à paramètres et on en déduit que f est de classe C^n sur $[a,+\infty[$

Comme $\bigcup\limits_{a>0} [a,+\infty[= D$ et que la dérivation est une notion locale alors f est de classe C^n sur D.
Comme ce résultat est valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ alors f est C^∞ sur D.

Bilan : $\boxed{f \text{ est } C^\infty \text{ sur } D}$

c) On a : $\begin{cases} \forall t \in]0,+\infty[\ , \ F(x,t) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \\ t \mapsto 0 \text{ est continue par morceaux sur }]0,+\infty[\\ \forall (x,t) \in [1,+\infty[\times]0,+\infty[\ , \ |F(x,t)| \leq \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} e^{-t} \\ \text{ avec } t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} e^{-t} \text{ intégrable sur }]0,+\infty[\end{cases}$

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée à paramètre continue et on obtient :

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^{+\infty} F(x,t)dt = \int_0^{+\infty} \lim_{x \to +\infty} F(x,t)dt$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = \int_0^{+\infty} 0 dt = 0$$

On a donc : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0}$

Exercice 2

Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant une même loi binomiale de paramètre $(n, \frac{1}{2})$. Soit M la matrice $\begin{pmatrix} X_1 & 1 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}$

a) En développant de deux manières le polynôme $(1+X)^{2n}$ montrer que : $\sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k}\right)^2 = \binom{2n}{n}$

b) Calculer la probabilité de l'événement $(X_1 = X_2)$

c) Quelle est la probabilité que M soit diagonalisable ?

---

a) D'une part, par le binôme de newton : $(1+X)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} X^k$

D'autre part : $(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} X^\ell\right) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{\ell} X^{k+\ell}$

Si on ne regarde que le terme de degré n : $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k}\right)^2$

On a donc : $\boxed{\sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k}\right)^2 = \binom{2n}{n}}$

b) $(X_1 = X_2) = \bigcup_{k=0}^{n} (X_1 = k \cap X_2 = k)$

Par incompatibilité : $P(X_1 = X_2) = \sum_{k=0}^{n} P(X_1 = k \cap X_2 = k)$

Par indépendance de X_1 et X_2 : $P(X_1 = X_2) = \sum_{k=0}^{n} P(X_1 = k)P(X_2 = k)$

Comme on connaît les lois de X_1 et X_2 : $P(X_1 = X_2) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}\right)^2$

On utilise le a) et on a : $\boxed{P(X_1 = X_2) = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}}$

c) Une matrice triangulaire a ses valeurs propres sur la diagonale donc X_1 et X_2 sont les valeurs propres de M

Si $X_1 \neq X_2$, M admet deux valeurs propres distinctes donc M est diagonalisable.

Si $X_1 = X_2$ alors M admet une unique valeur propre et n'est pas une matrice scalaire ($\neq \alpha I_n$), donc M n'est pas diagonalisable.

On a donc : M diagonalisable ssi $X_1 \neq X_2$ et donc

$$\boxed{P(\text{'M diagonalisable'}) = 1 - P(X_1 = X_2) = 1 - \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}}$$

Planche 18. Mines-Télécom (Nino D.)

Exercice 1

Soit $\beta \in]0,1[$ et $x > 0$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(x) = \frac{1}{n^\beta} - \frac{1}{(n+x)^\beta}$

1) Donner un équivalent de $u_n(x)$ lorsque $n \to +\infty$

2) Montrer que : $S : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ est bien définie sur $\mathbb{R}^{+*}$

3) Montrer que : $S : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$

4) `Déterminer` $\lim\limits_{x \to 0^+} S(x)$

4) `Déterminer` $\lim\limits_{x \to +\infty} S(x)$

Exercice 2

On donne la fonction $C_X(t) = \frac{2t}{3-t}$

a) Montrer que C_X est la fonction génératrice d'une variable aléatoire X dont on donnera la loi.

b) Déterminer l'espérance et la variance de X.

c) Déterminer la loi de $Y = X - 1$, son espérance et sa variance.

d) ????

Planche 19. Mines-Télécom (Lauréana P.)

Exercice 1

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $\{-n, -(n-1), \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots, n-1, n\}$
Soit $Y = |X|$

1) Déterminer la loi conjointe de (X, Y)

2) Déterminer la loi de Y.

3) Déterminer $E(X)$, $E(Y)$ et $cov(X, Y)$

4) X `et` Y `sont-elles indépendantes ?`

Exercice 2

Soit φ une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ vérifiant : $\begin{cases} \varphi(u) \underset{u=0}{=} \alpha + o(1) \\ \varphi(u) \underset{u\to+\infty}{=} \ell + o(1) \end{cases}$ avec $(\alpha, \ell) \in \mathbb{R}^2$

On considère $f : x \mapsto \int\limits_0^{+\infty} \frac{\varphi(u)}{u^2+x^2} du$

1) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$

2) Simplifier, pour $x > 0$: $\int\limits_0^1 \frac{1}{u^2+x^2} du$ et $\int\limits_0^1 \frac{u}{u^2+x^2} du$

3) Montrer que : $\left| \int\limits_1^{+\infty} \frac{\varphi(u)}{u^2+x^2} du \right| \leq K$ avec K indépendant de x

4) Montrer que : $f(x) = \frac{\ell\pi}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$

5) Trouver un développement asymptotique en 0 du même genre qu'au) 4.

