

# Sujet 1

Vous avez une demi-heure de préparation pour un exercice que vous présenterez en 20 minutes. Vous serez ensuite interrogé(e) sur un second exercice plus court, sans préparation.

**Exercice 1 :** Soit  $f$  un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  tel que  $\text{tr}(f) = 1$  et  $\det(f) = 0$ , et tel que le noyau de  $f$  soit inclus dans l'image de  $f$ .

- a) Déterminer les dimensions du noyau et de l'image de  $f$ .
- b) Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de  $f$  est triangulaire supérieure.
- c) En déduire les valeurs propres de  $f$ . L'endomorphisme  $f$  est-il diagonalisable?
- d) Montrer qu'il existe une base où la matrice de  $f$  est  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

**Exercice 2 :** On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et la relation de récurrence :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{1 + 2u_n}$ .

- a) Énoncer le théorème de la limite monotone pour les suites.
- b) Exprimer  $u_{n+2}$  en fonction de  $u_n$ , puis montrer que  $\forall k \in \mathbb{N}, u_{2k+1} < \frac{1}{2} < u_{2k}$ .
- c) Étudier le sens de variation des suites  $(u_{2k})$  et  $(u_{2k+1})$ , puis montrer que la suite  $(u_n)$  admet une limite que l'on précisera.

## Corrigés

**Exercice 1 :**

- a) Par le théorème du rang,  $\dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Im } f) = 3$ , et comme  $\text{Ker } f \subset \text{Im } f$ ,  $\dim(\text{Ker } f) \leq \dim(\text{Im } f)$ . On a donc les deux possibilités  $\dim(\text{Ker } f) = 0$  et  $\dim(\text{Ker } f) = 1$ . Mais  $\det(f) = 0$ , ce qui entraîne que  $f$  n'est pas injective et donc que le noyau  $\text{Ker } f$  n'est pas réduit au vecteur nul. On conclut donc que  $\dim(\text{Ker } f) = 1$  et  $\dim(\text{Im } f) = 2$ .
- b) Notons  $e_1$  un vecteur non nul de  $\text{Ker } f$  et  $e_2$  un autre vecteur de  $\text{Im } f$  non colinéaire à  $e_1$ . On a donc avec  $(e_1, e_2)$  une base de  $\text{Im } f$ , que l'on complète avec un vecteur  $e_3$  pour former une base de  $\mathbb{R}^3$ . On a alors  $f(e_1) = 0_{\mathbb{R}^3}$  et  $f(e_2) \in \text{Im } f = \text{Vect}(e_1, e_2)$ . Ceci entraîne que la matrice de  $f$  dans la base  $(e_1, e_2, e_3)$  est triangulaire supérieure, et comme  $f(e_3) \in \text{Im } f = \text{Vect}(e_1, e_2)$ , le troisième terme diagonal est 0, de sorte que la matrice dans cette base est de la forme  $\begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , en prenant en compte l'hypothèse  $\text{tr}(f) = 1$ .
- c) La matrice obtenue montre que les valeurs propres sont 0 (multiplicité 2) et 1 (multiplicité 1).  
La valeur propre 0 a pour multiplicité 2, mais l'espace propre associé  $\text{Ker } f$  est de dimension 1, par conséquent l'endomorphisme  $f$  n'est pas diagonalisable.

- d) Soit  $u_1$  un vecteur de  $\text{Ker } f$  et  $u_2$  un vecteur propre de  $f$  associé à la valeur propre 1. Comme  $u_1 \in \text{Ker } f \subset \text{Im } f$ , il existe un vecteur  $u_3$  tel que  $f(u_3) = u_1$ . Vérifions que la famille  $(u_1, u_3, u_2)$  est libre, ce qui en dimension 3 suffit à prouver que c'est une base : soit  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  trois réels tels que  $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0$ . En appliquant  $f$ , on obtient  $\lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_1 = 0$ , et en l'appliquant une seconde fois, on obtient  $\lambda_2 u_2 = 0$ . On en déduit que  $\lambda_2 = 0$ , puis avec l'équation précédente  $\lambda_3 = 0$ , et enfin  $\lambda_1 = 0$ . On a donc bien construit une base, et par définition des vecteurs la matrice de l'endomorphisme  $f$  dans cette base est bien de la forme voulue.

### Exercice 2 :

- a) Cours...
- b) On applique deux fois la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = \frac{1}{1+2u_{n+1}} = \frac{1}{1+2\frac{1}{1+2u_n}} = \frac{1+2u_n}{1+2u_n+2} = \frac{1+2u_n}{3+2u_n} = 1 - \frac{2}{3+2u_n}.$$

La fonction  $\varphi$  définie pour  $t > 0$  par  $\varphi(t) = 1 - \frac{2}{3+2t}$  est strictement croissante (on inverse puis on prend l'opposé d'une fonction affine strictement croissante et positive - sinon on peut aussi calculer la dérivée) et vérifie  $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ . Par conséquent  $\varphi(t) > \frac{1}{2}$  si et seulement si  $t > \frac{1}{2}$ .

