

Planche 1.

Mathématiques.

N.B. : la calculatrice n'est pas autorisée.

Exercice.

On note $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées à 2 lignes et 2 colonne.

On définit dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application $\varphi(A, A') = \text{tr}(A^T A')$ où $\text{tr}(A^T A')$ désigne la trace du produit de la matrice A^T (transposée de A) par la matrice A' .

On note $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que \mathcal{F} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et donner une base de \mathcal{F} .
3. On se place dans l'espace préhilbertien $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire φ .
 - (a) Rappeler la définition de \mathcal{F}^\perp , l'orthogonal du sous-espace vectoriel \mathcal{F} . Déterminer alors une base de \mathcal{F}^\perp .
 - (b) Déterminer la projection orthogonale de la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur \mathcal{F}^\perp .
 - (c) Calculer la distance de J à \mathcal{F} .

Planche 1. Exercice(s) sans préparation.

1. Soit h la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \begin{cases} \frac{x - \arctan(x)}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Montrer que la fonction h est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

2. Résoudre sur \mathbb{R}_+^* l'équation différentielle :

$$(E) \quad xy' + 2y = \frac{x}{x^2 + 1}$$

3. Montrer que (E) possède une unique solution f définie et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .
4. Calculer $\int_0^1 f(x) dx$.

Indications.

Exercice.

1. On vérifie aisément les 4 axiomes du cours.

2. On remarque que $\mathcal{F} = Vect(I_2, K)$ avec $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

On peut donc affirmer que \mathcal{F} est un s.e.v de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et que (I_2, K) en est une famille génératrice. Cette famille est libre car I_2 et K non colinéaires. Ainsi, (I_2, K) base de \mathcal{F} .

3a. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Comme (I_2, K) base de \mathcal{F} , on a :

$$M \in \mathcal{F}^\perp \Leftrightarrow \varphi(M, I_2) = 0 \text{ et } \varphi(M, K) = 0 \Leftrightarrow a + d = 0 \text{ et } b - c = 0.$$

On en déduit que $\mathcal{F}^\perp = Vect(A, B)$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(A, B) étant une famille libre et génératrice, c'est une base de \mathcal{F}^\perp .

3b. On remarque que $J = I_2 + B$ avec $I_2 \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}^\perp$.

Ainsi, le projeté orthogonal de J sur \mathcal{F}^\perp est B .

3c. On a $d(J, \mathcal{F}) = \|J - p_{\mathcal{F}}(J)\|$ où $p_{\mathcal{F}}(J) = I_2$ est le projeté orthogonal de J sur \mathcal{F} .

Ainsi $d(J, \mathcal{F}) = \|B\| = \sqrt{2}$ puisque $\varphi(B, B) = 2$.

Exercice(s) sans préparation.

1- On peut écrire le développement en série entière suivant : $\forall x \in]-1, 1[\quad h(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n-1}$.
On en déduit que h est \mathcal{C}^∞ en 0. Or, elle l'est aussi sur \mathbb{R}^* (par les théorèmes opératoires).

2- Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $C \frac{1}{x^2}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

La méthode de variation de la constante pour (E) donne $\frac{\lambda'}{x^2} = \frac{1}{x^2+1}$ d'où $\lambda' = 1 - \frac{1}{x^2+1}$.

Les solutions de (E) sur \mathbb{R}_+^* et \mathbb{R}_-^* sont donc de la forme $x \mapsto \frac{x - \arctan(x) + a_k}{x^2}$ avec $a_k \in \mathbb{R}$.

3- Par restriction à \mathbb{R}_+^* et \mathbb{R}_-^* on trouve la forme du 1- avec des constantes a_k qui doivent être nulles par continuité en $h(0) = 0$. La seule solution de (E) sur \mathbb{R} est donc la fonction h

4- Puisque $2f(x) = -xf'(x) + \frac{x}{1+x^2}$ on trouve par intégration, après IPP sur le premier terme de droite :

$$2I = -f(1) + I + \frac{\ln(2)}{2} \quad \text{donc} \quad I = \frac{\ln(2)}{2} - 1 + \frac{\pi}{4}$$

Planche 2.