6) ????

Planche 20. Mines-Télécom (Swann L.)

Exercice 1

????????????

Exercice 2

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose : $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

1) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

2) Trouver un équivalent de S_n

3) On pose $u_n = \frac{(-1)^n}{S_n+(-1)^n}$. Etudier $\sum u_n$

Planche 21. Mines-Télécom (JeSaisPlusQui)

Exercice 1

1) Trouver les solutions développable en série entière en 0 de : $\begin{cases} xy''(x) + 2y'(x) - xy(x) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

2) Résoudre $(E) \Leftrightarrow xy''(x) + 2y'(x) - xy(x) = 0$ sur $]0, +\infty[$

3) Résoudre $xy''(x) + 2y'(x) - xy(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 2

Que dire de $A \in S_n(\mathbb{R})$ vérifiant : $A^5 + A^4 + A^3 + A^2 + A + I_n = 0_{M_n(\mathbb{R})}$?

Centrale

Centrale : mathématiques 1

Planche 22. Centrale Math 1 *Tom B.*

On s'intéresse à une série `entière` de la forme $S(t) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n t^n$

Q1) On suppose que $\sum a_n$ est convergente.
Montrer que : $\lim\limits_{t\to 1} S(t) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n$ dans les cas suivants

$$\begin{cases} i)(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est à termes positifs ou nuls} \\ ii)(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissantes et la série } \sum a_n \text{ est alternée} \end{cases}$$

Q2) Application : Calculer $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

`Q3) Calculer` $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

Q4)

Planche 23. Centrale Math 1 *Nino D.*

On note $K = [0,1] \times [0,1]$ et $U =]0,1[\times]0,1[$
On cherche à étudier : $f : (x,y) \mapsto xy\sqrt{(1-x)(1-y)}$

1) Déterminer le domaine de définition de f, noté D_f.
Représenter D_f graphiquement.

2) Montrer que f admet un maximum et un minimum globaux sur K.

3) Déterminer les extremums locaux de f.

Centrale : mathématiques 2

Planche 24. Centrale Math 2 *Tom B.*

On pourra utiliser **numpy**, **numpy.random**

On considère un ascenseur à p étages. Au rez de chaussée, n personnes montent.
Chaque personne descend au hasard et indépendamment des autres à un étage.
On note X la variable aléatoire comptant le nombre d'arrêts de l'ascenseur.

Q1) Écrire un programme de paramètre (n, p) simulant le nombre d'arrêts de l'ascenseur.

On pourra utiliser **rd.randint(a,b)** renvoyant un entier aléatoire de l'intervalle $[\![a, b]\!]$

Q2) Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, on note X_i la variable aléatoire représentant si l'ascenseur s'arrête ou non à l'étage i.
On a donc $X_i = 1$ si une personne ou plus descend à l'étage i et $X_i = 0$ si aucune ne descend.

a) Donner la loi de X_i

b) Donner le lien entre X et les X_i, puis calculer l'espérance de X en fonction de n et p

c) Calculer $\lim\limits_{p \to +\infty} E(X)$

d) Écrire un programme qui, pour $3 \leq p \leq 20$ effectue 1000 tirages et renvoie une approximation de $E(X)$.
Ceci vérifie-t-il le résultat théorique précédent ?

Q3) Pour deux ensembles finis de cardinal respectivement a et b éléments, on note $S_{a,b}$ le nombre de surjections entre ces deux ensembles.
$S_{a,b}$ est le nombre de surjections de $[\![1, a]\!]$ dans $[\![1, b]\!]$

Q3) a) Exprimer la loi de X à l'aide de la famille $(S_{a,b})_{(a,b) \in \mathbb{N}^2}$
Q3) b) Calculer $S(a, b)$ dans le cas $b > a$
Q3) c) Calculer $S(a, 1)$, $S(a, 2)$ et $S(a, a)$
Q3) d) Calculer $S(a + 1, a)$
Q3) e) On suppose $a > 1$ et $b > 1$. Montrer que :
$S(n, b) = b\big(S(a - 1, b) + S(a - 1, b - 1)\big)$
Q3) f) Ecrire une fonction Python, utilisant les résultats précédents, permettant de calculer $S(a, b)$
Q3) g) Avec Python, calculer $E(X)$ à l'aide de Q3) a) et Q3) f)
Comparer avec le $E(X)$ théorique.