Or par hypothèse,  $u_0 = 1$ , et donc  $u_1 = \frac{1}{3}$ . Par conséquent  $u_1 < \frac{1}{2} < u_0$ . On obtient par une récurrence facile que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $u_{2k+1} < \frac{1}{2} < u_{2k}$ .

- c) Pour déterminer le sens de variation de ces deux suites extraites, on calcule  $u_{n+2} - u_n$  :

$$u_{n+2} - u_n = \frac{1+2u_n}{3+2u_n} - u_n = \frac{1+2u_n - u_n(3+2u_n)}{3+2u_n} = \frac{1-u_n-2u_n^2}{3+2u_n} = \frac{(u_n+1)(1-2u_n)}{3+2u_n}.$$

Il est clair (par récurrence) que pour tout  $n$ ,  $u_n > 0$ , donc on a toujours  $u_n + 1 > 0$  et  $3+2u_n > 0$ . On vient par ailleurs de voir que  $1-2u_n < 0$  pour  $n$  pair et  $1-2u_n > 0$  pour  $n$  impair. On en déduit que la suite  $(u_{2k})$  est décroissante et la suite  $(u_{2k+1})$  croissante. Mais on a vu par ailleurs que la suite  $(u_{2k})$  est minorée et la suite  $(u_{2k+1})$  majorée (les deux par  $\frac{1}{2}$ ). Ces deux suites sont donc convergentes. En passant à la limite dans  $u_{n+2} - u_n$ , on

obtient pour la limite (de l'une ou l'autre de ces deux suites) l'équation  $0 = \frac{(l+1)(1-2l)}{3+2l}$ .

La possibilité  $l = -1$  est exclue car la suite  $(u_{2k})$  est positive, par conséquent  $l = \frac{1}{2}$  (et cela vaut pour les deux suites extraites). On conclut donc que les deux suites  $(u_{2k})$  et  $(u_{2k+1})$  convergent vers la même limite, et donc que la suite  $(u_n)$  est convergente, de limite  $\frac{1}{2}$ .

## Sujet 2

Vous avez une demi-heure de préparation pour un exercice que vous présenterez en 20 minutes. Vous serez ensuite interrogé(e) sur un second exercice plus court, sans préparation.

**Exercice 1 :** Soit  $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt$ .

- a) Quel est l'ensemble de définition  $\mathcal{D}_f$  de  $f$  ?
- b) Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
- c) Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathcal{D}_f$  et y vérifie  $f(x) - f'(x) = \frac{1}{x}$ . En déduire que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .
- d) En déduire une expression de  $f$  faisant intervenir une intégrale, puis un équivalent de  $f(x)$  en  $0^+$ .

**Exercice 2 :**  $N$  personnes montent dans l'ascenseur d'un immeuble de  $k$  étages au rez-de-chaussée et descendent chacune à un étage au hasard et de façon indépendante. On note alors :

- $X$  le nombre d'arrêts de l'ascenseur ;
  - $X_i$  la variable valant 1 si l'ascenseur s'arrête à l'étage  $i$  et 0 sinon ;
  - $E_j$  le numéro de l'étage où descend la  $j^{\text{ième}}$  personne.
- a) Déterminer  $P(X_i = 0)$ . En déduire la loi de  $X_i$ .
  - b) Calculer  $E(X)$ .
  - c) Pour  $i \neq i'$ , les variables aléatoires  $X_i$  et  $X_{i'}$  sont-elles indépendantes ?

### Corrigés

**Exercice 1 :**

- a) La question de la convergence ne se pose qu'en  $+\infty$ . Posons  $u(x, t) = \frac{e^{-xt}}{1+t}$ . Il est clair que si  $x < 0$ , la fonction  $t \mapsto u(x, t)$  tend vers  $+\infty$  en  $+\infty$  et que l'intégrale diverge. C'est encore le cas pour  $x = 0$  car  $u(0, t) = \frac{1}{1+t} \sim \frac{1}{t}$ , dont l'intégrale est divergente. Pour  $x > 0$ , on a  $t^2 u(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} te^{-xt}$ , qui tend vers 0 en  $+\infty$ . Par comparaison à une intégrale de Riemann convergente, on conclut que l'intégrale est alors bien définie. L'ensemble de définition est donc  $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^*$ .
- b) Il est clair que  $f$  est positive par positivité de l'intégrale et décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$  par croissance de l'intégrale.
- c) Pour  $t \geq 0$ , on a  $\frac{1}{1+t} \leq 1$ , donc par croissance de l'intégrale

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, 0 \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \left[ -\frac{e^{-xt}}{x} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x},$$

par conséquent  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

d) On procède aux vérifications habituelles :

- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ , la fonction  $t \mapsto u(x, t)$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$ , ainsi que l'a établi la première question.
- $\forall t \in ]0, +\infty[$ , la fonction  $x \mapsto u(x, t)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  par opérations sur des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$ , et on a  $\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = -\frac{t}{1+t}e^{-xt}$ .
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ , la fonction  $t \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$  est continue sur  $]0, +\infty[$ .
- Soit  $a > 0$ . Alors  $\forall (x, t) \in [a, +\infty[ \times ]0, +\infty[$ ,  $\left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right| = \frac{t}{t+1}e^{-xt} \leq e^{-at}$ , qui est une fonction de référence continue et intégrable sur  $]0, +\infty[$ .