Mathématiques.

N.B. : la calculatrice n'est pas autorisée.

Exercice.

- Justifier que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n2^n}$ converge.
 - La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$ est-elle développable en série entière ?
- Démontrer que $\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$ et calculer cette somme.
- On propose à un joueur le jeu suivant :
Il doit d'abord lancer une pièce équilibrée jusqu'à l'obtention d'un premier pile.
S'il lui a fallu n lancers pour obtenir ce premier pile, on lui fait alors tirer au hasard un billet de loterie parmi n billets dont un seul est gagnant.
 - Quelle est la probabilité que le joueur n'obtienne jamais pile ?
 - Quelle est la probabilité que le joueur gagne à ce jeu ?
 - Sachant que le joueur a gagné, quelle est la probabilité qu'il ait obtenu son premier pile au troisième lancer ?

Planche 2. Exercice(s) sans préparation.

- Déterminer $a \in \mathbb{R}$ pour que 2 soit valeur propre de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ 0 & 1+a & 3 \end{pmatrix}$
- Démontrer que dans ce cas, la matrice A est diagonalisable.
- Résoudre alors le système différentiel $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = -x + y + z \\ z' = 3z \end{cases}$ dans lequel x, y, z désignent trois fonctions de la variable t , dérivables sur \mathbb{R} .

Indications.

Exercice.

1- D'alembert par exemple

2- Intégration d'une série entière sur un segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence.

3- a) Pour $E_n =$ "premier pile au n-ième lancer", on a $P(E_n) = 1/2^n$.

On prouve d'abord que $P(B) = 0$ où $B =$ "n'obtient jamais pile" en vérifiant que $P(\bar{B}) = 1$.

b) Puis la formule des proba totales sur le SqCE des $(E_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ donne $P(G) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$.

c) La formule de Bayes donne $P_G(E_3) = 1/(24 \ln(2)) = 0.06$

Exercice(s) sans préparation.

1. Le polynôme caractéristique s'écrit $P_A(X) = X^3 - 5X^2 + 6X - 2 - 2a$. Ainsi, $P_A(2) = 0 \Leftrightarrow a = -1$.

2. Pour $a = -1$, on a $P_A(X) = X(X-2)(X-3)$ qui est scindé à racines simples.

3. Lorsque $a = -1$, la réduction amène $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Le système s'écrit $X' = AX$ avec $A = PDP^{-1}$, soit encore $X'_1 = DX_1$ avec $X_1 = P^{-1}X$.

On obtient alors $X_1 = (a, be^{2t}, ce^{3t})$ avec a, b, c dans \mathbb{R} puis on détermine $X = (x, y, z)$ avec la relation $X = PX_1$ pour obtenir les solutions du système.

Planche 3.

Mathématiques.

N.B. : la calculatrice n'est pas autorisée.

Exercice.

- (a) Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière.
(b) Donner le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \cos(x)$ et préciser son domaine de validité.

2. On s'intéresse à la série entière définie par $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{(2n+1)!} x^{2n}$

- (a) Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.
(b) Calculer la somme de cette série entière.
3. On s'intéresse à l'équation différentielle:

$$(E) \quad xy''(x) + 2y'(x) + 4xy(x) = 0$$

- (a) Déterminer les solutions de (E) développables en série entière au voisinage de 0
(b) Est-ce que toutes les solutions de (E) sur $]0; 1[$ sont les restrictions d'une fonction développable en série entière ?

Planche 3. Exercice(s) sans préparation.

