Exercices posés aux oraux 2025 aux élèves de PSI* de La-Fayette

ccINP

Planche 1. ccINP *(Mélissande E.)*

Exercice 1 (déjà tombé en 2024)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} 0_n & A \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}$

1) Montrer que A est inversible $\Leftrightarrow 0 \notin sp(A)$

2) Calculer le rang de B en fonction de n et du rang de A.

3) Exprimer le polynôme caractéristique de B en fonction de celui de A.

4) Montrer que : $x^2 \in sp(A) \Leftrightarrow x \in sp(B)$

5) Montre que si A est inversible avec n valeurs propres distinctes, alors B est diagonalisable.

---

1) A inversible $\Leftrightarrow det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \chi_A(0) = (-1)^n det(A) \neq 0 \Leftrightarrow 0 \notin sp(A)$

2) Si on note $(e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}, \ldots, e_{2n})$ la base canonique de $\mathbb{R}^{2n}$, alors les colonnes $n+1$ à $2n$ de B engendre un sous espace vectoriel $F \subset vect(e_1, \ldots, e_n)$ et les colonnes 1 à n de B engendre le sous espace vectoriel $G = vect(e_{n+1}, \ldots, e_{2n})$
On a alors $Im(B) = F \oplus G$ et donc $rg(B) = dim(F) + dim(G) = rg(A) + n$

On a donc : $\boxed{rg(B) = rg(A) + n}$

3) $\chi_B(X) = \begin{vmatrix} XI_n & -A \\ -I_n & XI_n \end{vmatrix}$ On effectue $C_{n+k} \longleftarrow C_{n+k} + XC_k$ pour $k \in [\![1, n]\!]$

$\chi_B(X) = \begin{vmatrix} XI_n & X^2I_n - A \\ -I_n & 0_n \end{vmatrix}$ On effectue $C_k \longleftrightarrow C_{n+k}$ pour $k \in [\![1, n]\!]$

$\chi_B(X) = (-1)^n \begin{vmatrix} X^2I_n - A & XI_n \\ 0_n & -I_n \end{vmatrix} = (-1)^n(-1)^n\chi_A(X^2)$ par blocs puisque $det(-I_n) = (-1)^n$

On a donc : $\boxed{\chi_B(X) = \chi_A(X^2)}$

4) $x^2 \in sp(A) \Leftrightarrow \chi_A(x^2) = 0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{3)} \chi_B(x) = 0 \Leftrightarrow x \in sp(B)$

5) • Si A est inversible avec n valeurs propres distinctes, on sait alors que A est diagonalisable et qu'il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}\backslash\{0\})^n$ avec les λ_i distincts deux à deux tel que A soit semblable à $diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$

On a ainsi que le polynôme caractéristique de A s'écrit : $\chi_A(X) = \prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_k)$

Comme on est dans $\mathbb{C}$, on peut choisir, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mu_k \in \mathbb{C}$ tel que $\mu_k^2 = \lambda_k$

Avec la relation du 3) on obtient :

$\chi_B(X) = \chi_A(X^2) = \prod_{k=1}^{n} (X^2 - \lambda_k) = \prod_{k=1}^{n} (X^2 - \mu_k^2) = \prod_{k=1}^{n} (X - \mu_k)(X + \mu_k)$

Comme μ_k est non nul (car $\lambda_k \neq 0$) alors $\mu_k \neq -\mu_k$ et comme les λ_k sont distincts deux à deux alors finalement $\chi_B(X)$ est scindé simple donc, d'après le cours : $\boxed{B \text{ est diagonalisable.}}$

• Remarque : autre méthode, avec les mêmes notations.

On a il existe une base $B_A = (X_1, \ldots, X_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tels que : $\forall k \in [\![1, k]\!]$, $AX_k = \lambda_k X_k$ et $\lambda_k \neq 0$

On pose alors : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $Y_k^+ = \begin{pmatrix} \mu_k X_k \\ X_k \end{pmatrix}$ et $Y_k^- = \begin{pmatrix} -\mu_k X_k \\ X_k \end{pmatrix}$

Alors $BY_k^+ = \begin{pmatrix} AX_k \\ \mu_k X_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_k X_k \\ \mu_k X_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_k^2 X_k \\ \mu_k X_k \end{pmatrix} = \mu_k \begin{pmatrix} \mu_k X_k \\ X_k \end{pmatrix}$

On a donc : $BY_k^+ = \mu_k BY_k^+$ et de même $BY_k^- = -\mu_k BY_k^+$

Posons $B_B = (Y_1^+, \ldots, Y_n^+, Y_1^-, \ldots, Y_n^-)$

B_B est alors une famille de vecteurs propres de $\mathbb{R}^{2n}$

Soit $(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ tel que : $\sum_{k=1}^{n} (a_k Y_k^+ + b_k Y_k^-) = 0$

On a alors, en regardant par blocs : $\sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k)\mu_k X_k = 0$ et $\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) X_k = 0$

Comme B_A est une base, on a $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\begin{cases} (a_k - b_k)\mu_k = 0 \\ a_k + b_k = 0 \end{cases}$

Comme de plus $\mu_k \neq 0$: $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\begin{cases} a_k - b_k = 0 \\ a_k + b_k = 0 \end{cases}$

On en déduit : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $a_k = b_k = 0$ et donc B_B libre.

Comme on a le bon nombre de vecteurs alors B_B est une base de $\mathbb{R}^{2n}$

On a une base formée de vecteurs propres de B donc : $\boxed{B \text{ est diagonalisable.}}$

Exercice 2

1. Donner la définition d'une norme.

Soit $E = \mathbb{R}^2$. On pose $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $N(x, y) = \sup\limits_{t \in [0,1]} |xt + y|$

2. Montrer que N est une norme.

3) `Dessiner la boule unité associé à` N.

4) `Trouver` $\alpha > 0$ `le plus grand possible et` $\beta > 0$ `le plus petit possible tels que :`
$\forall X \in \mathbb{R}^2$, $\alpha N(X) \leq ||X||_\infty \leq \beta N(X)$

---

1. Voir cours.

2. Soit $X = (x, y) \in E$, $Y = (x', y') \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

• $\lambda X = (\lambda x, \lambda y)$ donc
$N(\lambda X) = \sup\limits_{t \in [0,1]} |\lambda xt + \lambda y| = \sup\limits_{t \in [0,1]} |\lambda|\,|xt + y| = |\lambda| \sup\limits_{t \in [0,1]} |xt + y| = |\lambda| \sup\limits_{t \in [0,1]} |xt + y| = |\lambda|\, N(X)$

• $N(X) = 0$
$\Rightarrow \forall t \in [0, 1]$, $xt + y = 0$
$\Rightarrow x = y = 0 \Rightarrow X = 0$ car on a un polynôme qui a une infinité de racines.

• $N(X + Y) = \sup\limits_{t \in [0,1]} |(x + x')t + (y + y')|$
Mais par inégalité triangulaire :
$|(x + x')t + (y + y')| = |(xt + y) + (x't + y')| \leq |xt + y| + |x't + y'| \leq N(X) + N(Y)$
En passant au sup sur $t \in [0, 1]$ on a : $N(X + Y) \leq N(X) + N(Y)$

D'après les points précédents : $\boxed{N \text{ est une norme sur } \mathbb{R}^2.}$

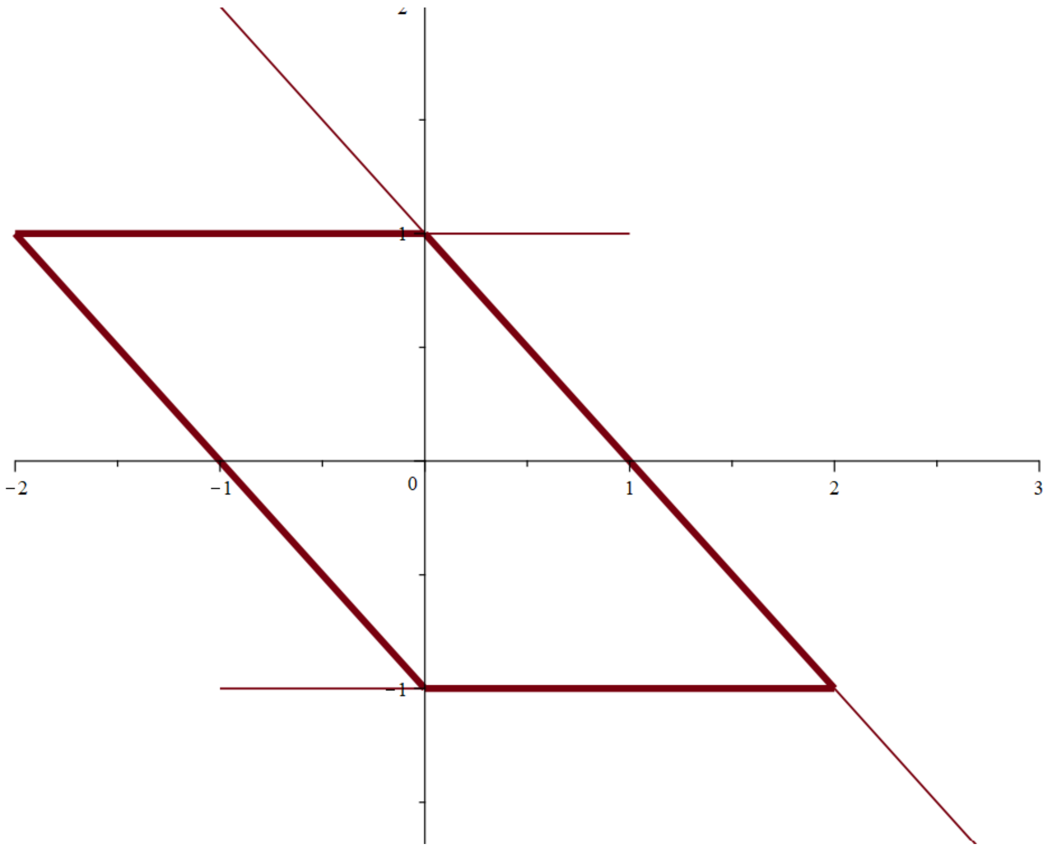
3.) • On chercher à dessiner : $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ N(x, y) \leq 1\}$

• On remarque que : $t \mapsto xt + y$ est une fonction affine, qui est donc strictement monotone entre y et $x + y$
On en déduit $N(x, y) = Max(|y|\, , |x + y|)$

Remarque : on aurait pu utiliser cette expression pour montrer que N était une norme.

• On a alors : $(x, y) \in B \Leftrightarrow \begin{cases} |y| \leq 1 \\ |x + y| \leq 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq y \leq 1 \\ -1 \leq x + y \leq 1 \end{cases}$

On trace les droites $y = 1$, $y = -1$, $x + y = -1$ et $x + y = 1$ et on en déduit le tracé de B.



4°) On a vu en 3) que : si $X=(x,y)$ alors $N(X)=Max(|y|\,,|x+y|)$

• $|y|\leq ||X||_\infty \leq 2\,||X||_\infty$
De plus, par inégalité triangulaire : $|x+y|\leq |x|+|y|\leq ||X||_\infty + ||X||_\infty = 2\,||X||_\infty$

Donc, en prenant le max : $N(X)\leq 2\,||X||_\infty$

• On a aussi, par la deuxième inégalité triangulaire :
$|x|-|y|\leq |x+y| \Rightarrow |x|\leq |x+y|+|y|\leq N(X)+N(X)\leq 2N(X)$
D'autre part $|y|\leq N(X)\leq 2N(X)$
En passant au max on a : $||X||_\infty \leq 2N(X)$

• En regroupant les deux résultats ci-dessus : $\boxed{\frac{1}{2}N(X)\leq ||X||_\infty \leq 2N(X)}$

• On va maintenant montrer que les deux constantes ci-dessus sont les meilleurs.
Soit donc $\alpha>0$ et $\beta>0$ tels que : $\forall X\in\mathbb{R}^2$, $\alpha N(X)\leq ||X||_\infty \leq \beta N(X)$

Si on prend $X=(1,1)$ alors $||X||_\infty=1$ et $N(X)=2$ donc $2\alpha\leq 1\leq 2\beta$ donc $\alpha\leq\frac{1}{2}$
Comme $\frac{1}{2}$ convient, c'est bien la plus grande valeur de α possible.

Si on prend $X=(2,-1)$ alors $||X||_\infty=2$ et $N(X)=1$ donc $\alpha\leq 2\leq\beta$ donc $\beta\geq 2$
Comme 2 convient, c'est bien la plus petite valeur de β possible.

On a bien optimiser les constantes ci-dessus.

Planche 2. ccINP *(Jeanne P.)*

Exercice 1

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$ on pose $f_n(x) = \frac{1}{sh(nx)}$

1) Pour quelles valeurs de $x > 0$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle ?

On pose $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$

2) Déterminer le domaine `de définition` et le domaine de continuité de f

3) Déterminer les variations de f.

4) Montrer que $\forall n \geq 2\ ,\ \forall x \geq 1\ ,\ 0 \leq f_n(x) \leq \frac{2}{1-e^{-4}} e^{-nx}$

5) Montrer que : $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{sh(x)}$

---

1) Comme $x > 0$: $f_n(x) = \frac{2}{e^{nx}-e^{-nx}} \sim \frac{2}{e^{nx}} \sim 2e^{-nx} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

$\boxed{\text{La suite de fonctions } (f_n) \text{ converge donc simplement vers la fonction nulle sur }]0,+\infty[}$

2) • Comme $f_n(x) \sim 2e^{-nx} > 0$ et que $\sum e^{-nx} = \sum (e^{-x})^n$ est absolument convergente (série géométrique de raison $e^{-x} \in]-1,1[$), alors, par règle de l'équivalent, $\sum f_n(x)$ converge.