Il s'ensuit que la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur tout intervalle  $[a, +\infty[$ , donc sur  $\mathbb{R}_+^*$ , et que sa dérivée a pour expression

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} -\frac{t}{1+t}e^{-xt} dt = \int_0^{+\infty} \left(-1 + \frac{1}{1+t}\right) e^{-xt} dt = -\int_0^{+\infty} e^{-xt} dt + f(x).$$

Le calcul de  $\int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$  est classique, par conséquent on obtient l'équation différentielle  $f'(x) - f(x) = -\frac{1}{x}$ .

e) L'équation homogène a pour solution les fonctions de la forme  $x \mapsto Ce^x$ . Pour une solution particulière, on applique la méthode de la variation de la constante en cherchant une solution de la forme  $y_p(x) = D(x)e^x$ . En introduisant cette expression dans l'équation différentielle et en simplifiant, on obtient  $D'(x)e^x = -\frac{1}{x}$ , d'où  $y_p(x) = -e^x \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt$ . On obtient donc

$$f(x) = \left(C - \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt\right) e^x.$$

Pour déterminer la constante  $C$ , on utilise la limite 0 en  $+\infty$ , qui impose  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(C - \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt\right) = 0$ , et donc  $C = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$  (qui est clairement une intégrale convergente). L'expression de  $f$  est donc par relation de Chasles :

$$f(x) = e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

Pour étudier le comportement en 0, on revient à l'écriture précédente, puis on transforme le second terme :

$$f(x) = e^x \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt + e^x \int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt = e^x \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt + e^x \int_x^1 \frac{e^{-t} - 1}{t} dt + e^x \int_x^1 \frac{dt}{t}.$$

Lorsque  $x$  tend vers  $0^+$  :

- Le premier terme tend vers une intégrale convergente donc une limite finie, par conséquent il reste borné.
- Dans le second terme, l'intégrande est prolongeable par continuité en 0, donc son intégrale entre 0 et 1 est convergente. Par conséquent son produit avec  $e^x$  admet une limite finie et reste donc borné.
- Le troisième terme se calcule et vaut  $-e^x \ln x$ . Comme il tend vers  $+\infty$ , il est prépondérant par rapport aux deux premiers.

On conclut donc que  $f(x) \underset{0^+}{\sim} -\ln x$ .

**Exercice 2 :**

a) On a  $E_j(\Omega) = \llbracket 1, k \rrbracket$ , et pour tout  $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ ,  $P(E_j = i) = \frac{1}{k}$ , puisque chaque personne descend à un étage au hasard (équiprobabilité).

L'événement  $(X_i = 0)$  signifie que personne ne descend à l'étage  $i$ , autrement dit qu'on a pour tout  $j$ ,  $E_j \neq i$ . On peut donc exprimer cet événement en fonction des  $E_j$  :  $(X_i =$

$0) = \bigcap_{j=1}^N \overline{(E_j = i)}$ . Comme les personnes descendent indépendamment, on obtient

$$P(X_i = 0) = \prod_{j=1}^N \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \left(\frac{k-1}{k}\right)^N,$$

et donc  $P(X_i = 1) = 1 - \left(\frac{k-1}{k}\right)^N$ .

b) Par construction,  $X = X_1 + \dots + X_k$ . Par linéarité de l'espérance,  $E(X) = E(X_1) + \dots + E(X_k) = k \left(1 - \left(\frac{k-1}{k}\right)^N\right)$ , puisque tous les  $X_i$  ont la même loi.

c) De même que pour l'étude de l'événement  $(X_i = 0) \cap (X_{i'} = 0) = \bigcap_{j=1}^N (E_j \notin \{i, i'\})$ , et donc

$$P(X_i = 0, X_{i'} = 0) = \prod_{j=1}^N \left(1 - \frac{2}{k}\right) = \left(\frac{k-2}{k}\right)^N.$$

On observe que le résultat est différent de  $P(X_i = 0)P(X_{i'} = 0)$  : les deux variables aléatoires ne sont pas indépendantes.

# Sujet 3

Vous avez une demi-heure de préparation pour un exercice que vous présenterez en 20 minutes. Vous serez ensuite interrogé(e) sur un second exercice plus court, sans préparation.

