

ORAUX BLANCS PSI, Mr Charitat : 1 juin

Sujet A : Enoncé (MT)

Exercice 1

Soit $f : t \mapsto \ln(t)e^t$.

- a) Montrer que f est intégrable sur $]0, 1]$
- b) Démontrer que : $\int_0^1 \ln(t)e^t dt = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot n!}$

Exercice 2

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On pose : $f_A : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$
 $M \longmapsto AM$

- a) Montrer que f_A est un endomorphisme.
- b) Montrer que si $A = A^2$ alors f_A est un projecteur.
- c) Montrer que si $A^2 = I_n$ alors f_A est une symétrie.
- d) Montrer que : A est diagonalisable si et seulement si f_A est diagonalisable
- e) Montrer que : A et f_A ont même spectre.

Sujet B : Enoncé

Exercice a préparé

Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$

Soit $u \in L(E)$. On note $Z_u = \{v \in L(E), u \circ v = v \circ u\}$

Pour $\lambda \in \mathbb{C}$ on pose $E_\lambda = \ker(u - \lambda Id_E)$

On suppose que u admet n valeurs propres distinctes.

- 1) Montrer que Z_u est un espace vectoriel.
- 2) Montrer que, pour $v \in Z_u$, E_λ est stable par v .
- 3) Déterminer la dimension des sous-espaces propres de u .
- 4) Montrer que si $v \in Z_u$, alors tout vecteurs proprés de u est aussi vecteurs propres de v .
- 5) Montrer qu'il existe une base B de E telle que, $\forall v \in L(E)$:
 $v \in Z_u \Leftrightarrow M_B(v)$ est diagonale.
- 6) En déduire la dimension de Z_u .
- 7) Montrer que la famille $(Id_E, u, u^2, \dots, u^{n-1})$ libre dans $L(E)$ et en déduire une base de Z_u .

Exercice 2

On considère une urne contenant $n \geq 2$ boules numérotés de 1 à n indiscernables au toucher.

On tire deux boules simultanément et on note X le plus petit tirage et Y le plus grand.

- a) Calculer pour $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ la valeur $\mathbb{P}(X = i \cap Y = j)$
- b) Déterminer les lois marginales de X et Y .
- c) Calculer $\mathbb{E}(Y)$ l'espérance de Y .
- d) Calculer $\mathbb{E}(Y(Y - 1))$
- e) Déterminer $\mathbb{V}(Y)$ la variance de Y .

Sujet C : Énoncé

Exercice a préparé

Soit n un entier tel que $n \geq 2$.

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ le \mathbb{R} espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n . On pose : $\forall P \in E \quad \phi(P) = P'$

a) Montrer que ϕ est un endomorphisme de E .

b) Est-ce que ϕ est diagonalisable ?

c) Trouver une base B de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que la matrice de ϕ relativement à B soit de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d) Montrer que $I_{n+1} - A$ est inversible et calculer son inverse à l'aide des puissances de A .

e) Résoudre, dans $\mathbb{R}_n[X]$, l'équation d'inconnue $P : P - P' = X^2$

Exercice 2

Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, +\infty[, f_n(x) = x \exp(-\sqrt{nx})$.

a) La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle simplement ?

b) Calculer $\sup_{x \in [0, +\infty[} |f_n(x)|$

Que peut-on en déduire sur la suite (f_n) ?

c) Soit la série de fonctions $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

Cette série de fonctions converge-t-elle simplement ? uniformément ? normalement ? sur quel intervalle ?

Sujet D : Énoncé

Exercice a préparé

On considère une urne avec boules, indiscernable au touché, numérotées de 1 à 3.

On effectue une suite de tirages avec remise (indépendants).

Y est la variable aléatoire associée au nombre de tirages nécessaires pour obtenir 2 numéros différents.

Z est la variable aléatoire associée au nombre de tirages nécessaires pour obtenir les 3 numéros.

1) Déterminer la loi de Y

2) Identifier la loi de $Y - 1$ et en déduire l'espérance et la variance de Y .

3) Déterminer la loi du couple (Y, Z) .

4) Déterminer la loi de Z et l'espérance de Z .

Exercice 2

On considère $\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \sin(xt) dt$

- 1) Montrer que φ est définie sur \mathbb{R} .
- 2) Montrer que φ est continue et dérivable sur \mathbb{R} .
- 3) En déduire $\varphi'(x)$ et exprimer $\varphi(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

Sujet E : Énoncé

Exercice a préparé

On considère la série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+3}}{(3n+3)!}$

- a) Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.
- b) Calculer $f(x) + f'(x) + f''(x)$ sur $] -R; R[$
- c) Résoudre l'équation différentielle $y'' + y' + y = 0$
(On cherchera les solutions à valeurs réelles définies sur \mathbb{R})

d) Calculer $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!}$

Exercice 2

Soit une urne avec a boules blanches et b boules noires. On tire successivement n boules, avec remise à chaque tirage, de manière équiprobable.

Pour $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on note B_i l'événement : " i boules blanches ont été tirées".

- 1) Calculer la probabilité de l'événement B_i .
- 2) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2i} x^{2i} = \frac{(1+x)^n + (1-x)^n}{2}$
- 3) Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair de boules blanches ?

Sujet F : Énoncé

Exercice a préparé

On pose $\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\exp(-x(1+t^2))}{1+t^2} dt$

- 1) Montrer que φ est définie et continue sur $[0, +\infty[$
- 2) Montrer que φ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$
- 3) Calculer $\varphi(0)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$

On pose $A = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$

- 4) Montrer que A est convergente.
- 5) Exprimer, pour $x > 0$, $\varphi'(x)$ en fonction de A et des fonctions usuelles.
- 6) Calculer A

Exercice 2

Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de variable aléatoire indépendantes et suivant toute une loi de Bernoulli de paramètre p . Soit $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$

1) Déterminer la loi de S_n .

2) Calculer $\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k}$

Soit N une variable aléatoire telle que $N + 1$ suive une loi géométrique de paramètre p .

On considère une urne contenant une boule rouge et une boule verte indiscernable au toucher. On effectue N tirages avec remise et on note X le nombre de boules vertes tirées.

3) Déterminer la loi de X .

Sujet G : Énoncé

Exercice a préparé

On pose $E = \mathbb{R}[X]$ et $\forall (P, Q) \in E^2$, $\varphi(P, Q) = \int_0^{+\infty} e^{-t} P(t) Q(t) dt$

1) Montrer que l'intégrale définissant (P, Q) est bien convergente.

2) Montrer que φ définit un produit scalaire sur E .

3) Déterminer pour tout n entier, $I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^n dt$

4) Calculer $I = \inf_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3} \int_0^{+\infty} e^{-t} (t^3 - at^2 - bt - c)^2 dt$

5) Soit $n \geq 2$ et $H = \{P \in \mathbb{R}_n[X], \int_0^{+\infty} t e^{-t} P(t) dt = 0\}$

Montrer que H est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ et calculer la distance d entre $X - 1$ et H .

Exercice 2

Soit $n \geq 1$ et $E = M_n(\mathbb{R})$, $S_n(\mathbb{R}) = \{M \in E, M = M^t\}$ et $A_n(\mathbb{R}) = \{M \in E, M = -M^T\}$.

a) Montrer que $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.

b) Déterminer φ la projection sur $S_n(\mathbb{R})$ parallèlement à $A_n(\mathbb{R})$.