$\boxed{f \text{ est définie sur }]0,+\infty[}$

• Soit $a > 0$, alors $\forall x \geq a\ ,\ 0 \leq f_n(x) \leq f_n(a)$
On en deduit donc : $||f_n||_\infty^{[a,+\infty[} = \sup\limits_{x\in[a,+\infty[} = f_n(a)$
Comme $\sum f_n(a)$ est convergente, alors, par comparaison : $\sum ||f_n||_\infty^{[a,+\infty[}$ est convergente et donc $\sum f_n$ converge normalement sur $[a,+\infty[$
Donc $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a,+\infty[$
Comme les f_n sont continues et que la continuité est conservée par convergence uniforme, on a : f continue sur $[a,+\infty[$

Comme ce résultat est vraie pour tout $a >$ alors : $\boxed{f \text{ est continue sur }]0,+\infty[}$

3) Si $0 < x < y$ alors $f_n(x) > f_n(y)$ et donc en sommant $f(x) \geq f(y)$ et donc $\boxed{f \text{ est décroissante sur }]0,+\infty[}$

4) $f_n(x)e^{nx} = \frac{2e^{nx}}{e^{nx}-e^{-nx}} = \frac{2}{1-e^{-2nx}} \leq \frac{2}{1-e^{-4}}$ (car $nx \geq 2$) et donc
$\boxed{\forall n \geq 2\ ,\ \forall x \geq 1\ ,\ 0 \leq f_n(x) \leq \frac{2}{1-e^{-4}} e^{-nx}}$

5) Pour $x \geq 1$: $f(x) - \frac{1}{sh(x)} = f(x) - f_1(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} f_n(x)$

Avec le 4) on en déduit : $0 \leq f(x) - \frac{1}{sh(x)} \leq \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{1-e^{-4}} e^{-nx}$

On utilise la somme des termes d'une série géométrique de raison e^{-x} et de premier terme $2e^{-2x}$:
$0 \leq f(x) - \frac{1}{sh(x)} \leq \frac{2}{1-e^{-4}} e^{-2x} \frac{1}{1-e^{-x}} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{2}{1-e^{-4}} e^{-2x}$

On a alors : $f(x) - \frac{1}{sh(x)} = O(e^{-2x})$

Comme $\frac{1}{sh(x)} \sim 2e^{-x}$ et que $O(e^{-2x}) = o(e^{-x})$ alors $f(x) = 2e^{-x} + o(e^{-x})$ donc $f(x) \sim 2e^{-x} \sim \frac{1}{sh(x)}$

On a bien : $\boxed{f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{sh(x)}}$

Exercice 2

Soit u en endomorphisme d'un $\mathbb{R}$ espace vectoriel E de dimension finie.

Soit P un polynôme annulateur de u.

1) a) Rappeler la définition de polynôme annulateur.

1) b) Est-ce que u admet un polynôme annulateur ?

1) c) Rappeler la définition de racine simple d'un polynôme.

1) d) Si on écrit $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients de P pour que 0 soit racine simple de P.

On suppose de plus que 0 est valeur propre simple de u.

2) a) Est-ce-que 0 est racine de P ?

2) b) Est-ce-que 0 est racine simple de P ?

3) Montrer que $ker(u) = ker(u^2)$

Définition : on dit que $f \in L(E)$ est nilpotent si et seulement si $\exists k \in \mathbb{N}^*$, $f^k = 0_{L(E)}$

4) a) Si f est nilpotent quelles sont les valeurs propres possibles de f ?

4) b) Si f est nilpotent est-ce-que 0 est valeur propre simple de f ?

5) Si $dim(E) \geq 2$. Est-ce que u peut-être nilpotent ?

1) a) $P \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme annulateur de u si et seulement si $P(u) = 0_{L(E)}$

1) b) On est en **dimension finie**, donc, par le théorème de Hamilton-Cayley, le polynôme caractéristique de u est un polynôme annulateur de u.
$\boxed{u \text{ admet donc un polynôme annulateur.}}$

1) c) On a : λ est racine simple de P
si et seulement si $P(\lambda) = 0$ et $P'(\lambda) \neq 0$
si et seulement si $P(X) = (X - \lambda)Q(X)$ avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $Q(\lambda) \neq 0$

1) d) Avec les notations de l'énoncé :

0 racine simple de $P \Leftrightarrow P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0 \Leftrightarrow a_0 = 0$ et $a_1 \neq 0$

2) a) Si P est annulateur de u alors $sp(u) \subset Rac(P)$ avec $Rac(P)$ l'ensemble des racines de P.
Mais 0 valeur propre simple de u implique $0 \in sp(u)$, donc 0 est racine de P.

2) b) 0 n'est pas forcément racine simple.
Par exemple, si u est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ admettant $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ comme matrice relativement à la base canonique.
Alors 0 est valeur propre simple de u et 0 est racine double (donc non simple) de $X^2(X-1)$ qui est un polynôme annulateur de u.

3) • $x \in ker(u) \Rightarrow u(x) = 0_E \Rightarrow u^2(x) = 0_E \Rightarrow x \in ker(u^2)$ on a donc (toujours vrai) : $ker(u) \subset ker(u^2)$

• Si B est une base de E, alors $M_B(u)$ est trigonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$ (avec $n = dim(E)$) et comme 0 est valeur propre simple de u alors $M_B(u)$ est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & * & \dots & * \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix}$ avec les d_i non nuls.

On en déduit $M_B(u^2)$ est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & * & \dots & * \\ 0 & d_2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & d_n^2 \end{pmatrix}$ avec les d_i non nuls donc 0 est valeur propre simple de u^2.

0 valeur propre simple de $u^2 \Rightarrow dim(ker(u^2)) = 1$
De même 0 valeur propre simple de $u \Rightarrow dim(ker(u)) = 1$

• On a donc : $ker(u) \subset ker(u^2)$ et $dim(ker(u)) = dim(ker(u^2)) = 1$, donc $\boxed{ker(u) = ker(u^2)}$

4) a) f nilpotente donc $\exists k\ ,\ f^k = 0_{L(E)}$
Donc X^k est un polynôme annulateur de f. Comme $X^k = 0 \Leftrightarrow X = 0$ alors $sp(f) \subset \{0\}$

$\boxed{\text{Si } f \text{ est nilpotente, sa seule valeur propre possible est } 0}$

4) b) f nilpotente $\Rightarrow f^k = 0_{L(E)} \Rightarrow det(f^k) = 0 \Rightarrow det(f) = 0 \Rightarrow 0 \in sp(f)$

Donc 0 est valeur propre de f.

Mais 0 n'est pas forcément valeur propre simple de f (exemple, si f a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$)

5) On a $dim(E) \geq 2$ et 0 est valeur propre simple de u.
Si B est une base de E et que l'on note $A = M_B(u)$ la matrice de u relativement à B, alors : A est trigonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$ et semblable à une matrice de la forme : $\begin{pmatrix} 0 & * & \dots & * \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & d_{n-1} & * \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix}$ ou les d_i sont des complexes non nuls puisque 0 est valeur propre simple.

Cette matrice matrice ne peut pas être nilpotente donc $\boxed{u \text{ ne peut pas être nilpotent.}}$

Planche 3. ccINP *(Mattéo B.)*

Exercice 1
Soit n un entier non nuls et u un endomorphisme de $E = \mathbb{C}^n$.

1) Montrer que : u diagonalisable $\Rightarrow u^2$ diagonalisable

2) Trouver un exemple où la réciproque est fausse.

3) Soit λ un complexe non nul. Montrer que $Ker(u^2 - \lambda^2 Id_E) = Ker(u - \lambda Id_E) \oplus Ker(u + \lambda Id_E)$

4) Montrer que : $\begin{cases} u \text{ bijectif} \\ u^2 \text{ diagonalisable} \end{cases} \Rightarrow u$ diagonalisable

---

1) u diagonalisable
$\Rightarrow$ il existe une base B de E telle que : $M_B(u) = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$
$\Rightarrow$ il existe une base B de E telle que : $M_B(u^2) = diag(\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2)$
$\Rightarrow u^2$ est diagonalisable.

2) Si u a une matrice de la forme : $M_B(u) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ alors u^2 a pour matrice la matrice nulle donc : u^2 est diagonalisable alors que u ne l'est pas.

3) • $x \in ker(u-\lambda Id_E) \Rightarrow u(x)=\lambda x \Rightarrow u^2(x)=\lambda^2 x \Rightarrow x \in ker(u^2-\lambda^2 Id_E)$
Donc $ker(u-\lambda Id_E) \subset ker(u^2-\lambda^2 Id_E)$
De même $ker(u+\lambda Id_E) \subset ker(u^2-\lambda^2 Id_E)$
et donc $ker(u-\lambda Id_E)+ker(u+\lambda Id_E) \subset ker(u^2-\lambda^2 Id_E)$

• Soit $x \in ker(u^2-\lambda^2 Id_E)$

Analyse : Si $x=a+b$ avec $a \in ker(u-\lambda Id_E)$ et $b \in ker(u+\lambda Id_E)$
alors $u(x)=\lambda a-\lambda b$
Donc $\lambda x+u(x)=2\lambda a$ et comme $\lambda \neq 0$ alors $a=\frac{\lambda x+u(x)}{2\lambda}$ et donc $b=\frac{\lambda x-u(x)}{2\lambda}$

Synthèse : Soit $x \in ker(u^2-\lambda^2 Id_E)$. On pose : $a=\frac{\lambda x+u(x)}{2\lambda}$ et $b=\frac{\lambda x-u(x)}{2\lambda}$
Alors $u(a)=\frac{\lambda u(x)+u^2(x)}{2\lambda}=\frac{\lambda u(x)+\lambda^2(x)}{2\lambda}=\lambda a$ donc $a \in ker(u-\lambda Id_E)$

De même $b \in ker(u+\lambda Id_E)$

On a alors : $\forall x \in ker(u^2-\lambda^2 Id_E)$, $\exists a \in ker(u-\lambda Id_E)$, $\exists b \in ker(u+\lambda Id_E)$ tel que : $x=a+b$

On a donc $ker(u^2-\lambda^2 Id_E) \subset ker(u-\lambda Id_E)+ker(u+\lambda Id_E)$ et comme l'autre inclusion est directe : $ker(u-\lambda Id_E)+ker(u+\lambda Id_E)=ker(u^2-\lambda^2 Id_E)$

• Comme la somme deux sous espace propre associé à des valeurs propres distinctes (λ et $-\lambda$) sont en somme directe alors :
$ker(u-\lambda Id_E) \oplus ker(u+\lambda Id_E)=ker(u^2-\lambda^2 Id_E)$

4) u bijectif $\Rightarrow det(u) \neq 0 \Rightarrow det(u^2) \neq 0 \Rightarrow 0$ n'est pas valeur propre de u^2.
u^2 diagonalisable et $0 \notin sp(u^2)$ donne que : $E=\bigoplus_{\mu \in sp(u^2)} ker(u^2-\mu Id_E)$
Mais, pour tout $\mu \in sp(u^2)$, comme $\mu \neq 0$ on peut choisir $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\mu=\lambda^2$ et $\lambda \neq 0$
On a alors, avec le 3) : $E=\bigoplus_{\mu \in sp(u^2)} ker(u-\lambda^2 Id_E)=\bigoplus_{\mu \in sp(u^2)} ker(u-\lambda Id_E) \bigoplus ker(u+\lambda Id_E)$

Donc E est somme directe de sous-espaces propres de u et donc $\boxed{u \text{ est diagonalisable.}}$

Exercice 2

On considère une urne contenant des boules vertes et des boules rouges.
On effectue des tirages indépendants, avec remise. La probabilité de tirer une boule verte étant de $p \in]0,1[$.

1) Déterminer la loi de probabilité et l'espérance de X la variable aléatoire donnant le rang du premier tirage d'une boule verte.

2) Déterminer la loi de probabilité et l'espérance de Y la variable aléatoire donnant le rang du tirage de la deuxième boule verte.