Planche 25. Centrale Math 2 *Nino D.*

Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$
On veut montrer qu'il existe : L matrice triangulaire inférieure telle que : $A = LL^T$

1) a) Dans les cas suivant, calculer LL^T : $L = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

1) b) En admettant A inversible, quel avantage apporter l'écriture $A = LL^T$ pour résoudre un système de la forme $AX = Y$?

2) Soit $A = (a_{i,j}) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

On définit $L = (\ell_{i,j})$, triangulaire inférieure, par :
$\ell_{1,1} = \sqrt{a_{1,1}}$ et $\forall i \in [\![2, n]\!]$, $\ell_{i,1} = \frac{a_{i,1}}{l_{1,1}}$ ce qui permet de connaître la première colonne

Quand on connaît les $j-1$ première colonne de L (avec $j \in [\![2, n]\!]$), on détermine la j ième par : $\ell_{j,j} = \sqrt{a_{j,j} - \sum\limits_{k=1}^{j-1} \ell_{j,k}^2}$ et $\forall i \in [\![j+1, n]\!]$, $\ell_{i,j} = \dfrac{a_{i,j} - \sum\limits_{k=1}^{j-1} \ell_{j,k}\ell_{i,k}}{\ell_{j,j}}$

2) a) Implémenter L en fonction de A à l'aide d'une fonction Python.

2) b) Tester avec les matrices du 1°).

2) c) Tester avec A telle que les $a_{i,j} = \begin{cases} 4 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } |i-j| > 1 \\ 1 \text{ si } |i-j| = 1 \end{cases}$

3) Soit L triangulaire inférieure et inversible, on pose : $A = LL^T$comme précédemment.

3)a) Quel est le lien entre $det(A)$ et $det(L)$?

3)b) Montrer que les valeurs propres de A sont positives ou nulles.

3)c) On note u l'endomorphisme associé à A dans $(\mathbb{R}^n, <,>)$ euclidien classique, montre que : $< u(x), x > \geq 0$

4) Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

4)a) Montrer que, en posant $\forall (X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $(X|Y) = X^T AY$ alors on définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

On note $B = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $B' = (f_1, \ldots, f_n)$ la base orthonormée pour $(.|.)$ obtenue en appliquant l'algorithme de Schmidt à B.

4)b)) Quelle est la forme de P la matrice de passage de B à B' ?

4)c) Calculer $P^T AP$

3)d) Montrer qu'il existe L triangulaire inférieure telle que $A = LL^T$

3)i) Démontrer que si on impose que les coefficients diagonaux de L soit positifs alors L est unique.

Mines-Ponts

Planche 26. Mines-Ponts (Théo) C.

Exercice 1

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On considère p urnes numérotées de 1 à p.
L'urne i contient i boules blanches et $p-i$ boules noires.
On choisit au hasard et de manière équiprobable une urne i et on tire, avec remise et de manière équiprobable, n boules dans l'urne i.
On note A_i l'événement : "le tirage s'effectue dans l'urne i"
On note N_n le nombre de boules blanches obtenues.

1) Déterminer $P_{A_i}(N_n = k)$

2) Déterminer $P(N_n = k)$

3) Déterminer $E(N_n)$ sous forme simplifier.

4) Montrer que : $\lim\limits_{p \to +\infty} P(N_n = k) = \binom{n}{k} \int\limits_0^1 x^k (1-x)^{n-k} dx$ Calculer cette limite.

Exercice 2

Soit $(E, <,>)$ un espace euclidien et $u \in S(E)$ non nul.

On pose : $\begin{array}{cccc} f & : & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & ||x||^2 - < u(x), x >^2 \end{array}$

1) Montrer que : f n'est pas minorée.

2) Montrer que : f majorée $\Leftrightarrow$ toutes les valeurs propres de f sont de même signe et non nulle.

3) Déterminer le maximum de f dans le cas ou $sp(u) \subset]0, +\infty[$

4) Dans cette question on suppose de nouceau que : $sp(u) \subset]0, +\infty[$, on pose : $\lambda = inf(sp(u))$ et $F = ker(u - \lambda Id_E)$
Montrer que la restriction de f à $F^{\perp}$ est majorée et déterminer son maximum.

Planche 27. Mines-Ponts (Mattéo B.)

Exercice 1

Soit φ tel que pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$, $\varphi(M) = U^{-1}MU$ avec $U \in GL_n(\mathbb{R})$.
$\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire canonique.

Q1) Montrer que si les colonnes de U forment une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$ et sont de même norme alors $\varphi \in O(M_n(\mathbb{R}))$

Q2) Montrer la réciproque.

Exercice 2

Soit n un entier non nul.
On donne $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Q1) Déterminer la limite de $I_n = \int\limits_0^1 nln(1 + t^n)dt$

Q2) Montrer que si f est une fonction continue sur $[0, 1]$, $\int\limits_0^1 nln(1 + t^n)f(t)dt$ converge quand n rend vers $+\infty$ et exprimer sa limite sous forme intégrale.