**Exercice 1 :** Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires entières positives ou nulles vérifiant

$$P(X = i, Y = j) = \begin{cases} \frac{\lambda^i e^{-\lambda} \alpha^j (1 - \alpha)^{i-j}}{j!(i-j)!} & \text{si } 0 \leq j \leq i \\ 0 & \text{si } 0 \leq i < j \end{cases}$$

où  $\alpha$  et  $\lambda$  sont des constantes fixées vérifiant  $0 < \alpha < 1$  et  $\lambda > 0$ .

1. Déterminer les lois de  $X$  et de  $Y$ .
2. Les variables  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?
3. On pose  $Z = X - Y$ . Déterminer la loi de  $Z$ .  
*Il sera utile de considérer le système complet d'événements  $((Y = j))_{j \in \mathbb{N}}$ .*
4. Soit  $j$  et  $n$  deux entiers naturels. Calculer la probabilité conditionnelle  $P_{(Z=n)}(Y = j)$ . Que peut-on en déduire pour les variables  $Y$  et  $Z$  ?
5. On suppose que le nombre d'enfants d'une famille est une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre 2, 2. On fait les hypothèses suivantes :
  - À chaque naissance, fille ou garçon sont équiprobables.
  - Les naissances successives sont indépendantes.

Déterminer la probabilité que cette famille ait  $i$  enfants dont  $j$  garçons.

**Exercice 2 :** On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 2 & \cdots & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ , avec  $n \geq 3$ .

- a) Démontrer que son polynôme caractéristique (vu comme polynôme de  $\mathbb{C}[X]$ ) est de la forme  $\chi_A(X) = X^{n-2}(X - \lambda)(X + \lambda)$ .
- b) Calculer de deux manières la trace de  $A^2$  et en déduire la valeur de  $\lambda$  (on pourra remarquer que  $A$  est trigonalisable sur  $\mathbb{C}$ ).
- c) En déduire que  $A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{R}$ .

## Corrigés

**Exercice 1 :**

1. Pour la variable aléatoire  $X$ , on prend comme système complet d'événements  $((Y = j))_{j \in \mathbb{N}}$  et on applique la formule des probabilités totales :

$$P(X = i) = \sum_{j=0}^{+\infty} P(X = i, Y = j) = \sum_{j=0}^i \frac{\lambda^i e^{-\lambda} \alpha^j (1 - \alpha)^{i-j}}{j!(i-j)!}$$

car  $P(X = i, Y = j) = 0$  pour  $j > i$ . On a donc

$$P(X = i) = \lambda^i e^{-\lambda} \sum_{j=0}^i \frac{\alpha^j (1-\alpha)^{i-j}}{j!(i-j)!} = \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \alpha^j (1-\alpha)^{i-j}.$$

On reconnaît dans la somme la formule du binôme pour  $(\alpha + (1-\alpha))^i = 1$ , donc finalement

$$\boxed{P(X = i) = \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}} : X \text{ suit une loi de Poisson de paramètre } \lambda.$$

Pour la variable aléatoire  $Y$ , le principe est le même en prenant le système complet d'événements  $((X = i))_{i \in \mathbb{N}}$  :

$$P(Y = j) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(X = i, Y = j) = \sum_{i=j}^{+\infty} \frac{\lambda^i e^{-\lambda} \alpha^j (1-\alpha)^{i-j}}{j!(i-j)!}$$

puisque  $P(X = i, Y = j) = 0$  pour  $i < j$ . Par conséquent

$$P(Y = j) = \frac{e^{-\lambda} \alpha^j}{j!} \sum_{i=j}^{+\infty} \frac{\lambda^i (1-\alpha)^{i-j}}{(i-j)!} = \frac{e^{-\lambda} \alpha^j}{j!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{j+k} (1-\alpha)^k}{k!}$$

avec la réindexation  $k = i - j$ . On obtient alors

$$P(Y = j) = \frac{e^{-\lambda} \alpha^j \lambda^j}{j!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k (1-\alpha)^k}{k!} = \frac{e^{-\lambda} \alpha^j \lambda^j}{j!} e^{\lambda(1-\alpha)},$$

d'où  $\boxed{P(Y = j) = \frac{e^{-\lambda\alpha} (\lambda\alpha)^j}{j!}}$  (au passage on a bien vérifié que la série concernée est convergente) :  $Y$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda\alpha$ .