---

1) Tirer une boule verte ou non est une épreuve de Bernoulli de paramètre p.
Dans ce 1) on effectue cette épreuve, de manière indépendante, jusqu'à l'obtention d'un premier succès.
On reconnaît donc une loi géométrique de paramètre p et on a :
$\boxed{X \hookrightarrow G(p) \text{ et } E(X) = \frac{1}{p}}$

2) • On remarque que : $Y(\Omega) = [\![2;+\infty[\![$ ($+\infty$ impossible) et que :
$$\forall k \in Y(\Omega)\ ,\ (Y=k) = \bigcup_{i\in[\![1,k-1]\!]} \Big(\big(\bigcap_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k-1} \overline{V_j} \big) \cap V_i \cap V_k \Big)$$
avec V_i ="tirer une boule verte au i-ième tirage"

Par incompatibilité on a : $P(Y=k) = \sum_{i=1}^{k-1} P\Big(\big(\bigcap_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k-1} \overline{V_j} \big) \cap V_i \cap V_k \Big)$

Puis, par indépendance : $P(Y=k) = \sum_{i=1}^{k-1} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k-1} P(\overline{V_j})\big) P(V_i) P(V_k)$

$\Rightarrow P(Y=k) = \sum_{i=1}^{k-1} (1-p)^{k-2} p^2 = (k-1)(1-p)^{k-2}p^2$

La loi de Y est donc donnée par :
$\boxed{Y(\Omega) = [\![2,+\infty]\!] \text{ et } \forall k \in Y(\Omega)\ ,\ P(Y=k) = (k-1)(1-p)^{k-2}p^2}$

• On a alors $E(Y) = \sum_{k=2}^{+\infty} kP(Y=k) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)(1-p)^{k-2}p^2$

Mais d'après le cours : $\forall x \in]-1,1[\ ,\ \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k$
Comme on a une série entière, $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ est C^2 sur $]-1,1[$ et on peut dériver deux fois terme à terme. On en déduit : $\forall x]-1,1[\ ,\ \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2}$
On peut appliquer ceci en $1-p \in]-1,1[$ et on a : $E(Y) = p^2 \frac{2}{(1-(1-p))^3} = \frac{2p^2}{p^3} = \frac{2}{p}$

$\boxed{Y \text{ admet une espérance et } E(Y) = \frac{2}{p}}$

Planche 4. ccINP *(Jean X.)*

Exercice 1

Soit E l'espace des fonctions à valeurs réelles continues sur $[0,1]$.

On pose : $\varphi \quad : \quad \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & F \end{array}$ avec $\forall x \in [0,1]$, $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\int\limits_0^x f(t)dt & \text{si } x \in]0,1] \\ f(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1) Montrer que φ est un endomorphisme.

2) Montrer que 0 n'est pas valeurs propres de φ.

3) Montrer que 1 est valeur propre de φ.

4) Donner les autres valeurs propres et déterminer les sous espaces propres associés.

---

1) • Commençons par monter que $F = \varphi(f)$ est bien un élément de E.
Comme $x \mapsto \int\limits_0^x f(t)dt$ est une primitive de la fonction continue f alors F est continue sur $]0,1]$.
Il reste à voir la continuité de F en $x = 0$.

f continue sur $[0,1]$, on peut donc noter g la primitive de f sur $[0,1]$ s'annulant en 0.
On a : $g(x) = \int\limits_0^x f(t)dt$
On remarque que g est C^1 sur $[0,1]$ comme primitive d'une fonction continue.

Donc, pour $x \in]0,1]$: $F(x) = \frac{g(x)}{x} = \frac{g(x)-g(0)}{x-0} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} g'(0) = f(0) = F(0)$

On en déduit F continue en 0.

Au bilan F est continue sur $[0,1]$ et on a bien φ de E dans E.

Il reste à voir la linéarité de φ.

• Soit $f, g \in E = C^0([0,1])$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Alors, pour $x \in]0,1]$, $\varphi(f+\lambda g)(x) = \frac{\int\limits_0^x (f+\lambda g)(t)dt}{x} \frac{\int\limits_0^x f(t)dt + \lambda \int\limits_0^x g(t)dt}{x} = \varphi(f)(x) + \lambda\varphi(g)(x)$
par linéarité de l'intégrale.

De plus : $\varphi(f+\lambda g)(0) = (f+\lambda g)(0) = f(0) + \lambda g(0) = \varphi(f)(0) + \lambda\varphi(g)(0)$

On a donc : $\varphi(f+\lambda g) = \varphi(f) + \lambda\varphi(g)$ et doncφ linéaire.

• Finalement, φ est linéaire de E dans E et donc $\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } E.}$

2) Raisonnons par l'absurde et supposons que 0 soit valeur propre de φ.

Alors $\exists f \in E$, telle que f non nulle et $\varphi(f) = 0_E$
Alors $\forall x \in]0,1]$, $\int\limits_0^x f(t)dt = 0$
Donc en dérivant (même justifications que au 1)) : $\forall x \in]0,1]$, $f(x) = 0$
Comme f est continue en 0 on a aussi $f(0) = 0$ et donc $f = 0_E$ ce qui contredit f non nulle. ABSURDE

Bilan : $\boxed{\text{0 n'est pas valeur propre de } \varphi.}$

3) Posons : h la fonction constante égale à 1 sur $[0,1]$.
Alors, pour $x \in]0,1]$: $\varphi(h)(x) = \frac{1}{x}\int\limits_0^x 1dt = \frac{1}{x}x = 1 = h(x)$
De plus $\varphi(g)(0) = h(0)$ donc $\varphi(h) = h$ et comme h n'est pas nulle alors : $\boxed{\text{1 est valeur propre de } \varphi.}$

4) Comme 0 n'est pas valeur propre, considérons $\lambda \in \mathbb{R}^*$
Alors : $\varphi(f) = \lambda f$
$\Leftrightarrow f(0) = \lambda f(0)$ et $\forall x \in]0,1]$, $\frac{1}{x}\int\limits_0^x f(t)dt = \lambda f(x)$
$\Leftrightarrow f(0) = \lambda f(0)$ et $\forall x \in]0,1]$, $\int\limits_0^x f(t)dt = \lambda x f(x)$

Dérivons cette dernière relation : $\forall x \in]0,1]$
$f(x) = \lambda f(x) + \lambda x f'(x) \Leftrightarrow \lambda x f'(x) = (1-\lambda)f(x) \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1-\lambda}{\lambda}\frac{1}{x}f(x)$ (on a pu diviser car $\lambda \neq 0$)

On a alors une EDL_1 à coefficients continus.

Comme $\int \frac{1}{x}dx = ln(x)$ (sur $]0,1]$, $|x| = x$ car $x > 0$) alors, d'après le cours :
$\forall x \in]0,1]$, $f(x) = Aexp(\frac{1-\lambda}{\lambda}ln(x)) = Ax^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$

On traite alors plusieurs cas, suivant le signe de $\frac{1-\lambda}{\lambda}$

Cas 1 : $\lambda = 1 \Leftrightarrow \frac{1-\lambda}{\lambda} = 0$

Alors f est constante et on retrouve le cas du 3).

Cas 2 : $\lambda \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[\Leftrightarrow \frac{1-\lambda}{\lambda} < 0$

Alors, pour $A \neq 0$: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \pm\infty$ et donc f n'est pas continue en 0.
Donc $\frac{1-\lambda}{\lambda}$ ne peut pas être valeur propre de φ

Cas 3 : $\lambda \in]0,1[\Leftrightarrow \frac{1-\lambda}{\lambda} > 0$

Alors $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$, donc en posant $f(0) = 0$ on a bien une fonction continue en 0. De plus $f(0) = \lambda f(0)$ et on a bien (si $A \neq 0$) un vecteur propre de φ

Bilan : $\boxed{sp(\varphi) =]0,1] \text{ et } \forall \lambda \in sp(\varphi)\ ,\ ker(\varphi - \lambda Id_E) = Vect\Big(x \mapsto x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}\Big)}$

Exercice 2

Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*\ ,\ f'(x) = f(\frac{3}{16x})$

1) Montrer que f vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 2 que l'on notera (E).

2) Trouver une solution de (E) de la forme : $x \mapsto x^\alpha$

3) Trouver les fonctions f répondant au problème.

---

1) Puisque f est dérivable et que : $\forall x \in \mathbb{R}^*\ ,\ f'(x) = f(\frac{3}{16x})$, alors f' est dérivable et donc f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
En dérivant le relation sur $\mathbb{R}^*$ alors : $f''(x) = \frac{-3}{16x^2} f'(\frac{3}{16x})$
Mais en reprenant la relation initiale : $f'(\frac{3}{16x}) = f(\frac{3}{16\frac{3}{16x}}) = f(x)$
On a donc $f''(x) = \frac{-3}{16x^2} f(x)$

$\boxed{f \text{ est solution sur } \mathbb{R}^* \text{ de } (E) \Leftrightarrow 16x^2 f''(x) + 3f(x) = 0}$

2) Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ on a :
$x \mapsto x^\alpha$ solution de (E) sur $\mathbb{R}^+$
$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+\ ,\ 16x^2\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + 3x^\alpha = 0$
$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+\ ,\ \big(16\alpha(\alpha-1)+3\big)x^\alpha = 0$
$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+\ ,\ 16\alpha(\alpha-1)+3 = 0$
$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+\ ,\ 16\alpha^2 - 16\alpha + 3 = 0 \quad \Delta = 16^2 - 4.16.3 = 4.16 = 64 = 8^2$
$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+\ ,\ \alpha = \frac{16-8}{32}$ ou $\alpha = \frac{16+8}{32}$
$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+\ ,\ \alpha = \frac{1}{4}$ ou $\alpha = \frac{3}{4}$

(E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients continues sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc, d'après le cours, l'ensemble des solutions de (E) est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension 2.

Comme $(x \mapsto x^{1/4}, x \mapsto x^{3/4})$ est une famille libre de solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ alors :
$\boxed{\text{Les solutions de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ s'écrivent : } x \mapsto ax^{1/4} + bx^{3/4} \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2}$

3) Grâce au 1) on cherche les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ parmis les solutions de (E).
Si $\forall x > 0$, $f(x) = ax^{1/4} + bx^{3/4}$ vérifie : $f'(x) = f(\frac{3}{16x})$ alors :
$a\frac{1}{4}x^{-3/4} + b\frac{3}{4}x^{-1/4} = a(\frac{3}{16})^{1/4}x^{-1/4} + b(\frac{3}{16})^{3/4}x^{-3/4}$
Comme $(x \mapsto x^{-1/4}, x \mapsto x^{-3/4})$ est libre, alors :
$\begin{cases} \frac{1}{4}a = b(\frac{3}{16})^{3/4} \\ \frac{3}{4}b = a(\frac{3}{16})^{1/4} \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 4b(\frac{3}{16})^{3/4} \\ \frac{3}{4}b = b4(\frac{3}{16})^{3/4}(\frac{3}{16})^{1/4} \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 4b(\frac{3}{16})^{3/4} \\ \frac{3}{4}b = \frac{3}{4}b \end{cases}$
$\Leftrightarrow a = 4b(\frac{3}{16})^{3/4}$
$\Leftrightarrow a = b\frac{3^{3/4}}{2}$

Finalement les solutions du problème s'écrivent sur $\mathbb{R}_+^*$: $\boxed{x \mapsto b\left(\frac{3^{3/4}}{2}x^{1/4} + x^{3/4}\right)}$

Planche 5. ccINP *(Mathis M.)*

Exercice 1

Soit $E = \{f \in C^1([0,1], \mathbb{R})\ ,\ f(0) = 0\}$

1) Montrer que $f \mapsto ||f||_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$ et $f \mapsto ||f'||_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f'(x)|$ sont bien définies.

2) Montrer que : $N : f \mapsto ||f||_\infty + ||f'||_\infty$ est une norme.

3) Montrer que : $\forall f \in E\ , \forall x \in [0,1]\ ,\ f(x) = e^{-x}\int\limits_0^x e^t(f(t) + f'(t))dt$

4) On pose $\forall f \in E\ ,\ N'(f) = \sup\limits_{t\in[0,1]} |e^t(f(t) + f'(t))|$
Montrer que N' est une norme sur E.

5) Montrer que N et N' sont équivalentes.

---

1) Comme f est C^1 : $x \mapsto |f(x)|$ et $x \mapsto |f'(x)|$ sont deux fonctions continues sur une partie fermée bornée de $\mathbb{R}$.
Ces fonctions sont donc bornées et atteignent leurs bornes, on peut donc définir : $||f||_\infty$ et $||f'||_\infty$

Remarque : on sait même d'après le cours que : $f \mapsto ||f||_\infty$ est une norme sur E.

2) On remarque pour commencer que N prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

Soit $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
i) Par propriété de la norme infinie :
$N(\lambda f) = ||\lambda f||_\infty + ||\lambda f'||_\infty = |\lambda| \, ||f||_\infty + |\lambda| \, ||\lambda f'||_\infty = |\lambda| \, N(f)$

ii) De même $N(f+g) = ||f+g||_\infty + ||f'+g'||_\infty \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty + ||f'||_\infty + ||g'||_\infty = N(f) + N(g)$

iii) $N(f) = 0 \Rightarrow ||f||_\infty + ||f'||_\infty = 0 \Rightarrow ||f||_\infty = ||f'||_\infty = 0 \Rightarrow ||f||_\infty = 0 \Rightarrow f = 0_E$ puisque la norme infinie est une norme.

