Exercice 2 Léo

1) Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
Montrer qu'il existe $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$

2) Avec les notations du 1), démontrer l'unicité de B.

3) Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$ Montrer que $\exists (O,S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{+}(\mathbb{R})\ ,\ M = OS$

4) Montrer l'unicité du couple ci-dessus.

---

1) $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ donc A est symétrique réelle à valeurs propres strictement positives.
Par le théorème spectral, on a alors : $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in]0, +\infty[^n$ tels que : $A = PDP^T$ avec $D = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$
On pose $\Delta = diag(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ et on a facilement $D = \Delta^2$
Donc $A = P\Delta^2 P^T = P\Delta\Delta P^T = (P\Delta)(\underbrace{P^T P}_{I_n})(\Delta P^T) = (P\Delta P^T)^2$

On pose $B = P\Delta P^T$ on a $A = B^2$ avec $\sqrt{\lambda_k} > 0$ et B symétrique réelle, donc $B \in S_n^{++}$

Donc : $\boxed{\forall A \in S_n^{++}\ ,\ \exists B \in S_n^{++}\ ,\ A = B^2}$

2) Soit $C \in S_n^{++}$ vérifiant $C^2 = A$.
Comme C est symétrique réelle alors C est diagonalisable et donc $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{\mu \in sp(C)} Ker(C - \mu I_n)$

- $X \in Ker(C - \mu I_n)$

$\Rightarrow (C - \mu I_n)X = 0 \Rightarrow (C + \mu I_n)(C - \mu I_n)X = 0 \Rightarrow (C^2 - \mu^2 I_n)X = 0 \Rightarrow (A - \mu^2 I_n)X = 0$
Donc $Ker(C - \mu I_n) \subset ker(A - \mu^2 I_n)$

- Comme cette inclusion est vraie pour tout $\mu \in sp(C)$ et que $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{\mu \in sp(C)} Ker(C - \mu I_n)$, on en déduit que : $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{\mu \in sp(C)} Ker(A - \mu^2 I_n)$

Et donc que : $sp(A) = \{\mu^2\ ,\ \mu \in sp(C)\}$ et $\forall \lambda \in sp(A)\ ,\ Ker(C - \sqrt{\lambda} I_n) = ker(A - \lambda I_n)$

- Comme A et C commutent ($AC = C^2C = CC^2 = CA$) alors pour tout $\lambda \in Ker(A - \lambda I_n)$, $Ker(A - \lambda I_n)$ est stable par C.

Comme $Ker(C - \sqrt{\lambda} I_n) = ker(A - \lambda I_n)$ on a $C|_{ker(A-\lambda I_n)} = \sqrt{\lambda} Id_{ker(A-\lambda I_n)}$
C est donc défini de manière unique sur $ker(A - \lambda I_n)$
Comme A est diagonalisable $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{\lambda \in sp(A)} Ker(A - \lambda I_n)$ et donc C est défini de manière unique.

On en déduit $B = C$ et donc $\boxed{\text{il y a unicité de } B.}$

3) Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$.
- Posons $A = M^T M$ alors $A^T = (M^T M)^T = M^T (M^T)^T = M^T M = A$ donc A est symétrique réelle et par application du théorème spectral on a : $\exists P \in O_n(\mathbb{R})\ ,\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n)\ ,\ A = PDP^T$ avec $D = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = Diag(\lambda_k)$

Soit X_i un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i, alors :

$AX = \lambda_i X$
$\Rightarrow M^T MX = \lambda_i X$
$\Rightarrow X^T M^T MX = \lambda_i X^T X$
$\Rightarrow (MX)^T (MX) = \lambda_i X^T X$
$\Rightarrow ||MX||^2 = \lambda_i \, ||X||^2$
$\Rightarrow \lambda_i \geq 0$ puisque $X \neq 0$

On peut donc poser $d = Diag(\sqrt{\lambda_i})$ de telle sorte que $d^2 = D$ ("racine carrée de D")

On a alors, en insérant $PP^T = I_n$:

$M^T M = A = Pd^2 P^T = PddP^T = Pd(P^T P)dP^T = (PdP^T)(PdP^T) = S^2$ avec $S = PdP^T$

• On a, par construction, S symétrique réelle (car $S^T = (PdP^T)^T = PdP^T = S$).
De plus S est à valeurs propres positives vu la forme de d, donc $S \in S_n^+(\mathbb{R})$
Comme M est inversible alors : $det(M) \neq 0$ donc $det(A) = det(S^2) \neq 0$ et donc S est aussi inversible et on peut poser : $O = MS^{-1}$

• Vérifions que $O \in O_n(\mathbb{R})$
$O^T O = (MS^{-1})^T (MS^{-1}) = (S^{-1})^T M^T MS^{-1}$,
mais S et donc S^{-1} est symétrique et $M^T M = S^2$ donc
$O^T O = S^{-1} S^2 S^{-1} = I_n$ et on a bien $O \in O_n(\mathbb{R})$

• En repartant de $O = MS^{-1}$ on a $M = OS$ avec $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $M \in S_n^+(\mathbb{R})$

4) Soit $(O, S) \in O_n(\mathbb{R})^2 \times S_n^+(\mathbb{R})^2$ tel que $M = OS$
• Alors $M = OS \Rightarrow M^T M = (OS)^T (OS) = S^T O^T OS = SI_n S = S^2$
On a alors $S^2 = A$ avec $A = M^T M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$
On note a l'endomorphisme associée à A et s l'endomorphisme associé à S.
Alors a et s commutent de manière évidente puisque $AS = S^2 S = S^3 = SS^2 = SA$.

• Soit $E_\lambda = ker(a - \lambda Id)$ un sous espace propre de a.
Alors comme a et s commutent on a E_λ qui est stable par s.
La restriction de s à E_λ reste autoadjointe et donc s est diagonalisable sur E_λ.
Soit μ une valeur propre de $s|_{E_\lambda}$, alors $s|_{E_\lambda}^2 = a|_{E_\lambda} \Rightarrow \mu^2 = \lambda$ et comme λ et μ sont strictement positives on a : $\mu = \sqrt{\lambda}$
$s|_{E_\lambda}$ est donc diagonalisable sur E_λ avec une seule valeur propre possible : donc $s|_{E_\lambda} = \sqrt{\lambda} Id|_{E_\lambda}$
Finalement s est définie de manière unique sur tous les sous-espaces propres de a, ceux-ci formant une décomosition en somme directe de l'espace totale on a s qui est définie de manière unique.
On a donc l'unicité de S.
Comme $O = MS^{-1}$ alors O est elle aussi unique et on a terminé la démonstration.