Soit $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5$ et $M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a & -\sqrt{2} & d \\ \sqrt{2} & b & e \\ 1 & \sqrt{2} & f \end{pmatrix}$

- (a) Donner la définition d'une matrice orthogonale.
(b) Donner la définition d'une isométrie vectorielle d'un espace euclidien.
- Déterminer les éléments $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5$ tels que $M \in \text{SO}_3(\mathbb{R})$.
- On se place dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 muni du produit scalaire canonique. Reconnaître l'endomorphisme u de \mathbb{R}^3 admettant, dans la base canonique, la matrice M déterminée à la question précédente.

Indications.

Exercice.

0.a. Avec d'Alembert, $R = +\infty$.

b. On a donc
$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-4)^n}{(2n+1)!} x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Or, d'après le cours, $\forall X \in \mathbb{R} \quad \sin(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n X^{2n+1}}{(2n+1)!}$, donc on a $2xS(x) = \sin(2x)$.

On a alors :
$$S(x) = \begin{cases} \frac{\sin(2x)}{2x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2. Analyse : On suppose qu'il existe une solution y de (E) sous la forme d'une série entière admettant un rayon de convergence $R > 0 \forall x \in]-R, R[$, $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Comme on peut dériver une série entière terme à terme sur son intervalle ouvert de convergence alors : $\forall x \in]-R, R[$

$$\begin{cases} y'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \\ y''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \end{cases} \quad . \text{ Ainsi : } y \text{ solution de } E \text{ sur }]-R, R[$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in]-R, R[\quad \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} 2n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} 4a_n x^{n+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in]-R, R[\quad 2a_1 + \sum_{p=2}^{+\infty} [p(p-1)a_p + 2pa_p + 4a_{p-2}] x^{p-1} = 0 \quad \text{puis par unicité du DSE}_0 :$$

$$\Leftrightarrow a_1 = 0 \text{ et } \forall p \geq 2 \quad p(p-1)a_p + 2pa_p + 4a_{p-2} = 0 \quad \Leftrightarrow a_1 = 0 \text{ et } \forall p \geq 2 \quad a_p = \frac{-4}{p(p+1)} a_{p-2}$$

Enfin, on montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} a_{2n+1} = 0 \\ a_{2n} = \frac{(-1)^n 4^n}{(2n+1)!} a_0 \end{cases}$

Synthèse : On a alors, par la question 1, $R = +\infty$ et $y(x) = \begin{cases} a_0 \frac{\sin(2x)}{2x} & \text{si } x \neq 0 \\ a_0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ avec $a_0 \in \mathbb{R}$

(Comme, on a raisonné par équivalences et que $R > 0$ on peut remonter les équivalences.)

Exercice(s) sans préparation.

1. c'est du cours

2.a Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de la matrice M .

Supposons que M est orthogonale positive. D'après le cours, on a les relations

$$\|C_1\| = \|C_2\| = \|C_3\| = 1 \quad \text{et} \quad (C_1 | C_2) = (C_1 | C_3) = (C_2 | C_3) = 0.$$

La relation $\|C_2\| = 1$ implique $b = 0$, puis on déduit de la relation $(C_1 | C_2) = 0$ que $a = 1$.

De plus, les colonnes formant une base orthonormée directe, on doit avoir $C_3 = C_1 \wedge C_2$.

Finalement, on trouve donc
$$M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$
 qui est bien orthogonale positive.

3. En suivant la méthode du cours, on montre que l'endomorphisme u est la rotation d'axe dirigé par $i + k$ et d'angle $\theta = \pi/2$.

Planche 4.

Mathématiques.

N.B. : la calculatrice n'est pas autorisée.

Exercice.

1. La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

2. Déterminer alors les éléments propres de la matrice A .

3. On dispose de deux boîtes A et B . Au départ, A contient deux jetons marqués 0 et B deux jetons marqués 1. On extrait au hasard et simultanément un jeton de A et un jeton de B et on les change de boîtes. On effectue cette manipulation n fois.