Bilan : $\boxed{N \text{ est bien une norme sur } E.}$

3) On remarque que $\frac{d}{dt}\big(e^t f(t)\big) = e^t(f(t) + f'(t))$ donc :
$\int\limits_0^x \big(e^t(f(t) + f'(t))\big)dt = [e^t f(t)]_0^x = e^x f(x) - f(0) = e^x f(x)$puisque $f(0) = 0$ car $f \in E$

On a donc bien : $\boxed{\forall f \in E \ , \ \forall x \in [0,1] \ , \ f(x) = e^{-x} \int\limits_0^x e^t(f(t) + f'(t))dt}$

4) Déjà N' prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$
Soit $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

i) $N'(\lambda f)$
$= \sup\limits_{x\in[0,1]} |e^t(\lambda f(t) + \lambda f'(t))| = \sup\limits_{x\in[0,1]} |\lambda| \, |e^t(f(t) + f'(t))| = |\lambda| \sup\limits_{x\in[0,1]} |e^t(f(t) + f'(t))| = |\lambda| \, N'(f)$

ii) Pour $t \in [0,1]$:
$|e^t((f+g)(t) + (f+g)'(t))|$
$= |e^t((f(t) + f'(t)) + (g(t) + g'(t))'(t))| \leq |e^t((f(t) + f'(t))| + |e^t((g(t) + g'(t))| \leq N'(f) + N'(g)$
en passant au sup pour $t \in [0,1]$: $N'(f+g) \leq N'(f) + N'(g)$

iii) $N'(f) = 0$
$\Rightarrow \sup\limits_{t\in[0,1]} |e^t(f(t) + f'(t))| = 0$
$\Rightarrow \forall t \in [0,1] \ , \ |e^t(f(t) + f'(t))| = 0$
$\Rightarrow \forall t \in [0,1] \ , \ e^t(f(t) + f'(t)) = 0$

Avec la relation du 3) , on en déduit : $\forall x \in [0,1] \ , \ f(x) = 0$ et donc $f = 0_E$

Finalement : $\boxed{N' \text{ est une norme sur } E}$

5) • On a, comme $e^t \leq e$ sur $[0,1]$:
$|e^t(f(t)+f'(t))| \leq |e^t f(t)| + |e^t f'(t)| \leq e^t \,||f||_\infty + e^t \,||f'||_\infty \leq ||f||_\infty + e \,||f'||_\infty = eN(f)$
En passant au sup sur $[0,1]$ on a $N'(f) \leq eN(f)$

• En dérivant l'égalité de la question 3) :
$f'(x) = -e^{-x} \int\limits_0^x e^t(f(t)+f'(t))dt + e^{-x}(e^x(f(x)+f'(x))$
Par inégalité de la moyenne et inégalité triangulaire :
$|f'(x)| \leq e^{-x} \int\limits_0^x N'(f) + e^{-x}N'(f) \leq 1 \times xN'(f) + N'(f) \leq 2N'(f)$ car $x \leq 1$
En passant au sup sur $[0,1]$: $||f'||_\infty \leq 2N'(f)$

• Avec l'égalité de la question 3) : $|f(x)| \leq e^{-x} \int\limits_0^x N'(f)dt \leq xN'(f) \leq N'(f)$
En passant au sup sur $[0,1]$: $||f||_\infty \leq N'(f)$

• Avec les deux dernières inégalités : $N(f) = ||f||_\infty + ||f'||_\infty \leq 3N'(f)$

• On a donc : $N'(f) \leq eN(f)$ et $N(f) \leq 3N'(f)$ donc $\frac{1}{e}N'(f) \leq N(f) \leq 3N'(f)$

Donc : $\boxed{N \text{ et } N' \text{ sont équivalentes.}}$

Exercice 2

1) Montrer que : $A = \int\limits_0^1 \frac{ln(t)}{1+t}dt$ est convergente.

2) Exprimer A sous forme de somme et calculer A.

On admettra que : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

---

1) On pose $I =]0,1]$ et $\forall t \in I$, $f(t) = \frac{ln(t)}{1+t}$
f est continue sur $]0,1]$, A pose problème seulement en 0.

Au voisinage de $t = 0$:
$f(t) \sim ln(t)$ et $t \mapsto ln(t)$ est intégrable sur $]0,1]$ d'après le cours.
Donc, par équivalent f est intégrable sur $]0,1]$ et donc $\boxed{A \text{ est convergente.}}$

2) On utilise le développement en série entière du cours : $\forall t \in [0,1[$, $\frac{1}{1+t} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^n$ et on a : $\forall t \in]0,1[$, $f(t) = ln(t)\frac{1}{1+t} = ln(t)\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n ln(t) t^n$

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$: $\begin{array}{cccc} f_n &]0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & (-1)^n ln(t) t^n \end{array}$

On a : $\forall t \in]0,1]$, $|f_n(t)| = -t^n ln(t)$

Pour $n = 0$: $t \mapsto -ln(t)$ est intégrable sur $]0,1]$ d'après le cours.

Pour $n \geq 1$, $f_n(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc f_n est prolongeable par continuité en 0 et donc f_n est intégrable sur $]0,1]$

$\int\limits_0^1 |f_n(t)|\, dt$

$= \int\limits_0^1 -t^n ln(t)dt$ on intègre par partie (justifié car les limites aux bornes du crochet existe dans $\mathbb{R}$)

$= [\frac{-t^{n+1}}{n+1} ln(t)]_0^1 + \int\limits_0^1 \frac{t^{n+1}}{n+1}\frac{1}{t}dt = \int\limits_0^1 \frac{t^n}{n+1}dt = \frac{1}{(n+1)^2}$

Comme $\sum \frac{1}{(n+1)^2}$ est convergente alors $\sum \int\limits_0^1 |f_n(t)|\, dt$ est convergente.

On a alors : $\begin{cases} \text{les } f_n \text{ sont continues par morceaux et intégrables sur }]0,1[\\ \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ converge simplement vers } f \text{ sur }]0,1[\text{ qui est continue par morceaux sur }]0,1[\\ \sum \int\limits_0^1 |f_n(t)dt| \text{ est convergente} \end{cases}$

On peut donc appliquer le théorème d'intégration terme à terme et on a :

$\int\limits_0^{+\infty} \big(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\big)dt = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int\limits_0^{+\infty} f_n(t)dt$

$\Rightarrow \int\limits_0^{+\infty} f(t)dt = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2}dt$ comme f_n est du même signe que $(-1)^{n+1}$

$\Rightarrow A = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}dt$

• On sait que : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, on a donc : $A + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1+(-1)^n}{n^2}$

On remarque que : $1 + (-1)^n = 0$ si n impair et $1 + (-1)^n = 2$ si n pair ($n = 2k$). Alors : comme la série est absolument convergente par Riemann, on peut sommer par paquets en séparant les termes paires et les termes impaires. On obtient :

$$A + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 0 + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{(2k)^2} \Rightarrow A + \frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \Rightarrow A + \frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{2}\frac{\pi^2}{6} \Rightarrow A = \frac{-\pi^2}{12}$$

On a donc : $\boxed{A = \frac{-\pi^2}{12}}$

Planche 6. ccINP *(Laureana P.)*

Exercice 1

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda > 0$ et $\mu > 0$. On pose $Z = X + Y$

1) Montrer que Z suit une loi de Poisson.

2) Maintenant X et Y suivent une même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ et sont indépendantes.
Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

---

1) On sait que la fonction génératrice de X vaut $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$ et que celle de Y vaut $G_Y(t) = e^{\mu(t-1)}$

Comme X et Y sont indépendantes alors : $G_Z = G_{X+Y} = G_X G_Z$

Comme tout les rayons de convergence valent $+\infty$, on a a :
$\forall t \in \mathbb{R}\ ,\ G_Z(t) = G_X(t)G_Y(t) = e^{\lambda(t-1)}e^{\mu(t-1)} = e^{(\lambda+\mu)(t-1)}$

On reconnaît la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$. Comme la fonction génératrice caractérise la loi, alors :
$\boxed{X + Y \text{ suit une loi de Poisson de paramètre } \lambda + \mu}$

2) D'après le cours,en posant $q = 1 - p$, on a $\forall t \in]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}[\ ,\ G_X(t) = G_Y(t) = \frac{pt}{1-qt}$

Comme en 1) : $G_Z(t) = \left(\frac{pt}{1-qt}\right)^2 = p^2t^2\frac{1}{(1-qt)^2}$

On sait que : $\forall u \in\ ]-1,1[\ ,\ \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u^n = \frac{1}{1-u}$
Comme on a une série entière, la fonction est C^∞ et on peut la dériver terme à terme sur $]-1,1[$ l'intervalle ouverte de convergence.
On obtient : $\forall u \in\ ]-1,1[\ ,\ \sum\limits_{n=1}^{+\infty} nu^{n-1} = \frac{1}{(1-u)^2}$

Donc : $\forall t \in]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}[\ ,\ \frac{1}{(1-qt)^2} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n(qt)^{n-1}$

En multipliant par p^2t^2 : $G_z(t) = p^2t^2\frac{1}{(1-qt)^2} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} np^2t^2(qt)^{n-1} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} np^2q^{n-1}t^{n+1}$
Par changement d'indice $N = n + 1$: $G_z(t) = \sum\limits_{N=2}^{+\infty}(N-1)p^2q^{N-2}t^N$

Comme la fonction génératrice caractérise la loi, on en déduit :

$\boxed{Z(\Omega) = \mathbb{N}\backslash\{0,1\} \text{ et } \forall n \in Z(\Omega)\ ,\ \mathbb{P}(Z = n) = (n-1)p^2q^{n-2}}$

Exercice 2

Soit E un K espace vectoriel de dimension finie, $u \in L(E)$ et H un hyperplan de E.

1) Montrer que si H est stable par u alors $\exists \lambda \in K \ , \ Im(u - \lambda Id_E) \subset H$

2) ???

---

1) On suppose que H est stable par u.
Comme H est un hyperplan de E, en notant n la dimension de E on a il existe $(e_1, \dots, e_{n-1})$ une base de H.
On complète alors cette famille libre en $B = (e_1, \dots, e_{n-1}, e_n)$ une base de E.
Comme H est stable par u alors la matrice de u relativement à B est de la forme.

$M_B(u) = \begin{pmatrix} A & V \\ 0_{M_{1,n-1}(K)} & \lambda \end{pmatrix}$ avec $V \in M_{n-1,1}(K)$ et $A \in M_{n-1}(K)$ et $\lambda \in K$

Alors $M_B(u - \lambda Id_E) = \begin{pmatrix} A - \lambda I_{n-1} & V \\ 0_{M_{1,n-1}(K)} & 0 \end{pmatrix}$

Comme la dernière ligne est nulle on a bien : $Im(u - \lambda Id_E) \subset Vect(e_1, \dots, e_{n-1}) = H$

Donc : $\boxed{\exists \lambda \in K \ , \ Im(u - \lambda Id_E) \subset H}$

Planche 7. ccINP *(Akram M.)*

Exercice 1

On dit qu'une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ est à diagonale propre si ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux (avec leur ordre de multiplicité).
On note E_n l'ensemble des matrices à diagonale propre de $M_n(\mathbb{R})$.

1) Donner des exemples de matrices à diagonales propres.

2) La matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle à diagonale propre ?

3) Soit A une matrice antisymétrique à diagonale propre.
a) Que dire des coefficients diagonaux de A ?
b) Montrer qu'il existe un entier naturel $p \geq 2$ tel que $A^p = 0$
c) Calculer $(A^T A)^p$.
En remarquant que $A^T A$ est symétrique, montrer que $A^T A = 0$ puis que $A = 0$.

4) Donner la dimension de $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $M_n(\mathbb{R})$.

5) a) Soit F un sous-espace vectoriel de E_n. Montrer que : $dim(F) \leq \frac{n(n+1)}{2}$
5) b) Quelle est la dimension maximale de F ?

---

1) Les matrices diagonales ou triangulaire sont des matrices à diagonale propre.

2) $\chi_M(X) = \begin{vmatrix} X & 0 & -1 \\ 0 & X & 0 \\ 1 & 0 & X \end{vmatrix} = X^3 + X = X(X^2+1)$

Cette matrice n'est pas à diagonale propre car 0 est la seule valeur propre réelle, 0 est valeur propre simple mais apparaît trois fois sur la diagonale.

3) a) Soit $A = (a_{i,j})$ antisymétrique. Alors : $A^T = -A$ donc $a_{j,i} = -a_{i,j}$, en particulier $a_{i,i} = -a_{i,i}$ et donc $a_{i,i} = 0$
Donc les termes diagonaux de A sont nuls.

3) b) Comme A est à diagonale propre et que ses termes diagonaux sont nuls, alors $sp(A) = \{0\}$ avec 0 valeur propre d'ordre n (car n termes sur la diagonale)

Comme on peut trigonaliser A dans $M_n(\mathbb{C})$ et on a alors $A = PTP^{-1}$ avec T une matrice triangulaire n'ayant que des 0 (les valeurs propres) sur la diagonale.
Le polynôme caractéristique de A est alors X^n et, par Hamilton-Cayley : $A^n = 0$ donc :
$\boxed{\text{il existe un entier naturel } p \geq 2 \text{ tel que } A^p = 0}$

3) c) • Comme $A^T = -A$ alors A et A^T commutent
et donc $(A^TA)^p = A^p(A^T)^p = 0$ puisque $A^p = 0$ On a donc : $\boxed{(A^TA)^p = 0}$

• Comme A^TA est symétrique (en effet $(A^TA)^T = (A^T)(A^T)^T = A^TA$) alors A^TA est diagonalisable car symétrique réelle.
Comme $(A^TA)^p = 0$ alors X^p est un polynôme annulateur de A^TA.
Le spectre de A^TA est donc inclus dans l'ensemble des racines de X^p à savoir $\{0\}$
A^TA est donc semblable à une matrice diagonale n'ayant que des 0 sur la diagonale et donc $A^TA = 0$

On en déduit $tr(A^TA) = 0$ et comme $(A, B) \mapsto tr(A^TB) =< A, B >$ est un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$ on a $< A, A >= 0$ donc $A = 0$

4) D'après le cours : $\boxed{dim(A_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n-1)}{2}}$

5)a) Soit F un sous espace vectoriel de E_n

Par la formule de Grassmann : $dim(F + A_n(\mathbb{R})) = dim(F) + dim(A_n(\mathbb{R})) - dim(F \cap A_n(\mathbb{R}))$
Mais d'après la question 4) : $F \cap A_n(\mathbb{R}) = \{0\}$ donc $dim(F + A_n(\mathbb{R})) = dim(F) + dim(A_n(\mathbb{R}))$
Mais $F + A_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$ donc $dim(F + A_n(\mathbb{R})) \leq dim(M_n(\mathbb{R})) = n^2$
Donc $dim(F) + dim(A_n(\mathbb{R})) \leq n^2$ et comme $dim(A_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n-1)}{2}$ alors :
$dim(F) \leq n^2 - dim(A_n(\mathbb{R})) = n^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$

$\boxed{\text{Si } F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E_n \text{ alors : } dim(F) \leq \frac{n(n+1)}{2}}$

5)b) Si on note T_n l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de $M_n(\mathbb{R})$ alors T_n est un sous espace vectoriel de E_n de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$

$\boxed{\text{la dimension maximale d'un sous espace vectoriel de } E_n \text{ est donc } \frac{n(n+1)}{2}}$

Exercice 2

Soit f la fonction définie par $f(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} t^{n^2}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.