2. Pour  $i < j$ , l'énoncé indique que  $P(X = i, Y = j) = 0$ . Or d'après les calculs de la question précédente, les probabilités  $P(X = i)$  et  $P(Y = j)$  sont non nulles, donc dans ce cas  $P(X = i, Y = j) \neq P(X = i)P(Y = j)$  : les variables  $X$  et  $Y$  ne sont donc pas indépendantes.
3. La variable aléatoire  $Z$  prend *a priori* ses valeurs dans  $\mathbb{Z}$ . Par la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements  $((Y = j))_{j \in \mathbb{N}}$ , on peut écrire

$$P(Z = n) = \sum_{j=0}^{+\infty} P(Z = n, Y = j) = \sum_{j=0}^{+\infty} P(X = j+n, Y = j) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{j+n} e^{-\lambda} \alpha^j (1-\alpha)^{j+n-j}}{j!(j+n-j)!}$$

On voit notamment que pour  $n < 0$ ,  $j+n < j$  donc la probabilité est nulle :  $Z$  prend donc ses valeurs dans  $\mathbb{N}$ . On poursuit le calcul :

$$P(Z = n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda} (1-\alpha)^n}{n!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(\lambda\alpha)^j}{j!} = \frac{\lambda^n e^{-\lambda} (1-\alpha)^n}{n!} e^{\lambda\alpha},$$

soit  $\boxed{P(Z = n) = \frac{e^{-\lambda(1-\alpha)} (\lambda(1-\alpha))^n}{n!}}$ , donc on conclut que  $Z$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda(1-\alpha)$ .

4. On applique la définition d'une probabilité conditionnelle :

$$P_{(Z=n)}(Y = j) = \frac{P(Z = n, Y = j)}{P(Y = j)} = \frac{P(X = j + n, Y = j)}{P(Y = j)} = \frac{\lambda^{j+n} e^{-\lambda} \alpha^j (1 - \alpha)^{j+n-j} j!}{j!(j+n-j)! e^{-\lambda \alpha} (\lambda \alpha)^j}.$$

soit en simplifiant  $P_{(Z=n)}(Y = j) = \frac{e^{-\lambda(1-\alpha)} (\lambda(1-\alpha))^n}{n!}$ . On observe donc que  $P_{(Z=n)}(Y = j) = P(Z = n)$ . La loi conditionnelle de  $Z$  sachant  $Y = j$  est la même que la loi de  $Z$ , autrement dit les variables aléatoires  $Y$  et  $Z$  sont indépendantes.

5. Notons  $X$  le nombre d'enfants de la famille et  $Y$  le nombre de garçons. Si  $X$  est fixé à  $i$ , le nombre de garçons représente le nombre de "succès" dans  $i$  expériences de Bernoulli de paramètre  $\frac{1}{2}$ , donc on a pour la loi conditionnelle une loi binomiale  $\mathcal{B}\left(i, \frac{1}{2}\right)$  :

$$P_{(X=i)}(Y = j) = \binom{i}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^j \left(\frac{1}{2}\right)^{i-j} = \binom{i}{j} \frac{1}{2^i},$$

avec une probabilité nulle si  $j > i$ . On en déduit :

$$P(X = i, Y = j) = P_{(X=i)}(Y = j)P(X = i) = \binom{i}{j} \frac{1}{2^i} \frac{e^{-2,2} (2,2)^i}{i!} = \frac{(2,2)^i \left(\frac{1}{2}\right)^j \left(\frac{1}{2}\right)^{i-j}}{j!(i-j)!} = \frac{(1,1)^i}{j!(i-j)!} e^{-2,2},$$

donc on retrouve la loi conjointe donnée dans l'énoncé avec  $\lambda = 2,2$  et  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

### Exercice 2 :

a) Il est clair que la matrice  $A$  est de rang 2, donc 0 est une valeur propre de  $A$  avec un espace propre associé qui est de dimension  $n - 2$ . Par conséquent  $X^{n-2}$  est un diviseur de  $\chi_A(X)$ . Mais par ailleurs ce polynôme caractéristique est scindé dans  $\mathbb{C}[X]$  et s'écrit donc  $\chi_A(X) = X^{n-2}(X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$ . La trace de  $A$  est la somme des racines de  $\chi_A$  comptées avec leur multiplicité, donc  $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ , d'où la forme voulue pour le polynôme caractéristique.

b) Comme  $A$  est trigonalisable, elle est semblable à une matrice  $T$  dont les coefficients diagonaux sont 0 ( $n - 2$  fois),  $\lambda$  et  $-\lambda$ . La matrice  $A^2$  est donc semblable à  $T^2$ , qui a pour coefficients diagonaux 0 ( $n - 2$  fois) et  $\lambda^2$  (deux fois). On a donc  $\text{tr}(A^2) = 2\lambda^2$ .

Mais par ailleurs on peut calculer la matrice  $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2 & \cdots & 2 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 2(n-1) \end{pmatrix}$ , et donc

$\text{tr}(A^2) = 2(n-1) + 2(n-1) = 4(n-1)$ . On conclut donc que  $\lambda = \sqrt{2(n-1)}$ .

c) La valeur propre 0 est de multiplicité  $n - 2$ , et on a vu que c'est aussi la dimension de l'espace propre associé. Les valeurs propres  $\lambda$  et  $-\lambda$  sont de multiplicité 1, avec des espaces propres associés de dimension 1. La matrice  $A$  est donc diagonalisable sur  $\mathbb{R}$ .