Soit X_n la variable aléatoire égale à la somme des points des jetons contenus dans A à l'issue de ces n manipulations.

(a) Déterminer les valeurs possibles et la loi de X_1 .

(b) Pour tout $i \in \{0; 1; 2\}$ et pour tout $j \in \{0; 1; 2\}$, calculer les 9 résultats $P_{(X_{n-1}=j)}(X_n = i)$.
On pourra écrire les 9 résultats dans un tableau à double entrée.

(c) Soit C_n la matrice colonne donnant la loi de X_n , c'est-à-dire $C_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \end{pmatrix}$.

Montrer que $C_n = AC_{n-1}$ pour tout entier $n \geq 1$.

(d) Comment déterminer la loi de X_n en fonction de n ?
Qu'obtient-on lorsque $n \rightarrow +\infty$? Interpréter.

Planche 4. Exercice(s) sans préparation.

1. On considère la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par

$$f(x, y) = 6x^2 - y^2 - x^3$$

(a) Montrer que la fonction f admet deux points critiques.

(b) La fonction f admet-elle un extremum local ?

(c) La fonction f admet-elle un extremum global ?

2. Dans \mathbb{R}^3 , on s'intéresse à la surface (S) d'équation

$$(S) \quad 6x^2 - y^2 - x^3 - z = 0$$

(a) Montrer que le point $A(4, 0, 32)$ appartient à la surface (S)

(b) Montrer que tous les points de (S) sont réguliers.

(c) Donner une équation cartésienne du plan tangent à (S) en un point régulier de (S) .

Indications.

Exercice.

1. Le polynôme caractéristique de A est $P(X) = \text{Det}(X \cdot I_3 - A) = (X - 1)(X + 1/2)X$.

La matrice A est diagonalisable car son polynôme caractéristique est scindé à racines simples.

$$2. \text{ On trouve } A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/3 & -1/6 & 1/3 \end{pmatrix}$$

3.a. Il est clair que $X_1(\Omega) = \{1\}$ avec $P(X_1 = 1) = 1$ (loi certaine).

3.b En invoquant l'indépendance entre les tirages réalisés dans A et ceux réalisés dans B on a :

$$\begin{array}{lll} P_{(X_{n-1}=0)}(X_n = 0) = 0 & P_{(X_{n-1}=0)}(X_n = 1) = 1 & P_{(X_{n-1}=0)}(X_n = 2) = 0 \\ P_{(X_{n-1}=1)}(X_n = 0) = 1/4 & P_{(X_{n-1}=1)}(X_n = 1) = 1/2 & P_{(X_{n-1}=1)}(X_n = 2) = 1/4 \\ P_{(X_{n-1}=2)}(X_n = 0) = 0 & P_{(X_{n-1}=2)}(X_n = 1) = 1 & P_{(X_{n-1}=2)}(X_n = 2) = 0 \end{array}$$

3.c La formule des probabilités totales sur le système complet d'évènement associé à la variable aléatoire X_{n-1} donne la relation cherchée.

2.d La loi de X_n est donnée par C_n . Or on a $C_n = A^n C_0$ avec $C_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et, diagonalisant A ,

$$\begin{aligned} A^n C_0 &= PD^n P^{-1} C_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1/2)^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/3 & -1/6 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & (-1/2)^n \\ 0 & 4 & (-1/2)^{n-1} \\ 0 & 1 & (-1/2)^n \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 1 & (-1/2)^n \\ 0 & 4 & (-1/2)^{n-1} \\ 0 & 1 & (-1/2)^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 + 2(-1/2)^n \\ 4 + 2(-1/2)^{n-1} \\ 1 + 2(-1/2)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Finalement } \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 + 2(-1/2)^n \\ 4 + 2(-1/2)^{n-1} \\ 1 + 2(-1/2)^n \end{pmatrix} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} 1/6 \\ 2/3 \\ 1/6 \end{pmatrix}$$

Exercice(s) sans préparation.