2) Montrer que f est continue sur son ensemble de définition.

3) Donner un équivalent de f en 1^-.

On donne $\int\limits_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

---

1) f est une série entière, calculons son rayon de convergence R.
$f(1)$ est clairement divergente donc $R \leq 1$
Si $|t| < 1$ alors $t^{n^2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. On en déduit $R \geq |t|$.
Ceci pour tout $t \in]-1, 1[$ donc $R \geq 1$.
Comme $R \geq 1$ et $R \leq 1$, on a donc : $R = 1$ et f définie sur $]-1, 1[$ et non définie sur $]-\infty, -1[$ et $]1, +\infty[$ car série entière.
$f(1)$ est divergente, $f(-1)$ est aussi divergente donc : $\boxed{\text{le domaine de définition de } f \text{ est }]-1, 1[}$

2) Comme f est une série entière alors f est C^∞ et donc continue sur son domaine de définition qui est son intervalle ouvert de convergence $]-1, 1[$

3) • Dans un premie temps fixons $t \in]0, 1[$et considérons la fonction :

$$a \; : \; \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & t^{x^2} = exp(x^2 ln(t)) \end{array}$$

Comme $ln(t) < 0$ alors a est décroissante.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [n, n+1]$, $a(n+1) \leq a(t) \leq a(n) \Leftrightarrow t^{(n+1)^2} \leq t^{x^2} \leq t^{n^2}$

En intégrant sur $[n, n+1]$ on a : $t^{(n+1)^2} \leq \int\limits_{n}^{n+1} t^{x^2} dx \leq t^{n^2}$

Comme les séries et l'intégrale mis en jeu sont convergentes, on peut sommer cette double inégalité pour n variant de 0 à $+\infty$ et on obtient :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} t^{(n+1)^2} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \int\limits_{n}^{n+1} t^{x^2} dx \leq \sum_{n=0}^{+\infty} t^{n^2}$$
Avec la relation de Chasles : $f(t) - 1 \leq \int\limits_{0}^{+\infty} t^{x^2} dx \leq f(t)$

Mais $\int\limits_{0}^{+\infty} t^{x^2} dx = \int\limits_{0}^{+\infty} exp(x^2 ln(t)) dx = \int\limits_{0}^{+\infty} exp\big(-(\sqrt{\underbrace{-ln(t)}_{\leq 0}} x)^2\big) dx$

On effectue le changement de variable C^1 bijectif : $u = \sqrt{-ln(t)}x$ et on a :
$$\int\limits_{0}^{+\infty} t^{x^2} dx = \int\limits_{0}^{+\infty} exp\big(-u^2\big) \frac{du}{\sqrt{-ln(t)}}$$

Avec l'intégrale donnée : $\int\limits_{0}^{+\infty} t^{x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-ln(t)}}$

En reprenant la double inégalité précédente : $f(t) - 1 \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-ln(t)}} \leq f(t)$

Comme $\lim\limits_{t \to 1^-} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-ln(t)}} = +\infty$ on en déduit :
$$\boxed{f(t) \underset{t \to 1^-}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-ln(t)}}}$$

Planche 8. ccINP *(Nino D.)*

Exercice 1

Soit $E = \mathbb{R}$. On considère le produit scalaire sur E donné par :
$\forall (P,Q) \in E^2$ on écrit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$ avec $n \geq deg(P)$ et $n \geq deg(Q)$ et certains coefficients qui peuvent être nul.
On pose alors : $< P, Q >= \sum_{k=0}^{n} a_k b_k$

On définit f sur E par : $\forall P \in E\ ,\ f(P) = a_0$

On définit g sur E par : $\forall P \in E\ ,\ g(P) = \sum_{k=0}^{n} a_k$

0) Montrer que $<,>$ définit un produit scalaire sur E.

1) Montrer que f est continue.

2) Trouver une suite $(P_k)_{k\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ telle que : $\lim_{k\to+\infty} \frac{|g(P_k)|}{||P_k||} = +\infty$

3) Est-ce que g est continue sur E ?

4) Est-ce que la restriction de g à $\mathbb{R}_n[X]$ est une fonction continue de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}$?

5) On pose $H = ker(g)$. Montrer que $H^{\perp} = \{0_E\}$

6) Comparer H et $(H^{\perp})^{\perp}$

---

0) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P, Q, R \in E$ que l'on écrira $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$ et $R = \sum_{k=0}^{n} c_k X^k$ avec un n assez grand.
On a alors :

i) $< P, Q + \lambda R >= \sum_{k=0}^{n} a_k(b_k + \lambda c_k) = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k + \lambda \sum_{k=0}^{n} a_k c_k =< P, Q > +\lambda < P, R >$

ii) $< P, Q >= \sum_{k=0}^{n} a_k b_k = \sum_{k=0}^{n} b_k a_k =< Q, P >$

iii) $< P, P >= \sum_{k=0}^{n} a_k^2 \geq 0$

iv) $< P, P >= 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k^2 = 0 \Rightarrow \forall k \in [\![0, n]\!]\ ,\ a_k^2 = 0 \Rightarrow \forall k \in [\![0, n]\!]\ ,\ a_k = 0 \Rightarrow P = 0_E$

On a donc : $\forall (P,Q,R) \in E^3$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} < P, Q+\lambda R >=< P,Q > +\lambda < P,R > \\ < P,Q >=< Q,P > \\ < P,P >\geq 0 \\ < P,P >= 0 \Rightarrow P = 0_E \end{cases}$

et donc $\boxed{<,> \text{ définit bien un produit scalaire sur } E.}$

1) Pour $P \in E$ on pose : $||P|| = \sqrt{< P,P >} = \sqrt{\sum\limits_{k=0}^{n} |a_k^2|}$

$||.||$ est donc la norme associée à $<,>$

On a alors : $|f(P)| = |a_0| \leq \sqrt{\sum\limits_{k=0}^{n} a_k^2} = ||P||$

Comme f est linéaire on a pour $(P,Q) \in E^2$: $|f(P) - f(Q)| \leq ||P - Q||$.
On en déduit que f est 1-lipschitzienne et donc que : $\boxed{f \text{ est continue.}}$

2) Si on pose $P_k = k(1 + X + X^2 + \cdots + X^k)$ alors $g(P_k) = \sum\limits_{i=1}^{k} k = k^2$

et $||P_k|| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{k} k^2} = \sqrt{k^3} = k^{3/2}$ donc pour $k \geq 1$: $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{|g(P_k)|}{||P_k||} = \lim\limits_{k\to+\infty} \frac{k^2}{k^{3/2}} = \lim\limits_{k\to+\infty} \sqrt{k} = +\infty$

3) On reprend les notations de la question 2) et on pose : $Q_k = \frac{P_k}{k^2}$ alors $||Q_k|| = \frac{||P_k||}{k^2} = \frac{1}{\sqrt{k}}$

On a donc $\lim\limits_{k\to+\infty} ||Q_k|| = 0$ donc $\lim\limits_{k\to+\infty} Q_k = 0_E$
De plus $g(Q_k) = \frac{1}{k^2} g(P_k) = 1$
On a donc $\begin{cases} \lim\limits_{k\to+\infty} Q_k = 0_E \\ \lim\limits_{k\to+\infty} g(Q_k) = 1 \neq g(0_E) \end{cases}$

On peut donc en déduit que : $\boxed{g \text{ n'est pas continue de } E \text{ dans } \mathbb{R}.}$

4) Comme une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimensions FINIES est toujours continue, alors : $\boxed{\text{la restriction de } g \text{ à } \mathbb{R}_n[X] \text{ est continue.}}$

5) Raisonnons par l'absurde et supposons que P soit un élément non nul de $H^\perp$
Alors on peut écrite $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $n \geq 0$ et $a_n \neq 0$
Posons alors : $T = X^n - X^{n+1}$. On a alors $g(T) = 1 - 1 = 0$ donc $T \in ker(g) = H$
Comme $P \in H^\perp$ et $T \in H$ alors $< P,T >= 0$
Mais $< P,T >= a_n$ et $a_n \neq 0$
Absurde. Il n'y a pas d'éléments non nul dans $H^\perp$.

On a donc : $\boxed{H^\perp = \{0_E\}}$

6) Avec le 5), on a : $(H^\perp)^\perp = \{0_E\}^\perp = E \neq H$. Donc $\boxed{(H^\perp)^\perp \neq H}$

Exercice 2

On pose $f_n(x) = \frac{e^{-x}}{1+n^2x^2}$ et $u_n = \int\limits_0^1 f_n(x)dx$

1) Etudier la convergence simple de la suite (f_n) sur $[0,1]$.

2) Y-a-t-il convergence uniforme de (f_n) sur $[a,1]$ avec $a \in]0,1[$?

3) Y-a-t-il convergence uniforme sur $[0,1]$?

4) Trouver la limite de la suite (u_n) en $+\infty$.

---

1) • Pour $x = 0$: $f_n(x) = \frac{1}{1} = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = 1$

• Pour $x \in]0,1]$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{n^2x^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Donc : $\boxed{(f_n) \text{ converge simplement sur } [0,1] \text{ vers } \begin{array}{rccl} f & : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]0,1] \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}}$

2) $\forall x \in [a,1]$, $0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{1+n^2a^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

On a trouvé un majorant, indépendant de x qui tend vers 0 donc :

$\boxed{(f_n) \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } [a,1] \text{ si } a \in]0,1[}$

3) Les f_n étant continues sur $[0,1]$, si il y avait convergence uniforme sur $[0,1]$, alors f serait continue sur $[0,1]$. Or f n'est clairement pas continue en 0, donc :

$\boxed{(f_n) \text{ ne converge pas uniformément vers } f \text{ sur } [0,1]}$

4) On a : $\forall x \in [0,1]$, $0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{1+n^2x^2} \leq 1$

On a donc: $\begin{cases} \text{les } f_n \text{ sont continue par morceaux sur } [0,1] \\ (f_n) \text{ converge simplement vers } f \text{ sur } [0,1] \text{ avec } f \text{ continue par morceaux sur } [0,1] \\ \forall n \in \mathbb{N} \text{ , } \forall t \in [0,1] \text{ , } |f_n(t)| \leq 1 \\ t \mapsto 1 \text{ est intégrable } sur[0,1] \end{cases}$

par le théorème de convergence dominée : f et les f_n sont intégrables sur $[0,1]$ et :

$$\lim_{n\to+\infty} \underbrace{\int_0^1 f_n(t)dt}_{u_n} = \int\limits_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(t)dt = \int\limits_0^1 0dt = 0$$

On a donc : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$

Planche 9. ccINP *(Swann L.)*

Exercice 1

Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $u \in L(E)$.
On note B la base canonique de E. On note A la matrice de u relativement à B.
On note u^* l'endomorphisme admettant A^T comme matrice relativement à B.

1) Montrer que : $\forall (x,y) \in E^2 \ , \ < u(x), y >=< x, u^*(y) >$

2) Montrer que si un sous-espace vectoriel F est stable par u, $F^\perp$ est stable par u^*.

3) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

3) a) A et A^T sont-elle diagonalisable ?

3) b) Trouver les sous-espaces vectoriel stable par u.

---

1) Notons $\begin{cases} X = M_B(x) \text{ la matrice des coordonnées de } x \text{ dans } B \\ Y = M_B(y) \text{ la matrice des coordonnées de } y \text{ dans } B \end{cases}$

Alors : $< u(x), y >= (AX)^T Y = (X^T A^T) Y = X^T (A^T Y) =< x, u^*(y) >$

On a donc bien : $\boxed{\forall (x,y) \in E^2 \ , \ < u(x), y >=< x, u^*(y) >}$

Remarque : on dit que u^* est l'adjoint de u.

