

ORAUX BLANCS PSI, Mr Charitat : jeudi 28 Mai

Romain C.

Exercice a préparé

Soit $E = \mathbb{R}^3$.

Soit $f \in L(\mathbb{R}^3)$ tel que $f^3 = Id_E$ et $f \neq Id_E$.

- 1) a) Montrer que $f \in L(\mathbb{R}^3) \Rightarrow sp(f) \neq \emptyset$
- 1) b) Montrer que 1 est valeur propre de f .

- 2) Montrer que $E = \ker(f - Id_E) \oplus \ker(f^2 + f + Id_E)$

- 3) a) Montrer que $\ker(f^2 + f + Id_E) \neq \{0_E\}$
- 3) b) Montrer que l'on peut choisir $a \in \ker(A - Id_E)$ et $b \in \ker(f^2 + f + Id_E)$ avec $a \neq 0_E$ et $b \neq 0_E$
- 3) c) Montrer que $B = (a, b, f(b))$ est une base B de E .
- 3) d) Déterminer $M_B(f)$

- 4) Montrer qu'il existe une base B' de E telle que la matrice de f relativement à B' s'écrive

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

Soit $I =]0, +\infty[$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha < 1$.

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in I$, $f_n(x) = x(1 + n^\alpha e^{-nx})$

- 1) Montrer la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction f que l'on précisera.

- 2) Montrer que $y \mapsto ye^{-y}$ est bornée sur I

- 3) Montrer la convergence uniforme de la suite (f_n) sur I .

- 4) Calculer $\int_0^1 x(1 + n^\alpha e^{-nx}) dx$

Emie M.

Exercice a préparé

On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 \ln(1+t^n) dt$

- 1) Montrer que I_n est bien définie.
 - 2) Calculer I_0 , I_1 et I_2
 - 3) Montrer que la suite (I_n) converge et déterminer sa limite.
 - 4) a) Effectuer dans I_n le changement de variable $u = t^n$
 - 4) b) Montrer que : $I_n \sim \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u} du$
 - 5) Sachant que : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ montrer que : $I_n \sim \frac{\pi^2}{12n}$
-

Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \\ 4 & 12 & 5 \end{pmatrix}$

- a) Calculer le polynôme caractéristique de A .
 - b) A est-elle diagonalisable ? trigonalisable ?
 - c) Déterminer $(P, D) \in M_n(\mathbb{R}^2)$ vérifiant : P inversible et $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale.
On veut résoudre $X^2 = A$ d'inconnue $X \in M_3(\mathbb{R})$
Montrer que si X est solution alors A et X commutent.
 - d) Résoudre $X^2 = A$
-

Auguste B.

Exercice a préparé

On pose : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_{k,n} = \int_0^{+\infty} t^k e^{-nt} dt$

- 1) Montrer l'existence des $I_{k,n}$
- 2) a) Calculer $I_{n,0}$
- 2) b) Trouver une relation de récurrence entre les $I_{n,k}$
- 2) c) Calculer les $I_{k,n}$
- 3) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{n!}{n^{n+1}}$

Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$

- 4) a) Déterminer la nature de $\sum a_n e^n$
- 4) b) Déterminer la nature de $\sum a_n (-e)^n$
- 4) c) Donner le domaine de définition de $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$

Exercice 2

Soit $n \geq 2$ et $(A, B) \in M_n(\mathbb{R})$ telles que : $AB - BA = A$

On pose pour tout $X \in M_n(\mathbb{R})$, $f(X) = XB - BX$

- 1) Montrer que f est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$
 - 2) Calculer la trace de A puis la trace de A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$
-

Noé B.

Exercice a préparé

Soit $(E) \Leftrightarrow x(1-x)y''(x) + (1-3x)y'(x) - y(x) = 0$

1) Dans ce 1) on cherche les solutions DSE_0 de (E) .

Supposons que $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ a un rayon de convergence $R > 0$ et est une solution de E sur $] -R; R[$

a) Montrer que la suite a_p est constante.

b) Quelles sont les solutions DSE_0 de (E) ?

2) Pourquoi y-a-t-il d'autres solutions sur $]0, 1[$?