(1)(a) Deux points critiques $(0, 0)$ et $(0, 4)$ avec $f(0, 0) = 0$ et $f(0, 4) = 32$

(b) Comme f est C^2 , on peut utiliser la matrice Hessienne ou écrire :

$f(x, 0) = x^2(6 - x) \geq 0$ et $f(0, y) = -y^2 \leq 0$ donc pas d'extremum local en $(0, 0)$.

et $f(4 + h, k) - f(4, 0) = -h^2(h + 6) - k^2 \leq 0$ donc maximum local en $(4, 0)$.

(c) Par exemple, $f(x, 0) = 6x^2 - x^3 \sim -x^3$ donc pas d'extremum global.

2.a Ses coordonnées vérifient l'équation.

2.b C'est une équation de la forme (S) $F(x, y, z) = 0$ avec $\nabla F = (\dots, \dots, -1) \neq \vec{0}$ donc tous les points sont réguliers.

2.c Le gradient précédent est un vecteur normal au plan tangent P en $(x_0, y_0, z_0) \in (S)$ d'où l'équation $P : 3x_0(4 - x_0)(x - x_0) - 2y_0(y - y_0) - (z - z_0) = 0$

Planche 5.

Mathématiques.

N.B. : la calculatrice n'est pas autorisée.

Exercice.

Pour $(A, B) \in \mathbb{R}[X]$, on pose :

$$\phi(A, B) = \int_0^{+\infty} A(t)B(t)e^{-t} dt$$

- Justifier que $\phi(A, B)$ est bien une intégrale convergente
 - Montrer que ϕ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ qu'on notera $(\cdot | \cdot)$
 - Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $(X^k | 1) = k!$
- On pose Q le projecteur de 1 sur $F = \text{Vect}(X, X^2, \dots, X^n)$.
 - Montrer qu'il existe des réels $(a_k)_{1 \leq k \leq n}$ tel que $Q = \sum_{k=1}^n a_k X^k$.
 - Calculer $(1 - Q | X^i)$ lorsque $1 \leq i \leq n$
 - On donne $P = 1 - \sum_{k=1}^n a_k \prod_{j=1}^k (X + j)$. En déduire que $\forall i \in \{1, \dots, n\}, P(i) = 0$.
 - En déduire une expression factorisée de P .
- Montrer que

$$\inf_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} (1 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots + \alpha_n t^n)^2 e^{-t} dt = \frac{1}{n+1}$$

Planche 5. Exercice(s) sans préparation.

On considère la série $\sum_{n \geq 0} \frac{n!}{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n+1)} x^{2n+1}$.

- Déterminer le rayon de convergence R de la série entière.
- Rappeler l'expression de \arcsin' puis résoudre sur $] -\sqrt{2}, \sqrt{2}[$ l'équation différentielle

$$(E) \quad (2 - x^2)f'(x) - xf(x) = 2$$

- On pose :

$$\forall x \in] -R, R[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n+1)} x^{2n+1}$$

Montrer que f est solution sur $] -R, R[$ de l'équation différentielle (E).

En déduire une expression simplifiée de la fonction f .

Indications.

Exercice.

- (a) Il suffit de justifier que, pour tout entier n , la fonction $t^n e^{-t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$
(b) On vérifie les quatre propriétés. Les trois premières sont immédiates.
Si $\phi(A, A) = 0$, l'intégrale d'une fonction continue et positive sur $[0, +\infty[$ étant nulle, la fonction est identiquement nulle. Ainsi, $\forall t \in [0, +\infty[, A(t)^2 e^{-t} = 0 \implies A(t) = 0$.
Le polynôme A admet une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul ($A = 0$).
(c) D'abord $(X^0 | 1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1 = 0!$. Par une intégration par parties :

$$(X^k | 1) = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = \left[-t^k e^{-t} \right]_0^{+\infty} + k \int_0^{+\infty} t^{k-1} e^{-t} dt = 0 + k(X^{k-1} | 1)$$