# Sujet 4

Vous avez une demi-heure de préparation pour un exercice que vous présenterez en 20 minutes. Vous serez ensuite interrogé(e) sur un second exercice plus court, sans préparation.

**Exercice 1 :** Soit  $a, b$  et  $c$  trois nombres complexes et  $M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$ . On

note  $J = M(0, 1, 0)$ .

- a) Exprimer  $M(a, b, c)$  en fonction des puissances de  $J$ .
- b) Démontrer que  $J$  est diagonalisable et préciser son spectre.
- c) En déduire que  $M(a, b, c)$  est diagonalisable et préciser aussi son spectre.

**Exercice 2 :**

- a) Énoncer le théorème des bornes atteintes pour une fonction à plusieurs variables.
- b) Représenter l'ensemble  $\mathcal{T} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0 \text{ et } x + y \leq 1\}$ .
- c) Justifier que la fonction  $f$  définie sur  $\mathcal{T}$  par  $f(x, y) = xy(1 - xy)$  admet un minimum et un maximum et déterminer leurs valeurs.

## Corrigés

**Exercice 1 :**

- a) On écrit  $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , puis on calcule  $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ , puis  $J^3 = I$ , matrice identité. On obtient donc  $M(a, b, c) = aI + bJ + cJ^2$ .
- b) Le polynôme caractéristique de  $J$  s'écrit

$$\chi_J(X) = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ 0 & X & -1 \\ -1 & 0 & X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-1 & -1 & 0 \\ X-1 & X & -1 \\ X-1 & 0 & X \end{vmatrix} = (X-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & X+1 & -1 \\ 0 & 1 & X \end{vmatrix} = (X-1)(X^2+X+1),$$

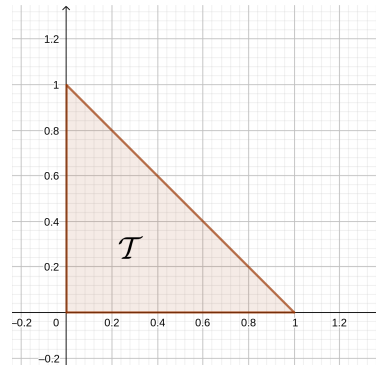
soit  $\chi_J(X) = (X-1)(X-j)(X-j^2)$ . Ce polynôme caractéristique est scindé à racines simples dans  $\mathbb{C}[X]$ , ce qui entraîne que  $J$  est diagonalisable dans  $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$ .

- c) Il existe une matrice inversible  $P \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$  telle que  $P^{-1}JP = \text{diag}(1, j, j^2)$ . On a donc  $P^{-1}J^2P = (P^{-1}JP)^2 = \text{diag}(1, j^2, j)$ , et bien entendu  $P^{-1}IP = I$ . Il s'ensuit donc que  $P^{-1}M(a, b, c)P = \text{diag}(a+b+c, a+bj+cj^2, a+bj^2+cj)$ . On a donc bien prouvé que la matrice  $M(a, b, c)$  est diagonalisable et que son spectre est  $\text{Sp}(M(a, b, c)) = \{a+b+c, a+bj+cj^2, a+bj^2+cj\}$ .

**Exercice 2 :**

- a) Cours...

- b) L'ensemble  $\mathcal{T}$  est un triangle rectangle isocèle, délimité par les axes et par la droite d'équation  $x + y = 1$ . En particulier,  $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy \leq (x + y)^2 \leq 1$ , donc l'ensemble  $\mathcal{T}$  est borné.



- c) En plus d'être borné, l'ensemble  $\mathcal{T}$  est fermé. En effet, si on considère les fonctions  $g_1 : (x, y) \mapsto x$ ,  $g_2 : (x, y) \mapsto y$  et  $g_3 : (x, y) \mapsto x + y$ , on peut noter qu'elles sont continues de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  et que  $\mathcal{T}$  est l'ensemble des couples  $(x, y)$  vérifiant  $g_1(x, y) \geq 0$ ,  $g_2(x, y) \geq 0$  et  $g_3(x, y) \leq 1$ . Chacun de ces ensembles est fermé, donc  $\mathcal{T}$  est un fermé comme intersection de fermés.

La fonction  $f$  est continue sur l'ensemble fermé borné  $\mathcal{T}$ , donc d'après le théorème des bornes atteintes, elle admet un minimum et un maximum. Ces extrema sont soit sur la frontière de  $\mathcal{T}$ , soit à l'intérieur, auquel cas ce sont des points critiques.

