Exercice a préparé, Augustin

Un joueur effectue une suite de Pile ou Face indépendants, la probabilité d'obtenir Pile est de $p \in]0,1[$, celle d'obtenir Face de $q = 1-p$.
On note N la variable aléatoire correspondant au rang du premier pile.
Lorsque $N = n$, on place n boules numérotées de 1 à n dans une urne.
Le joueur tire un boule `de manière équiprobable dans l'urne` et il gagne si elle est impaire.
On note X `la variable aléatoire correspondant à` la valeur de la boule tirée.

1) Montrer que : $\sum\limits_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int\limits_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2} dt$ pour $x \in]0,1[$

On admet de même que : $\sum\limits_{j=k+1}^{+\infty} \frac{x^{2j}}{2j} = \int\limits_0^x \frac{t^{2k+1}}{1-t^2} dt$ pour $x \in]0,1[$

2) Reconnaître la loi de N.

3) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X = 2k+1) = \sum\limits_{n=2k+1}^{+\infty} P(X = 2k+1|N = n)P(N = n)$

Montrer, en séparant en somme paire et impaire que :

$P(X = 2k+1) = \frac{p}{q}[\sum\limits_{j=k}^{+\infty} \frac{q^{2j+1}}{2j+1} + \sum\limits_{j=k+1}^{+\infty} \frac{q^{2j}}{2j}]$

4) On admet que : $\frac{1}{(1-t^2)(1-t)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} + \frac{2}{(1-t)^2}\right)$

Calculer $P(A)$ avec A l'événement le joueur gagne.

---

1) $\sum\limits_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$ a pour rayon de convergence 1 et on peut dériver terme à terme une série entière sur son intervalle ouvert de convergence.
Donc, pour $x \in]0,1[$, $\frac{d}{dx}\left(\sum\limits_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1}\right) = \sum\limits_{j=k}^{+\infty} x^{2j} = \frac{x^{2k}}{1-x^2}$ (série géométrique de raison $x^2 \in]0,1[$)

En intégrant entre 0 et $x \in]0,1[$, on a : $\boxed{\forall x \in]0,1[\ , \ \sum\limits_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int\limits_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2} dt}$

2) N est le temps d'attente du premier succès lors de n épreuves de Bernoulli successives, indépendantes et de même paramètre p. On a donc : $\boxed{N \hookrightarrow G(p)}$

3) • $(N = n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est le système complet d'événements associé à la variable aléatoire N.
Par la formule des probabilités totales sur ce système complet d'événements on a donc :
$\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X = 2k+1) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} P(X = 2k+1|N = n)P(N = n)$

Comme $P(X = 2k+1|N = n) = 0$ si $n < 2k+1$ (on ne peut pas tirer une boule qui n'est pas dans l'urne) alors : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \ , \ P(X = 2k+1) = \sum\limits_{n=2k+1}^{+\infty} P(X = 2k+1|N = n)P(N = n)}$

• Pour $n \geq 2k+1$, comme on a équiprobabilité $X|_{N=n} \hookrightarrow U([\![1;n]\!])$ et donc $P(X=2k+1|N=n) = \frac{1}{n}$.
Comme on connaît la loi de N, on sait que : $P(N=n) = pq^{n-1}$

On a donc $P(X=2k+1) = \sum\limits_{n=2k+1}^{+\infty} \frac{pq^{n-1}}{n} = \frac{p}{q} \sum\limits_{n=2k+1}^{+\infty} \frac{q^n}{n}$

En séparant les termes pairs des termes impairs ($n=2j$ ou $n=2j+1$) on a :

$$\boxed{P(X=2k+1) = \frac{p}{q}\Big(\sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{q^{2j}}{2j} + \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{q^{2j+1}}{2j+1}\Big)}$$

4) On reprend le calcul ci-dessus, alors avec le 1) et la somme admise :

$$P(X=2k+1) = \frac{p}{q}\Big[\int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t^2}dt + \int_0^q \frac{t^{2k+1}}{1-t^2}dt\Big] = \frac{p}{q}\Big[\int_0^q \Big(\frac{t^{2k}(1+t)}{(1-t)(1+t)}\Big] = \frac{p}{q}\int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t}dt$$

Comme $A = \bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} (X=2k+1)$ et que les événements $(X=2k+1)_{k\in\mathbb{N}}$ sont incompatibles alors :
$P(A) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} P(X=2k+1) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{p}{q}\int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t}dt$

Comme sur l'intervalle $[0,q]$ la suite de fonctions $(t \mapsto \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{p}{q}\frac{t^{2k}}{1-t})_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\frac{1}{(1-t^2)(1-t)}$ on peut intervertir la somme et l'intégrale et on a :

$$P(A) = \frac{p}{q}\int_0^q \frac{1}{(1-t^2)(1-t)}dt$$

En utilisant la décomposition en éléments simples admise :

$P(A)$
$= \frac{p}{q}\int_0^q \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} + \frac{2}{(1-t)^2}\Big)dt$
$= \frac{p}{4q}\Big[ln(1+t) - ln(1-t) + \frac{2}{1-t}\Big]_0^q$
$= \frac{p}{4q}\Big(ln(1+q) - ln(1-q) + \frac{2}{1-q}\Big)$ mais $q = 1-p$
$= \frac{p}{4q}ln(\frac{2-p}{p}) + \frac{1}{2(1-p)}$

On a donc : $\boxed{P(A) = \frac{p}{4q}ln(\frac{2-p}{p}) + \frac{1}{2(1-p)}}$