on obtient par une récurrence immédiate : $(X^k | 1) = k!$

- (a) Par définition, le projecteur orthogonal Q de 1 sur l'espace vectoriel F est dans F
(b) Le vecteur d'erreur $1 - Q$ est orthogonal à tout le sous-espace de projection F .
Comme $X^i \in F$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a directement : $\forall i \in \{1, \dots, n\}, (1 - Q | X^i) = 0$
(c) Par linéarité : $(1 - Q | X^i) = (1 | X^i) - (Q | X^i) = i! - \sum_{k=1}^n a_k (X^k | X^i) = i! - \sum_{k=1}^n a_k (k+i)!$

$$\text{Ainsi } (1 - Q | X^i) = 0 \implies 1 - \sum_{k=1}^n a_k \frac{(k+i)!}{i!} = 0 \implies P(i) = 0$$

en remarquant que : $\prod_{j=1}^k (i+j) = (i+1)(i+2)\dots(i+k) = \frac{(i+k)!}{i!}$

(d) Vu ce qui précède, on a $P = C \prod_{i=1}^n (X - i)$ où $C \in \mathbb{R}$ est à calculer

Or $P(-1) = 1$ (avec l'expression développée) et en utilisant la forme factorisée en -1 :

$$P(-1) = C \prod_{i=1}^n (-1 - i) = C(-2)(-3)\dots(-n-1) = C(-1)^n (n+1)!$$

On en déduit la valeur de $C = \frac{(-1)^n}{(n+1)!}$. L'expression finale de P est : $P = \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \prod_{i=1}^n (X - i)$

- Le problème se reformule $\inf_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} \|1 - (-\alpha_1 X - \dots - \alpha_n X^n)\|^2 = \inf_{R \in F} \|1 - R\|^2$
D'après le théorème de la projection orthogonale, ce minimum existe et vaut $\|1 - Q\|^2$.

$$\|1 - Q\|^2 = (1 - Q | 1 - Q) = (1 - Q | 1) - \underbrace{(1 - Q | Q)}_{=0} = (1 | 1) - (Q | 1) = 1 - \sum_{k=1}^n a_k k! = P(0)$$

$$\text{Or, vu la question 4, on a : } P(0) = \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \prod_{i=1}^n (0 - i) = \frac{(-1)^n}{(n+1)!} (-1)^n n! = \frac{(-1)^{2n} n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$$

Exercice(s) sans préparation.

1. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Posons $u_n(x) = a_n x^{2n+1}$ et $\left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \frac{a_{n+1}}{a_n} |x|^2 = \frac{n+1}{2n+3} |x|^2 \rightarrow \frac{1}{2} |x|^2$

D'après la règle de d'Alembert, le rayon de convergence de la série entière est donc $R = \sqrt{2}$.

2. La fonction arcsin est dérivable sur $] -1, 1[$ et sa dérivée vaut : $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Sur $] -\sqrt{2}, \sqrt{2}[$, l'équation (E) s'écrit : $f'(x) - \frac{x}{2-x^2} f(x) = \frac{2}{2-x^2}$

(H) Une primitive de $x \mapsto \frac{x}{2-x^2}$ est $x \mapsto -\frac{1}{2} \ln(2-x^2)$ donc $y_h(x) = \frac{C}{\sqrt{2-x^2}}$ avec $C \in \mathbb{R}$

Variation de la constante, on cherche $f(x) = \frac{C(x)}{\sqrt{2-x^2}}$.