3) En utilisant $y(x) = \frac{z(x)}{x-1}$ trouver toute les solutions sur $]0, 1[$.

Exercice 2

Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{N} telles que :

$$\forall (k, n) \in \mathbb{N}^2, P(X = k \cap Y = n) = \begin{cases} \binom{n}{k} \frac{1}{2^n} p(1-p)^n & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) Déterminer la loi de Y , son espérance et sa variance.

2) Déterminer le DSE_0 de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$

3) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in]-1, 1[, \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n$

4) Déterminer la loi de X .

5) Les variables aléatoires X et Y sont-elle indépendantes ?

Eléna D.

Exercice a préparé

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et B une base de E .

On considère deux endomorphismes f et g de E tels que : $g \circ g = f$.

On suppose de plus que la matrice de f relativement à B est $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1) Trouver les valeurs propres de A et les vecteurs propres. A est-elle diagonalisable ?

2) a) On note e_1 un vecteur propre de f associé à la valeur propre 1, montrer que $g(e_1)$ un vecteur propre de f associé à la valeur propre 1.

2) b) On note e_3 un vecteur propre de f associé à la valeur propre 3, montrer que $g(e_3)$ un vecteur propre de f associé à la valeur propre 3.

3) g est-il diagonalisable ?

Exercice 2

On pose pour tout réel x : $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{te^{-tx}}{e^t-1} dt$

1) Déterminer le domaine de définition D de f .

2) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

3) Calculer $f(x-1) - f(x)$

4) Montrer que f est continue sur son domaine.

Mohamed D.

Exercice a préparé

On considère la série de fonction : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$

- Déterminer D le domaine de définition de f .
 - Pour $x \neq 0$, que dire de $f(\frac{1}{x})$?
 - Montrer que f est de classe C^1 sur D .
 - Montrer que : $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$
 - Déterminer $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$
 - Soit $x \in]0, 1[$. On pose $\forall t \geq 0$, $g(t) = \frac{x^t}{1+x^{2t}}$
Montrer que g est décroissante et en déduire un encadrement de $f(x)$ avec une intégrale de g .
En déduire un équivalent de $f(x)$ en 1^- (??)
 - En considérant $(1-x)f(x)$ pour $x \in]-1, 0[$ déterminer $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ (???)
-

Exercice 2

(a) Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ et P un polynôme annulateur de A .

Montrer que les valeurs propres de A sont racines du polynôme P .

(b) Existe-t-il une matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $tr(A) = 0$ et $A^2 + A^T = I_3$?

Elsa C.

Exercice a préparé

On pose $a = \ln(1 + \sqrt{2})$. On considère la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^a (sh(t))^n dt$

- Résoudre l'équation $sh(t) = 1$ en utilisant un bon changement d'inconnue.
 - Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 - Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}$, $ch^2(t) - sh^2(t) = 1$
 - Etablir la relation de récurrence : $\forall n \geq 2$, $nI_n + (n-1)I_{n-2} = \sqrt{2}$
 - En déduire un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.
 - Quelle est la nature de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} I_n$?
 - Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n I_n$ est convergente et que sa somme vaut $\int_0^1 \frac{1}{1+sh(t)} dt$
-

Exercice 2

Soit E et F deux \mathbb{R} espace vectoriel de dimension finie et G un sous espace vectoriel de E .

On pose : $A = \{u \in L(E, F), G \subset \ker(u)\}$

- Montrer que A est un sous espace vectoriel de $L(E, F)$
- Donner la dimension de A .

Elliot C.

Exercice a préparé

Soit $n \in \mathbb{N}$, on définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 \in]0; \pi[\\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(u_n) \end{cases}$$

1. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. (a) Étudier la convergence de la suite $\left(\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \right)_{n \in \mathbb{N}}$.
(b) On admet le théorème de Césaro :
si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors la suite $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$ converge également vers ℓ .
Étudier la série de terme général u_n .
3. Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum u_n z^n$.

Exercice 2

Soit E un espace euclidien et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Soit l'application f définie par : $\forall x \in E, f(x) = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$.

1. Montrer que f est un endomorphisme. Est-il injectif ? surjectif ?

On suppose de plus que B est une base orthogonale.