Commençons par étudier  $f$  sur la frontière. On a immédiatement  $f(x, 0) = f(0, y) = 0$ . Si  $x + y = 1$ , on écrit  $y = 1 - x$  et on a  $f(x, y) = x(1-x)[1-x(1-x)] = -x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x = u(x)$ . On dérive pour étudier les variations :  $u'(x) = -4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$ . On remarque que  $\frac{1}{2}$  est racine, donc on peut factoriser :  $u'(x) = (-2x + 1)(2x^2 - 2x + 1)$ , et l'expression

du second degré n'a pas de racine réelle. La fonction  $u$  est donc croissante sur  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$  et décroissante sur  $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ . On a  $u(0) = u(1) = 0$  et  $u\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{16}$ , qui sont les extrema de  $u$ .

Par conséquent  $f$  admet comme extrema sur sa frontière 0 et  $\frac{3}{16}$ .

Étudions maintenant les points critiques de  $f$  sur  $\overset{\circ}{\mathcal{T}}$  :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y(1-xy) + xy(-y) = y(1-2xy) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x(1-xy) + xy(-x) = x(1-2xy).$$

Dans l'intérieur de  $\mathcal{T}$ ,  $x$  et  $y$  sont non nuls, donc on a un point critique pour les couples  $(x, y)$  tels que  $xy = \frac{1}{2}$ . Or si  $xy = \frac{1}{2}$ , alors  $x + y = x + \frac{1}{2x}$ , donc pour  $x \in ]0, 1[$ , si on pose  $\varphi(x) = x + \frac{1}{2x}$ , on a  $\varphi'(x) = 1 - \frac{1}{2x^2}$ , donc  $\varphi$  est décroissante sur  $\left]0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ , puis

croissante sur  $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$ . Donc  $x + y$  vaut au minimum  $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ . Par conséquent la condition  $x + y \leq 1$  ne peut pas être satisfaite, autrement dit il n'y a aucun point critique à l'intérieur de l'ensemble  $\mathcal{T}$ .

On peut donc conclure que le maximum et le minimum sont atteints sur la frontière : ils valent respectivement 0, atteint pour  $x = 0$  ou  $y = 0$ , et  $\frac{3}{16}$ , atteint au point  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ .

# Sujet 5

Vous avez une demi-heure de préparation pour un exercice que vous présenterez en 20 minutes. Vous serez ensuite interrogé(e) sur un second exercice plus court, sans préparation.

**Exercice 1 :** Soit  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$ .

- Déterminer l'ensemble de définition de  $f$  qu'on notera  $\mathcal{D}$ , et le sens de variation de  $f$  sur  $\mathcal{D}$  (sans utiliser la dérivation pour le moment).
- Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathcal{D}$ .
- Déterminer les limites de  $f$  et des équivalents de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ .

**Exercice 2 :** Dans l'espace  $E = \mathbb{R}[X]$ , on pose  $\langle P, Q \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} P(n)Q(n)2^{-n}$ .

- Justifier l'existence de  $\langle P, Q \rangle$ .
- Montrer que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  définit un produit scalaire sur  $E$ .
- Déterminer le projeté orthogonal de  $X^2$  sur  $\mathbb{R}_1[X]$ .

On donne la somme  $\sum_{n=1}^{+\infty} n^3 2^{-n} = 26$ .

## Corrigés

**Exercice 1 :**

- Si  $x \leq 0$ , le terme général de la série de fonctions ne tend pas vers 0, par conséquent la série diverge grossièrement. Fixons maintenant  $x \in \mathbb{R}_+$ . Par croissance comparée,  $n^2 e^{-x\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ , ce qui prouve que la série converge. Par conséquent la fonction est définie sur  $\mathcal{D} = \mathbb{R}_+$ .

Toutes les fonctions  $x \mapsto e^{-x\sqrt{n}}$  sont décroissantes, donc par passage des inégalités larges à la limite, on montre aisément que la fonction  $f$  est aussi décroissante.

- On applique le théorème de dérivation d'une série de fonctions :

- On a vu que la série de fonctions étudiées converge simplement sur  $\mathcal{D}$ .
- Si on note  $f_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$ , alors la fonction  $f_n$  est dérivable sur  $\mathcal{D}$  et  $f'_n(x) = -\sqrt{n}e^{-x\sqrt{n}}$ . Alors si  $A > 0$  et  $x \in [A, +\infty[$ , on a  $|f'_n(x)| \leq \sqrt{n}e^{-A\sqrt{n}}$ , et le majorant est le terme général d'une série convergente (encore par comparaison à une série de Riemann convergente par exemple). La série de fonction  $\sum f'_n$  est donc normalement convergente, donc uniformément convergente sur tout intervalle  $[A, +\infty[$ .

On peut donc conclure que la fonction  $f$  est dérivable sur tout intervalle  $[A, +\infty[$ , donc

sur  $\mathcal{D}$ . On a alors  $f'(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n}e^{-x\sqrt{n}}$ .