On obtient : $\frac{C'(x)}{\sqrt{2-x^2}} = \frac{2}{2-x^2} \implies C'(x) = \frac{2}{\sqrt{2-x^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}}$

En intégrant, il vient : $C(x) = 2 \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + K$ avec $K \in \mathbb{R}$ donc $f(x) = \frac{2 \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + K}{\sqrt{2-x^2}}$

3. Calculons la quantité $(2-x^2)f'(x)$:

$$(2-x^2)f'(x) = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1)a_n x^{2n} - \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1)a_n x^{2n+2}$$

En effectuant un changement d'indice ($k = n + 1$) sur la seconde somme, on obtient :

$$(2-x^2)f'(x) = 2a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} 2(2n+1)a_n x^{2n} - \sum_{n=1}^{+\infty} (2n-1)a_{n-1} x^{2n}$$

Comme $a_0 = 1$, on peut regrouper les sommes pour $n \geq 1$:

$$(2-x^2)f'(x) = 2 + \sum_{n=1}^{+\infty} [2(2n+1)a_n - (2n-1)a_{n-1}] x^{2n}$$

Or, d'après la définition du coefficient, on a $a_{n-1} = \frac{(2n+1)}{n} a_n$ donc $(2n+1)a_n = n a_{n-1}$

Ainsi $2(2n+1)a_n - (2n-1)a_{n-1} = (2n)a_{n-1} - (2n-1)a_{n-1} = a_{n-1}$.

Ainsi, la somme devient :

$$(2-x^2)f'(x) = 2 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^{2n} = 2 + x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1} = 2 + x f(x)$$

D'après la définition en série entière, on a $f(0) = a_0 \times 0 = 0$.

Or $f(0) = \frac{2 \arcsin(0) + K}{\sqrt{2}} = \frac{K}{\sqrt{2}} = 0 \implies K = 0$

Conclusion : Pour tout $x \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$, l'expression simplifiée de f est : $f(x) = \frac{2 \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2-x^2}}$

Sujet 1

Vous avez une demi-heure de préparation pour un exercice que vous présenterez en 20 minutes. Vous serez ensuite interrogé(e) sur un second exercice plus court, sans préparation.

Exercice 1 : Soit f un endomorphisme de \mathbb{R}^3 tel que $\text{tr}(f) = 1$ et $\det(f) = 0$, et tel que le noyau de f soit inclus dans l'image de f .

- a) Déterminer les dimensions du noyau et de l'image de f .
- b) Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure.
- c) En déduire les valeurs propres de f . L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

- d) Montrer qu'il existe une base où la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 2 : On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence :
 $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{1 + 2u_n}$.

- a) Énoncer le théorème de la limite monotone pour les suites.
- b) Exprimer u_{n+2} en fonction de u_n , puis montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, u_{2k+1} < \frac{1}{2} < u_{2k}$.
- c) Étudier le sens de variation des suites (u_{2k}) et (u_{2k+1}) , puis montrer que la suite (u_n) admet une limite que l'on précisera.

Sujet 2

Vous avez une demi-heure de préparation pour un exercice que vous présenterez en 20 minutes. Vous serez ensuite interrogé(e) sur un second exercice plus court, sans préparation.

Exercice 1 : Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt$.

- a) Quel est l'ensemble de définition \mathcal{D}_f de f ?
- b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
- c) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathcal{D}_f et y vérifie $f(x) - f'(x) = \frac{1}{x}$. En déduire que f est de classe \mathcal{C}^∞ .
- d) En déduire une expression de f faisant intervenir une intégrale, puis un équivalent de $f(x)$ en 0^+ .

Exercice 2 : N personnes montent dans l'ascenseur d'un immeuble de k étages au rez-de-chaussée et descendent chacune à un étage au hasard et de façon indépendante. On note alors :

- X le nombre d'arrêts de l'ascenseur ;
 - X_i la variable valant 1 si l'ascenseur s'arrête à l'étage i et 0 sinon ;
 - E_j le numéro de l'étage où descend la $j^{\text{ième}}$ personne.
- a) Déterminer $P(X_i = 0)$. En déduire la loi de X_i .
 - b) Calculer $E(X)$.
 - c) Pour $i \neq i'$, les variables aléatoires X_i et $X_{i'}$ sont-elles indépendantes ?