2) Soit $x \in F^\perp$

Pour $y \in F$ on a : $u(y) \in F$ car F est stable par u.
Avec le 1) : $< y, u^*(x) >=< \underbrace{u(y)}_{\in F}, \underbrace{x}_{\in F^\perp} >= 0$ en utilisant la définition de $F^\perp$.
Donc $\forall y \in F \ , \ < y, u^*(x) >= 0$ et donc $u^*(x) \in F^\perp$

Donc : $\forall x \in F^\perp, \ , \ u^*(x) \in F^\perp$ et on a bien : $\boxed{F \text{ stable par } u \Rightarrow F^\perp \text{ stable par } u^*}$

3) a) • Calculons le polynôme caractéristique de A
On a : $\chi_A(X)$
$= \begin{vmatrix} X-1 & 3 & -3 \\ 0 & X-1 & 0 \\ 0 & -2 & X-2 \end{vmatrix} = (X-1) \begin{pmatrix} X-1 & 0 \\ -2 & X-2 \end{pmatrix} = (X-1)(X-1)(X-2) = (X-1)^2(X-2)$

• On a donc $sp(A) = \{1, 2\}$ avec 1 qui est valeur propre double.

- $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in ker(A - I_3) \Leftrightarrow \begin{cases} -3y + 3z = 0 \\ 0 = 0 \\ 2y + 2 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow y = z = 0$

Donc $ker(A - I_3) = vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$ qui est de dimension 1 alors que 1 est valeur propre double de A.
Donc A n'est pas diagonalisable.
• A et A^T ont même spectre.
$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in ker(A^T - I_3) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ -3x + 2z = 0 \\ 3x + z = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow x = z = 0$

Donc $ker(A^T - I_3) = vect(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$ qui est de dimension 1 alors que 1 est valeur propre double de A^T.
Donc A^T n'est pas diagonalisable.

Bilan : $\boxed{A \text{ et } A^T \text{ ne sont pas diagonalisable.}}$

3) b) • Commençons par chercher les droites stables de u à l'aide des valeurs propres.
On a déjà trouvé $vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$ au 3)a)

Avec la valeur propre 2, on trouve $vect(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$

• Pour trouver les plans stables de u, on va utiliser le 2) et les droites stables de u^*.

Par le 3) a) $vect(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$ est stable par u^* donc le plan d'équation $y = 0$ est stable par u

Avec la valeur propre 2 : $vect(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix})$ est stable par u^* et donc le plan d'équation $2y + z = 0$ est stable par u.

• Les sous-espaces stables par u sont donc : $\mathbb{R}^3$, $\{0_{\mathbb{R}^3}\}$, $vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$, $vect(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$, le plan $y = 0$ et le plan $2y + z = 0$

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ on pose : $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $v_n = sin(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})$ et $w_n = ln(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})$

1) Rappeler le critère spécial pour les séries alternées.

2) Montrer que : $u_n \sim v_n \sim w_n$

3) Etudier $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$

---

1) Voir cours.

2) Comme $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et que $sin(u) \underset{u=0}{\sim} u$ alors $v_n \sim u_n$
De même $ln(1+u) \underset{u=0}{\sim} u$ donne $w_n \sim u_n$ et par transitivité de l'équivalent, on a : $\boxed{u_n \sim v_n \sim w_n}$

3) • $\begin{cases} \sum u_n \text{ est une série alternée} \\ |u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \\ (|u_n|)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est décroissante} \end{cases}$ donc, par le théorème spécial : $\sum u_n$ est convergente.

• Par développement limité : $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{6}\frac{1}{n^{3/2}} + o(\frac{1}{n^{3/2}}) = u_n + O(\frac{1}{n^{3/2}})$
Comme $\frac{1}{n^{3/2}} > 0$ et $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ est une série de Riemann convergente ($\frac{3}{2} > 1$), alors, par domination : $\sum O(\frac{1}{n^{3/2}})$ est convergente.

On a donc : $\begin{cases} v_n = u_n + O(\frac{1}{n^{3/2}}) \\ \sum u_n \text{ convergente} \\ \sum O(\frac{1}{n^{3/2}}) \text{ convergente} \end{cases}$ et donc $\sum v_n$ convergente.

• Par développement limité : $w_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})$
En posant $a_n = w_n - u_n$ on a : $a_n = -\frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})$
$a_n \sim -\frac{1}{2n} < 0$, et comme $\sum \frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente, alors, par équivalent : $\sum a_n$ divergente.

On a donc : $\begin{cases} w_n = u_n + a_n \\ \sum u_n \text{ convergente} \\ \sum a_n \text{ divergente} \end{cases}$ et donc $\sum w_n$ divergente.

• BILAN : $\boxed{\sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont convergentes et } \sum w_n \text{ est divergente.}}$

Planche 10. ccINP *(Ryann D.)*

Exercice 1

Un centre d'appel téléphonique reçoit des appels pour deux produits A et B.
Les appels successifs sont supposés indépendants.
Lors d'un appel, la probabilité de recevoir un appel pour le produit A est de 20% et celle de recevoir un appel pour le produit B de 80%.

On note X_A la variable aléatoire qui correspondant au rang du premier appel pour le produit A et X_B le rang du premier appel pour le produit B.

On note L la longueur de la première série d'appels successifs du premier produit.

Exemple : $AAABBAA$ donne $X_A = 1$, $X_B = 4$ et $L = 3$.

1) a) Donner la loi de probabilité de X_A.

1) b) Justifier que X_A admet une espérance et une variance finie. Les définir et les calculer.

1) c) De même pour X_B.

2) a) Exprimer $(L = n)$ en fonction de $(X_A = n + 1)$ et de $(X_B = n + 1)$

2) b) Déterminer une expression de $P(L = n)$

2) c) Montrer que : $P(L = n) = 0.8P(X_A = n) + 0.2P(X_B = n)$

3) En déduire que L admet une espérance finie et la calculer.

4) a) X_A et X_B sont-elles indépendantes ?

4) b) L et X_A sont-elles indépendantes ?

1) a) On peut dans ce a) considérer que chaque appel est une épreuve de Bernouilli de paramètre $20\% = \frac{1}{5}$ (succès = recevoir un appel pour A).
X_A est alors le temps d'attente du premier succès. Comme les appels sont indépendants, alors, on reconnaît le schéma caractéristique d'une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{5}$.
On a donc : $\boxed{X_A \hookrightarrow G(\frac{1}{5})}$

1) b) On sait alors d'après le cours que X_A admet une espérance et un variance donnée par : $\boxed{E(X_A) = \frac{1}{\frac{1}{5}} = 5 \text{ et } V(X_A) = \frac{1-\frac{1}{5}}{\left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{5}{4}}$

1) c) De même $\boxed{X_B \hookrightarrow G(\frac{4}{5})}$ et $\boxed{E(X_B) = \frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4} \text{ et } V(X_B) = \frac{1-\frac{4}{5}}{\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{5}{16}}$

2)a) Si la première série est de longueur n, on a alors $\underbrace{A\dots A}_{n \text{ fois } A}B$ ou $\underbrace{B\dots B}_{n \text{ fois } B}A$, donc on a : $\boxed{(L = n) = (X_A = n+1) \cup (X_B = n+1)}$

2)b) D'après le a) et par incompatibilité : $P(L = n) = P(X_A = n+1) + P(X_A = n+1)$
Comme on connaît les lois de A et B on a : $\boxed{P(L = n) = (\frac{4}{5})^n\frac{1}{5} + (\frac{1}{5})^n\frac{4}{5} = \frac{4^n+4}{5^{n+1}}}$

2)c) Avec le b) on peut écrire : $P(L = n) = \frac{4}{5}\underbrace{(\frac{4}{5})^{n-1}\frac{1}{5}}_{P(X_A=n)} + \frac{1}{5}\underbrace{(\frac{1}{5})^{n-1}\frac{4}{5}}_{P(X_B=n)}$

On a donc $\boxed{P(L = n) = 0.8P(X_A = n) + 0.2P(X_B = n)}$

3) On multiplie la relation du 2)c) par n et on somme de $n = 1$ à $+\infty$ ce qui donne :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nP(L = n) = 0.8\sum_{n=1}^{+\infty} nP(X_A = n) + 0.2\sum_{n=1}^{+\infty} nP(X_B = n)$$
$$\Rightarrow E(L) = 0.8E(X_A) + 0.2E(X_B)$$

Comme on connaît $E(X_A)$ et $E(X_B)$ alors : $E(L) = 0.8\frac{1}{0.2} + 0.2\frac{1}{0.8} = 4.25$

On a donc : $\boxed{E(L) = 4.25 = \frac{17}{4}}$

4) a) $(X_A = 1)$ et $(X_B = 1)$ sont incompatibles car le premier appel ne peut pas venir de A et de B en même temps, donc $P((X_A = 1) \cap (X_B = 1)) = 0$, comme $P(X_A = 1) \neq 0$ et $P(X_B = 1) \neq 0$ alors on a : $P((X_A = 1) \cap (X_B = 1)) \neq P(X_A = 1)P(X_B = 1)$

donc $\boxed{X_A \text{ et } X_B \text{ ne sont pas indépendantes}}$

4) b) Si on a $L = 2$ alors on a : $AB\dots$ ou $BA\dots$ donc $X_A = 1$ ou $X_A = 2$.
On en déduit $(L = 2) \cap (X_A = 3) = \emptyset$ donc $P((L = 2) \cap (X_A = 3)) = 0 \neq P(L = 2)P(X_A = 3)$ et donc comme ci-dessus : $\boxed{X_A \text{ et } L \text{ ne sont pas indépendantes}}$

Exercice 2 Pas de retour ...

Planche 11. ccINP *(Nicolas P.)*

Exercice 1

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1) Démontrer que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$: $P(X \leq n) = \frac{1}{n!} \int\limits_{\lambda}^{+\infty} e^{-x} x^n dx$

2) En déduire une équivalent simple quand n tend vers $+\infty$ de : $u_n = \int\limits_{\lambda}^{+\infty} e^{-x} x^n dx$

Soit G_X la fonction génératrice de X.

3) Calculer $G_X(1)$ et $G_X(-1)$.

4) En déduire la probabilité que X prenne une valeur paire.

Soit Y une variable aléatoire indépendante de X suivant une loi uniforme sur $\{1, 2\}$.

5) Calculer la probabilité que XY prenne une valeur paire.

---

1) • Commençons par montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int\limits_{\lambda}^{+\infty} e^{-x} x^n dx$ est convergente.

On a : $x \mapsto e^{-x} x^n$ continue sur $[\lambda, +\infty[$ et de plus $e^{-x} x^n = o(e^{-x/2})$ au voisinage de $+\infty$. Comme $x \mapsto e^{-x/2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, alors par négligeabilité $x \mapsto e^{-x} x^n$ est intégrable sur $[\lambda, +\infty[$.

On a donc : $\int\limits_{\lambda}^{+\infty} e^{-x} x^n dx$ convergente.

• Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(X \leq n) = \frac{1}{n!} \int\limits_{\lambda}^{+\infty} e^{-x} x^n dx$

Initialisation :
Comme $X(\Omega) = \mathbb{N}$ alors $(X \leq 0) = (X = 0)$ donc $P(X \leq 0) = P(X = 0) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^0}{0!} = e^{-\lambda}$
D'autre part : $\frac{1}{0!} \int\limits_{\lambda}^{+\infty} e^{-x} x^0 dx = \int\limits_{\lambda}^{+\infty} e^{-x} dx = [-e^{-x}]_{\lambda}^{+\infty} = e^{-\lambda}$
On a donc bien la formule au rang 0.

Hérédité :

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}\frac{x^{n+1}}{n+1}=0$ on peut faire l'IPP suivante :

$\int\limits_{\lambda}^{+\infty} e^{-x}x^n dx = [e^{-x}\frac{x^{n+1}}{n+1}]_{\lambda}^{+\infty} - \int\limits_{\lambda}^{+\infty} (-e^{-x})\frac{x^{n+1}}{n+1}dx = -e^{-\lambda}\frac{\lambda^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{n+1}\int\limits_{\lambda}^{+\infty} e^{-x}x^{n+1}dx$

En multipliant par $\frac{1}{n!}$ on a :

$\frac{1}{n!}\int\limits_{\lambda}^{+\infty} e^{-x}x^n dx = -e^{-\lambda}\frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!}\int\limits_{\lambda}^{+\infty} e^{-x}x^{n+1}dx$

Donc avec l'hypothèse de récurrence et la définition de $X \hookrightarrow P(\lambda)$:

$P(X\le n) = -P(X=n+1) + \frac{1}{(n+1)!}\int\limits_{\lambda}^{+\infty} e^{-x}x^{n+1}dx$

$\Rightarrow \frac{1}{(n+1)!}\int\limits_{\lambda}^{+\infty} e^{-x}x^{n+1}dx = P(X\le n) + P(X=n+1)$

Mais $(X\le n)\cup(X=n+1) = (X\le n+1)$ et $(X\le n)$ et $(X=n+1)$ sont incompatibles, donc $P(X\le n)+P(X=n+1) = P(X\le n+1)$

Finalement : $\frac{1}{(n+1)!}\int\limits_{\lambda}^{+\infty} e^{-x}x^{n+1}dx = P(X\le n+1)$ et on a bien l'hypothèse de récurrence au rang suivant.

Conclusion : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}\ ,\ P(X\le n) = \frac{1}{n!}\int\limits_{\lambda}^{+\infty} e^{-x}x^n dx}$

2) Notons $A_n = (X\le n)$, alors comme $X(\omega)\le n \Rightarrow X(\omega)\le n+1$ on a : $A_n\subset A_{n+1}$

(A_n) est donc une suite croissante d'événements.