- c) En  $+\infty$ , compte tenu de la convergence uniforme sur tout intervalle  $[A, +\infty[$ , le théorème de la double limite s'applique, et comme pour tout  $n > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$  et qu'on a  $f_0(x) = 1$  pour tout  $x$ , on peut conclure que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ , qui est aussi un équivalent.

Pour le comportement en  $0^+$ , on compare avec une intégrale : comme la fonction  $t \mapsto e^{-x\sqrt{t}}$  étant décroissante sur  $\mathbb{R}_+$ , on peut écrire pour  $n \geq 1$  :

$$\int_n^{n+1} e^{-x\sqrt{t}} dt \leq e^{-x\sqrt{n}} \leq \int_{n-1}^n e^{-x\sqrt{t}} dt,$$

Pour  $n = 0$ , l'inégalité de gauche demeure valable et on peut prendre 1 comme majorant. En sommant de 1 à  $+\infty$  :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} dt \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} dt.$$

L'intégrale se calcule avec le changement de variable  $u = x\sqrt{t}$ , qui donne  $dt = \frac{2u}{x^2} du$  :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} dt = \frac{2}{x^2} \int_0^{+\infty} ue^{-u} du = [(-u-1)e^{-u}]_0^{+\infty} = \frac{2}{x^2},$$

d'où l'équivalent en  $0^+$  :  $f(x) \sim \frac{2}{x^2}$ .

### Exercice 2 :

- a) Pour  $P$  et  $Q$  deux polynômes, soit  $d$  le degré et  $\alpha$  le coefficient dominant du polynôme  $PQ$ . Ainsi  $|n^2 P(n)Q(n)2^{-n}| \sim |\alpha| \frac{n^{d+2}}{2^n}$  et cette quantité tend vers 0 par croissance comparée. Donc  $|P(n)Q(n)2^{-n}| = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ , qui est le terme général d'une série de Riemann convergente. La série considérée est donc absolument convergente, donc convergente et donc  $\langle P, Q \rangle$  est bien défini.
- b) La symétrie est évidente par commutativité du produit. Pour la bilinéarité, on considère trois polynômes  $P_1, P_2$  et  $Q$  et un scalaire  $\lambda$ , et comme toutes les séries en question convergent :

$$\langle \lambda P_1 + P_2, Q \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda P_1 + P_2)(n)Q(n)2^{-n} = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} P_1(n)Q(n)2^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} P_2(n)Q(n)2^{-n}$$

$$\text{donc } \langle \lambda P_1 + P_2, Q \rangle = \lambda \langle P_1, Q \rangle + \langle P_2, Q \rangle,$$

ce qui est bien le résultat attendu. Enfin, il est clair que  $\langle P, P \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} P^2(n)2^{-n} \geq 0$ , avec

égalité si et seulement si  $\forall n \in \mathbb{N}, P^2(n) = 0$ . Le polynôme  $P^2$  admet donc chaque entier naturel comme racine (donc une infinité), donc  $P^2 = 0$  et donc  $P = 0$  : on a bien le caractère défini positif.

- c) Le projeté orthogonal recherché est un polynôme de degré au plus 1, qui s'écrit donc  $aX + b$ , où  $a$  et  $b$  sont deux réels. On a par ailleurs l'orthogonalité du polynôme  $X^2 - (aX + b)$  avec tout polynôme de  $\mathbb{R}_1[X]$ , ce qui se traduit par

$$\langle X^2 - (aX + b), 1 \rangle = \langle X^2 - (aX + b), X \rangle = 0,$$

$$\text{soit } \sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 - an - b)2^{-n} = 0 \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} (n^3 - an^2 - bn)2^{-n} = 0.$$

On peut séparer les sommes qui sont toutes convergentes, et donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 2^{-n} - a \sum_{n=1}^{+\infty} n 2^{-n} - b \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} n^3 2^{-n} - a \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 2^{-n} - b \sum_{n=0}^{+\infty} n 2^{-n} = 0.$$

Il faut donc déterminer les sommes en jeu. On a d'abord la somme géométrique  $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$ . Par dérivation de la série géométrique  $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$  sur  $] -1, 1[$ , on a  $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ , d'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n 2^{-n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2.$$

On écrit ensuite

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 2^{-n} = \frac{1}{4} \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \sum_{n=1}^{+\infty} n 2^{-n} = \frac{1}{4} \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^3} + 2 = 6,$$

en dérivant une seconde fois sur l'intervalle  $] -1, 1[$  la série géométrique. Enfin l'énoncé donne  $\sum_{n=0}^{+\infty} n^3 2^{-n} = 26$ .

On obtient donc les équations  $6 - 2a - 2b = 26 - 6a - 2b = 0$ , système qui a pour unique solution  $(a, b) = (5, -2)$  : le projeté orthogonal est donc le polynôme  $5X - 2$ .