2. Montrer que f est symétrique. À quelle(s) condition(s) f est-il un projecteur ?

Yun J.

Exercice a préparé

1) Dans ce 1) on considère un entier naturel N non nul et un dé à N faces.

On note X_N le résultat du lancer du dé. On a donc $X_N(\Omega) = \llbracket 1, N \rrbracket$

On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, $\forall k \in X_N(\Omega)$, $P(X_N = k) = \alpha k$

a) Déterminer α

b) Déterminer $E(X_N)$

2) Dans ce 2) on considère Y une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$

a) Rappeler la loi de Y .

b) Donner, en la démontrant l'expression de G_Y la fonction génératrice de Y et son rayon de convergence.

c) Utiliser G_Y pour déterminer l'expression de $E(Y)$ et $V(Y)$

3) Dans ce 3) : Y est une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$
On lance alors un dé à Y faces dont la probabilité est proportionnelle au numéro de la face (cf 1)
et on note X le résultat.

a) Déterminer $X(\Omega)$

b) Déterminer pour $k \in X(\Omega)$ la valeur de $P(X = k)$ sous forme de série.

c) Déterminer $P(X = 1)$

d) Déterminer $P(X = 2)$

e) Donner une minoration de l'espérance de X .

4) X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 2

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -6 & 3 & -5 \\ -3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

a) Quelles sont les valeurs propres de A ?

b) A est-elle diagonalisable ?

c) Trouver deux vecteurs propres u et v de A , et un vecteur w , tels que (u, v, w) soit une base.

d) Montrer que A est trigonalisable.

Augustin G.

Exercice a préparé

Un joueur effectue une suite de Pile ou Face indépendants, la probabilité d'obtenir Pile est de $p \in]0, 1[$, celle d'obtenir Face de $q = 1 - p$.

On note N la variable aléatoire correspondant au rang du premier pile.

Lorsque $N = n$, on place n boules numérotées de 1 à n dans une urne.

Le joueur tire un boule de manière équiprobable dans l'urne et il gagne si elle est impaire.

On note X la variable aléatoire correspondant à la valeur de la boule tirée.

1) Montrer que :
$$\sum_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2^{j+1}} = \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2} dt \text{ pour } x \in]0, 1[$$

On admet de même que :
$$\sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{x^{2j}}{2^j} = \int_0^x \frac{t^{2k+1}}{1-t^2} dt \text{ pour } x \in]0, 1[$$

2) Reconnaître la loi de N .

3) Montrer que :
$$\forall k \in \mathbb{N}, P(X = 2k + 1) = \sum_{n=2k+1}^{+\infty} P(X = 2k + 1 | N = n) P(N = n)$$

Montrer, en séparant en somme paire et impaire que :

$$P(X = 2k + 1) = \frac{p}{q} \left[\sum_{j=k}^{+\infty} \frac{q^{2j+1}}{2^{j+1}} + \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{q^{2j}}{2^j} \right]$$

4) On admet que :
$$\frac{1}{(1-t^2)(1-t)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} + \frac{2}{(1-t)^2} \right)$$

Calculer $P(A)$ avec A l'événement le joueur gagne.

Exercice 2

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$

1) Déterminer le spectre de A .

2) A est elle diagonalisable ?

3) Réduire A

Léo M.

Exercice a préparé

On pose pour $n \geq 2$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, $u_n(x) = \frac{\ln(x)}{x^n \ln(n)}$

1) Déterminer le domaine de définition D de $\sum u_n(x)$.

On note $S = \sum_{n \geq 2} u_n$

2) Montrer que $\sum u_n$ ne converge pas normalement vers S sur D .

3) a) Montrer que pour $n \geq 2$ et $x \geq 1$: $\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \right| \leq \frac{1}{\ln(n+1)}$

3) b) En déduire que S est continue sur D .

4) S est-elle intégrable sur D ?

Si oui, donner la valeur de $\int_D S$ sous forme de série.

Exercice 2

1) Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Montrer qu'il existe $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$

2) Avec les notations du 1), démontrer l'unicité de B .

3) Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$ Montrer que $\exists (O, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^+(\mathbb{R})$, $M = OS$

4) Montrer l'unicité du couple ci-dessus.