On a donc par le théorème de continuité croissante : $P\Big(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\Big) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n)$

Mais $\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty}(X\le n) = \Omega$ Comme $P(\Omega)=1$ alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X\le n) = 1$

Avec la question 1), on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n!}\int\limits_{\lambda}^{+\infty} e^{-x}x^n dx = 1$ et on en déduit : $\boxed{u_n = \int\limits_{\lambda}^{+\infty} e^{-x}x^n dx \sim n!}$

Remarque : on peut ne pas utiliser le théorème de continuité croissante et utiliser le DSE de exp

3) On sait d'après le cours que $\forall t\in\mathbb{R}\ ,\ G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$

Alors : $\boxed{G_X(1)=1}$ (comme pour toute fonction génératrice) et $\boxed{G_X(-1)=e^{-2\lambda}}$

4) Par définition de G_X on a :

$G_X(1)+G_X(-1) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(X=n) + \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n P(X=n) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\big(1+(-1)^n\big)P(X=n)$

Comme $1+(-1)^n = \begin{cases} 2 \text{ si } n \text{ pair} \\ 0 \text{ si } n \text{ impair}\end{cases}$ alors : $G_X(1)+G_X(-1) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} 2P(X=2n)$

Donc $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(X=2n) = \frac{G_X(1)+G_X(-1)}{2} = P(X \text{ pair})$

Avec le résultat de 3) : $\boxed{P(X \text{ pair}) = \frac{1+e^{-2\lambda}}{2}}$

5) Comme $Y(\Omega) = \{1, 2\}$, on remarque que : $(XY pair) = (Y = 2) \cup \Big(Y = 1) \cap (X pair)\Big)$
Comme $(Y = 2)$ et $\Big(Y = 1) \cap (X pair)\Big)$ sont incompatibles alors :
$P(XY pair) = P(Y = 2) + P\Big(Y = 1) \cap (X pair)\Big)$
Comme X et Y sont indépendantes : $P(XY pair) = P(Y = 2) + P(Y = 1)P(X pair)$
Comme $Y \hookrightarrow U(\{1, 2\})$ alors $P(Y = 1) = P(Y = 2) = \frac{1}{2}$ et avec le résultat du 4) :
$P(XY pair) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1+e^{-2\lambda}}{2} = \frac{3+e^{-2\lambda}}{4}$

Bilan : $\boxed{P(XY pair) = \frac{3+e^{-2\lambda}}{4}}$

Exercice 2

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.

1) Rappeler la définition d'un produit scalaire et du produit scalaire canonique de $M_2(\mathbb{R})$.

Par la suite $E = M_2(\mathbb{R})$ et le produit scalaire utilisé, noté $<, >$, est le produit scalaire canonique.

On pose $F = \{\begin{pmatrix} a-c & c \\ b & b+c \end{pmatrix} \ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$

2) Donner une base de F.

3) Donner la dimension de $F^\perp$ et donner une base de $F^\perp$.

Soit $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

4) Déterminer la distance de P à F ?

---

1) Voir cours

2) $\begin{pmatrix} a-c & c \\ b & b+c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

On pose $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Alors : $F = Vect(e_1, e_2, e_3)$.
De plus $ae_1 + be_2 + c_3 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} a-c & c \\ b & b+c \end{pmatrix} = (0) \Rightarrow a - c = c = b = b + c = 0 \Rightarrow a = b = c = 0$
donc (e_1, e_2, e_3) est libre.

(e_1, e_2, e_3) est libre et génératrice de F donc c'est une base de F.

3) D'après 2) $dim(F) = 3$, donc $dim(F^\perp) = dim(M_2(\mathbb{R})) - dim(F) = 4 - 3 = 1$.

On a : $\boxed{dim(F^\perp) = 1}$

Par linéarité du produit scalaire et comme (e_1, e_2, e_3) est une base de F :

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in F^\perp \Leftrightarrow \begin{cases} < M, e_1 >= 0 \\ < M, e_2 >= 0 \\ < M, e_3 >= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = -d \\ b = -d \end{cases} \Leftrightarrow M = d \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

En posant $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ on a : $\boxed{F^\perp = Vect(A)}$

4) Si on note Q le projeté orthogonal de P sur $F^\perp$ alors $d(P, F) = ||Q||$
Comme $P \in F^\perp$ alors $Q = P$ donc $\boxed{d(P, F) = \sqrt{3}}$

Planche 12. ccINP *(Valentin P.)*

Exercice 1

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On pose : $\begin{array}{cccc} \phi & : & M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ & & M & \longmapsto & AM \end{array}$

1) Montrer que ϕ est un endomorphisme.

2) Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$: ϕ^k

3) Exemple : dans ce 3) uniquement, on prend $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

On pose $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

On pose $B = (E_1, E_2, E_3, E_4)$

3) a) Déterminer la matrice de ϕ relativement à B.

3) b) Calculer $det(\phi)$ et $tr(\phi)$

4) Quel est le lien entre A inversible et ϕ inversible ?

5) Montrer que si A est une matrice de symétrie alors ϕ est une symétrie.

6) Montrer que si $rg(A) \geq 1$ alors $rg(\phi) \geq n$

7) Dans ce 7) on suppose que $n = 2$. Montrer alors que : $rg(\phi) = 2rg(A)$

8) Montrer que : $sp(\phi) = sp(A)$

9)

a) Montrer que si A est diagonalisable alors : $det(\phi) = det(A)^n$

b) Peut-on généraliser ce résultat avec A quelconque ?

1) Soit $(M, N) \in M_n(\mathbb{R})^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Alors : $\phi(M + \lambda N) = A(M + \lambda N) = AM + \lambda AN = \phi(M) + \lambda\phi(N)$
ϕ est donc linéaire, comme de plus ϕ va de $M_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$ alors $\boxed{\phi \text{ est un endomorphisme.}}$

2) $\phi^2(M) = \phi(AM) = A(AM) = A^2M$
On montrerait, par récurrence que : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}\ ,\ \phi^k(M) = A^kM}$

3) a) $\phi(E_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = E_1 + 3E_3 \quad \phi(E_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = E_2 + 3E_4$
$\phi(E_3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = 2E_1 + 4E_3 \quad \phi(E_4) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 2E_2 + 4E_4$

On a donc : $\boxed{M_B(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}}$

3) b) • On a $det(\phi) = det(M_B(\phi))$

On effectue $C_3 \longleftarrow C_3 - 2C_1$ et $C_4 \longleftarrow C_4 - 2C_2$, on a donc $det(\phi) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 4$

• $tr(\phi) = tr(M_B(\phi)) = 1 + 1 + 4 + 4 = 10$

On a donc : $\boxed{tr(\phi) = 10 \text{ et } det(\phi) = 4}$

4) • Supposons A inversible.
$M \in ker(\phi) \Leftrightarrow AM = 0 \Leftrightarrow A^{-1}AM = 0 \Leftrightarrow M = 0$ donc $ker(\phi) = \{0\}$ et donc ϕ est injective.
Comme ϕ est un endomorphisme alors ϕ est bijective et donc ϕ inversible.

• Réciproquement, supposons ϕ inversible.
Soit $X \in ker(A)$. On pose $M = (X\ X \ldots\ X)$ et on a donc $\phi(M) = (AX\ AX \ldots\ AX) = 0$, ce qui donne $M \in ker(\phi) = \{0\}$ donc $M = 0$ et donc $X = 0$
On a alors $ker(A) = \{0\}$ et donc A inversible.

Bilan : $\boxed{\phi \text{ inversible} \Leftrightarrow A \text{ inversible}}$

5) Si A est une matrice de symétrie alors $A^2 = I_n$ et donc $\phi^2(M) = A^2M = M$ donc $\phi^2 = Id$ et donc ϕ est une symétrie.

6) Supposons que $rg(A) \geq 1$, alors A admet au moins une colonne non nulle. Soit donc $i \in [\![1; n]\!]$ telle que C_i, la i-ième colonne de A soit non nulle.
Soit $j \in [\![1; n]\!]$. On pose $M_{i,j}$ la matrice dont les termes sont nuls sauf le (i, j) ième. Alors $\phi(M_{i,j})$ est la matrice dont les colonnes sont nulles sauf la j-ième qui vaut C_i.
La famille $(\phi(M_{i,1}), \ldots, \phi(M_{i,n}))$ étant clairement libre on a $rg(\phi) \geq n$

Bilan : $\boxed{rg(A) \geq 1 \Rightarrow rg(\phi) \geq n}$

7) Comme $n = 2$, on écrit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et comme à la question 3) on a :

$M_B(\phi) = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}$

On a $rg(\phi) = rg(M_B(\phi))$

On effectue $L_2 \longleftrightarrow L_3$ et on a : $rg(\phi) = rg(\begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix})$

On effectue $C_2 \longleftrightarrow C_3$ et on a : $rg(\phi) = rg(\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$

Avec cette écriture on a : $\boxed{rg(\phi) = 2rg(A)}$

8) • Soit $\lambda \in sp(\phi)$

Alors, il existe $M \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $M \neq 0$ et $\phi(M) = \lambda M$

Comme M est non nulle, elle possède (au moins) une colonne, notée C_i, non nulle.

Alors $\phi(M) = \lambda M \Rightarrow AM = \lambda M$ et sur la colonne C_i on a : $AC_i = \lambda C_i$ ave $C_i \neq 0$ et donc $\lambda \in sp(A)$

On a donc $sp(\phi) \subset sp(A)$

• Soit $\lambda \in sp(A)$

Alors, il existe $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $X \neq 0$ et $AX = \lambda X$

Si on pose $M = (X \ X \ \ldots \ X)$ alors $\phi(M) = \lambda M$ avec $M \neq 0$ et donc $\lambda \in sp(\phi)$

On a donc $sp(A) \subset sp(\phi)$

• Comme on a les deux inclusions alors : $\boxed{sp(\phi) = sp(A)}$

9) a) Si A est diagonalisable alors il existe $(C_1, \ldots, C_n)$ une base de vecteurs propres de A avec C_i associé à la valeur propre λ_i

Si on note $F_{i,j}$ la matrice dont toutes les colonnes sont nulles sauf la j-ième qui vaut C_i

Alors $B_A = (F_{1,1}, \ldots, F_{1,n}, \ldots, F_{i,1}, \ldots, F_{i,n}, \ldots, F_{n,1}, \ldots, F_{n,n})$ est une base de $M_n(\mathbb{R})$ et la matrice de ϕ relativement à cette base vaut : $diag(\lambda_1 I_n, \ldots, \lambda_i I_n, \ldots, \lambda_n I_n)$

On déduit : $det(\phi) = \lambda_1^n \ldots \lambda_n^n = (\lambda_1 \ldots \lambda_n)^n = det(A)^n$

9) b) On utilise le résultat $A = \lim\limits_{N \to +\infty} A_N$ avec les A_N diagonalisable, par continuité on a :
$det(\phi) = \lim\limits_{N \to +\infty} det(A_N)^n = (\lim\limits_{N \to +\infty} det(A_N))^n = det(A)^n$

Exercice 2

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int\limits_n^{+\infty} e^{-t^2} dt$

1) Montrer la convergence de I_n.

2) Déterminer la nature de $\sum I_n$

3) Déterminer la nature de $\sum nI_n$

---

1) $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$
De plus au voisinage de $+\infty$: $e^{-t^2} = o(e^{-t})$ avec $t \mapsto e^{-t}$ qui est intégrable sur $[0, +\infty[$
Donc par négligeabilité : $t \mapsto e^{-t^2}$ qui est intégrable sur $[0, +\infty[$ et $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \ , \ I_n \text{ est convergente.}}$

2) On effectue le changement de variable C^1 bijectif $x = t - n$ dans u_n :

$$u_n = \int\limits_0^{+\infty} exp(-(x+n)^2)dx = \int\limits_0^{+\infty} exp(-x^2 - 2nx - n^2)dx = \int\limits_0^{+\infty} \underbrace{e^{-x^2}}_{\leq 1} e^{-2nx} e^{-n^2} dx$$

Donc $0 \leq u_n \leq e^{-n^2} \int\limits_0^{+\infty} e^{-2nx} dx \leq \frac{e^{-n^2}}{2n}$ puisque $\int\limits_0^{+\infty} e^{-2nx} dx = [\frac{e^{-2nx}}{-2n}]_0^{+\infty} = \frac{1}{2n}$ est convergente (cours).

On en déduit $u_n = o(e^{-n})$ et comme $\sum e^{-n}$ est une série géométrique absolument convergente alors : $\boxed{\sum u_n \text{ est convergente.}}$

3) De même $nu_n = o(e^{-n})$ et $\boxed{\sum nu_n \text{ est convergente.}}$

$\boxed{\text{Mines télécom}}$

Planche 13. Mines-Télécom (Audric N.)

Exercice 1

Soient $(A, B) \in M_n(\mathbb{C})$ On pose $B^2 = A$

a) Montrer que si B est diagonalisable alors A est diagonalisable.

b) Si A est diagonalisable, B est elle nécessairement diagonalisable ?

c) Et si A est inversible, est-ce que A diagonalisable implique B diagonalisable ?

---

a) Si B est diagonalisable alors il existe D une matrice diagonale et $P \in Gl_n(\mathbb{C})$ telles que : $B = PDP^{-1}$

On a alors $A = B^2 = PD^2P^{-1}$, comme D^2 est diagonale alors $\boxed{A \text{ est diagonalisable.}}$

b) Si on prend $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ alors $\boxed{A = B^2 = (0) \text{ est diagonalisable alors que } B \text{ ne l'est pas.}}$

c) • On suppose que A est diagonalisable et inversible.