Sujet 3

Vous avez une demi-heure de préparation pour un exercice que vous présenterez en 20 minutes. Vous serez ensuite interrogé(e) sur un second exercice plus court, sans préparation.

Exercice 1 : Soit X et Y deux variables aléatoires entières positives ou nulles vérifiant

$$P(X = i, Y = j) = \begin{cases} \frac{\lambda^i e^{-\lambda} \alpha^j (1 - \alpha)^{i-j}}{j!(i-j)!} & \text{si } 0 \leq j \leq i \\ 0 & \text{si } 0 \leq i < j \end{cases}$$

où α et λ sont des constantes fixées vérifiant $0 < \alpha < 1$ et $\lambda > 0$.

1. Déterminer les lois de X et de Y .
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3. On pose $Z = X - Y$. Déterminer la loi de Z .
Il sera utile de considérer le système complet d'événements $((Y = j))_{j \in \mathbb{N}}$.
4. Soit j et n deux entiers naturels. Calculer la probabilité conditionnelle $P_{(Z=n)}(Y = j)$. Que peut-on en déduire pour les variables Y et Z ?
5. On suppose que le nombre d'enfants d'une famille est une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre 2, 2. On fait les hypothèses suivantes :
 - À chaque naissance, fille ou garçon sont équiprobables.
 - Les naissances successives sont indépendantes.

Déterminer la probabilité que cette famille ait i enfants dont j garçons.

Exercice 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 2 & \cdots & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, avec $n \geq 3$.

- a) Démontrer que son polynôme caractéristique (vu comme polynôme de $\mathbb{C}[X]$) est de la forme $\chi_A(X) = X^{n-2}(X - \lambda)(X + \lambda)$.
- b) Calculer de deux manières la trace de A^2 et en déduire la valeur de λ (on pourra remarquer que A est trigonalisable sur \mathbb{C}).
- c) En déduire que A est diagonalisable sur \mathbb{R} .

Sujet 4

Vous avez une demi-heure de préparation pour un exercice que vous présenterez en 20 minutes. Vous serez ensuite interrogé(e) sur un second exercice plus court, sans préparation.

Exercice 1 : Soit a, b et c trois nombres complexes et $M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$. On

note $J = M(0, 1, 0)$.

- a) Exprimer $M(a, b, c)$ en fonction des puissances de J .
- b) Démontrer que J est diagonalisable et préciser son spectre.
- c) En déduire que $M(a, b, c)$ est diagonalisable et préciser aussi son spectre.

Exercice 2 :

- a) Énoncer le théorème des bornes atteintes pour une fonction à plusieurs variables.
- b) Représenter l'ensemble $\mathcal{T} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0 \text{ et } x + y \leq 1\}$.
- c) Justifier que la fonction f définie sur \mathcal{T} par $f(x, y) = xy(1 - xy)$ admet un minimum et un maximum et déterminer leurs valeurs.

Sujet 5

Vous avez une demi-heure de préparation pour un exercice que vous présenterez en 20 minutes. Vous serez ensuite interrogé(e) sur un second exercice plus court, sans préparation.

Exercice 1 : Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$.

- a) Déterminer l'ensemble de définition de f qu'on notera \mathcal{D} , et le sens de variation de f sur \mathcal{D} (sans utiliser la dérivation pour le moment).
- b) Montrer que f est dérivable sur \mathcal{D} .
- c) Déterminer les limites de f et des équivalents de f en 0 et en $+\infty$.

Exercice 2 : Dans l'espace $E = \mathbb{R}[X]$, on pose $\langle P, Q \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} P(n)Q(n)2^{-n}$.

- a) Justifier l'existence de $\langle P, Q \rangle$.
- b) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E .
- c) Déterminer le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$.

On donne la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} n^3 2^{-n} = 26$.