Alors on peut écrire $sp(A) = \{\lambda_k \ , \ k \in [\![1, p]\!]\}$.

Comme A est inversible $0 \notin sp(A)$ et pour chaque $\lambda_k \in sp(A)$ on peut choisir un $\mu_k \in \mathbb{C}$, $\mu_k^2 = \lambda_k$ (l'équation $X^2 = \lambda$ admet deux racines dans $\mathbb{C}$ si $\lambda \neq 0$)

Comme A est diagonalisable alors : $P = \prod_{k=1}^{p}(X - \lambda_k)$ est un polynôme annulateur de A.

Posons $Q(X) = P(X) = \prod_{k=1}^{p}(X^2 - \lambda_k)$, comme $\mu_k^2 = \lambda_k$ alors :

$Q(X) = \prod_{k=1}^{p}(X - \mu_k)(X + \mu_k)$

De ce fait : $Q(B) = Q(A^2) = P(A) = 0$ et Q est un polynôme annulateur scindé simple de B donc B est diagonalisable.

• On a donc : $\boxed{A \text{ est inversible et } A \text{ diagonalisable implique } B \text{ diagonalisable.}}$

Exercice 2

a) Montrer que : $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{exp(-nx)}{1+n^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et C^1 sur $\mathbb{R}^+ \backslash \{0\}$

b) S est-elle dérivable en 0 ?

---

a) Posons, pour $n \in \mathbb{N}$: $\begin{array}{cccc} f_n & : & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \frac{exp(-nx)}{1+n^2} \end{array}$

En cas de convergence on a alors : $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$

Comme f_n est décroissante sur $[0, +\infty[$, que : $f_n(0) = \frac{1}{1+n^2}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$: alors, on peut pose $||f_n||_\infty = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^+} |f_n(x)|$ et on a : $||f_n||_\infty = \frac{1}{1+n^2}$

$\frac{1}{1+n^2} \sim \frac{1}{n^2} > 0$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, donc, par équivalent $\sum ||f_n||_\infty = \sum \frac{1}{1+n^2}$ est convergente et donc $\sum f_n$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}^+$

La convergence normale impliquant la convergence uniforme on a $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$

Les f_n étant continues et la continuité étant conservé par convergence uniforme on conclut que $\boxed{S \text{ est définie et continue sur } \mathbb{R}^+}$

• Posons $a > 0$.
Les f_n sont C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et $f_n'(x) = \frac{-ne^{-nx}}{1+n^2}$
Posons $N(f_n') = \sup\limits_{x \geq a} |f_n'(x)|$ alors, comme pour f_n on a : $N(f_n') = \frac{ne^{-na}}{1+n^2}$
Par comparaison exp-puissance on a : $\frac{N(f_n')}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{1+n^2} e^{-na} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ puisque $a > 0$
On en déduit $N(f_n') = o(\frac{1}{n^2})$
Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann absolument convergente, alors $\sum N(f_n')$ est convergente et on en déduit que : $\sum f_n'$ est normalement convergente sur $[a, +\infty[$, et donc que $\sum f_n'$converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

Les f_n sont C^1 sur $[a, +\infty[$, $\sum f_n$ converge simplement vers S sur $[a, +\infty[$, $\sum f_n'$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$, donc S est C^1 sur $[a, +\infty[$

Comme $\bigcup\limits_{a > 0} [a, +\infty[=]0, +\infty[$ alors $\boxed{S \text{ est } C^1 \text{ sur }]0, +\infty[}$

b) Soit $x > 0$, étudions le taux de variations de f en 0 :
On pose : $\delta(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{\frac{e^{-nx} - 1}{1+n^2}}{x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx} - 1}{x} \frac{1}{1+n^2}$

On a pour tout $N \in \mathbb{N}$: $0 \leq \sum\limits_{n=0}^{N} \underbrace{\frac{1 - e^{-nx}}{x}}_{\geq 0} \frac{1}{1+n^2} \leq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1 - e^{-nx}}{x} \frac{1}{1+n^2} \leq -\delta(x)$

Donc pour tout $N \in \mathbb{N}$: $0 \leq \sum\limits_{n=0}^{N} \frac{1 - e^{-nx}}{nx} \frac{n}{1+n^2} \leq -\delta(x)$

Soit $A > 0$. Comme la série $\sum \frac{n}{1+n^2}$ est divergente et à termes positifs, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :
$\sum\limits_{n=0}^{N} \frac{n}{1+n^2} > A + 1$ car $\lim\limits_{N \to +\infty} \sum\limits_{n=0}^{N} \frac{n}{1+n^2} = +\infty$

Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} \sum\limits_{n=0}^{N} \frac{1-e^{-nx}}{nx}\frac{n}{1+n^2} = \sum\limits_{n=0}^{N} \frac{n}{1+n^2}$ alors il existe $x_0 > 0$ tel que :
$\forall x \in]0, x_0[\ ,\ \left| \sum\limits_{n=0}^{N} \frac{1-e^{-nx}}{nx}\frac{n}{1+n^2} - \sum\limits_{n=0}^{N} \frac{n}{1+n^2} \right| \leq 1$

On a alors : $\forall A > 0\ ,\ \exists x_0 > 0\ ,\ \forall x \in]0, x_0[\ ,\ A \leq \delta(x)$
On en déduit $\lim\limits_{x\to 0^+} -\delta(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \delta(x) = -\infty$

Donc f n'est pas dérivable en 0, par contre sa représentation graphique admet une tangente verticale.

Planche 14. Mines-Télécom (Nathan I.)

Exercice 1
Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On considère p positions différentes pour un mobile.
A chaque instant $k \in \mathbb{N}$, le mobile se trouve à la position $S_k \in [\![1; p]\!]$.
On admet que S_k est une variable aléatoire.
Entre deux instants, le mobile change forcément de position et ce, de manière équiprobable.

On pose : $\forall k \in \mathbb{N}\ ,\ X_k = \begin{pmatrix} P(S_k = 1) \\ P(S_k = 2) \\ \vdots \\ P(S_k = p) \end{pmatrix}$

1) Trouver $A \in M_p(\mathbb{R})$ telle que : $\forall k \in \mathbb{N}\ ,\ X_{k+1} = AX_k$

2) La matrice A est-elle diagonalisable ?

3) Préciser les valeurs propres de A.

4) Déterminer $\lim\limits_{k\to+\infty} X_k$

---

1) Par la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements (associé à la variable aléatoire S_k) $(S_k = j)_{1\leq j\leq p}$, on a :
$\forall i \in [\![1, p]\!]\ ,\ P(S_{k+1} = i) = \sum\limits_{j=1}^{n} P(S_{k+1} = i | S_k = j) P(S_k = j)$

Mais, par équiprobabilité et traduction de l'énoncé : $P(S_{k+1} = i | S_k = j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ \frac{1}{p-1} & \text{si } i \neq j \end{cases}$

En écrivant matriciellement la relation ci-dessus : $X_{k+1} = AX_k$ avec $A = \frac{1}{p-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2) Par le théorème spectrale $\boxed{A \text{ est diagonalisable dans } M_p(\mathbb{R})}$ car A est symétrique réelle.

3) Soit U la matrice ne contenant que des 1.
Alors $rg(u) = 1$ et donc, par le théorème du rang : $dim(ker(U)) = p - 1$

De plus $U \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, donc p est valeur propre de u.

U admet donc p comme valeur propre simple et 0 comme valeur propre d'ordre $p-1$

Comme $A = \frac{1}{p-1}(U - I_p)$ alors A admet $\frac{-1}{p-1}$ comme valeur propre d'ordre $p-1$ et 1 comme valeur propre simple.

4°) On a donc $A = PDP^T$ avec $D = diag(1, \frac{-1}{p-1}, \dots, \frac{-1}{p-1})$ et $P \in O_p(\mathbb{R})$ (donc $P^{-1} = P^T$)
Alors $\lim\limits_{k \to +\infty} D^k = diag(1, 0 \dots, 0)$ (matrice de la projection sur $vect(e_1)$ parallèlement à $vect(e_2, \dots, e_n)$ où $(e_1, \dots, e_n)$ est la base diagonalisant A)

Alors: $\lim\limits_{k \to +\infty} A^k = P(\lim\limits_{k \to +\infty} D^k)P^T = Pdiag(1, 0, \dots, 0)P^T$

On sait que P peut s'écrire: $P = \frac{1}{\sqrt{p}} \begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & * & \dots & * \end{pmatrix}$

Donc $\lim\limits_{k \to +\infty} A^k = P = \frac{1}{p} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & * & \dots * \end{pmatrix}}_{PD} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ * & \dots & * \\ \vdots & & \vdots \\ * & \dots & * \end{pmatrix} = \frac{1}{p}U$

Comme $X_k = A^k X_0$ alors $\lim\limits_{k \to +\infty} X_k = \frac{1}{p} U X_0$

Comme $\sum\limits_{i=1}^{p} P(S_0 = i) = 1$ alors $\boxed{\lim\limits_{k \to +\infty} X_k = \frac{1}{p} \begin{pmatrix} 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}}$

Exercice 2
Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ -1 \leq x \leq y \leq 1\}$ et $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ -1 < x < y < 1\}$

On pose : $\forall (x, y) \in A \ , \ f(x, y) = (x - y)^3 - 6xy$

1) a) Montrer que A est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$.

1) b) Montrer que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

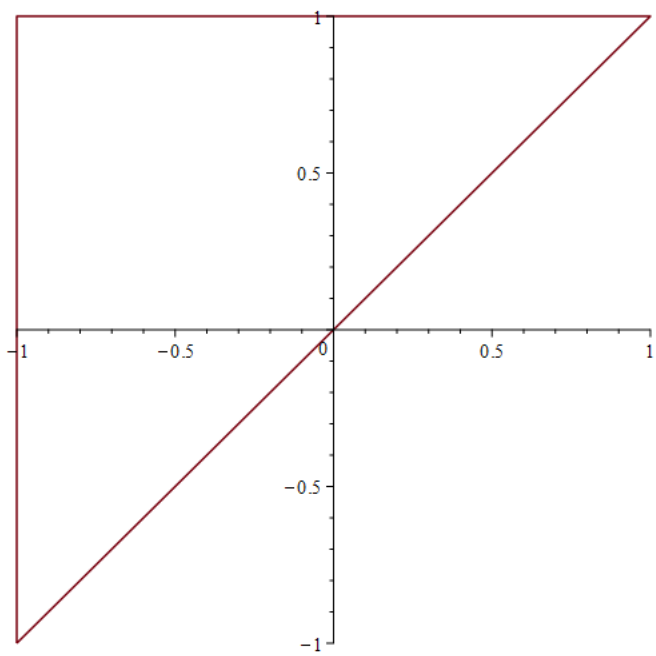
2) Déterminer les extremums globaux de f sur A.

---

1) a) Son pose $p : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x + 1$ alors $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ ,\ -1 \leq x\} = p^{-1}([0, +\infty[)$. Comme p est continue et que $[0, +\infty[$ est un fermé alors $A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ ,\ -1 \leq x\}$ est un fermé.
De même $A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ ,\ x \leq y\}$ est un fermé, $A_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ ,\ y \leq 1\}$ est un fermé.
Donc $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$ est une intersection finie de fermés, on sait donc d'après le cours que A est un fermé.

De plus A est clairement bornée car $(x, y) \in A \Rightarrow \begin{cases} |x| \leq 1 \\ |y| \leq 1 \end{cases}$ et donc $A \subset B_\infty((0, 0), 1)$.

Donc $\boxed{A \text{ est une partie fermée bornée de } \mathbb{R}^2.}$



1) b) Même technique qu'au a).

2) • f est une fonction de classe C^1 sur le fermé borné A, donc f est bornée et atteint ses bornes sur A, soit sur U (intérieur de A) en un point critique, soit sur le bord de A.

• Recherche des points critiques :

(x, y) point critique de f

$\Leftrightarrow grad(f)(x, y) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(x - y)^2 - 6y = 0 \\ -3(x - y)^2 - 6x = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ 3(2x)^2 + 6x = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ 12x^2 + 6x = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = \frac{-1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$

On a $(0, 0) \notin U$ et $\Omega = (\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}) \in U$, donc f admet un unique point critique Ω dans U.

Remarque : $(0,0)$ est sur le bord de A

• Etude sur le bord, soit sur le triangle CDE, avec $C=(-1,-1)$, $D=(1,1)$ et $E=(-1,1)$

• Sur le segment $[CD]$, on étudie : $a : t \in [-1,1] \mapsto f(t,t) = -6t^2$

t	-1		0		1
$a(t)$	-6	$\nearrow$	0	$\searrow$	-6

• Sur le segment $[CE]$, on étudie $b : t \in [-1,1] \mapsto f(-1,t) = (-1-t)^3 + 6t = -t^3 - 3t^2 + 3t - 1$
$b'(t) = -3t^2 - 6t + 3 = -3(t^2 + 2t - 1)$
$\Delta = 8 = (2\sqrt{2})^2$ donc $b'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -1 - \sqrt{2} < -1$ ou $t = -1 + \sqrt{2} \in]-1,1[$

t	-1		$-1+\sqrt{2}$		1
$b(t)$	-6	$\nearrow$	$4\sqrt{2}-6<0$	$\searrow$	-2
•					

$b(-1+\sqrt{2}) = (-\sqrt{2})^3 + 6(-1+\sqrt{2}) = 4\sqrt{2} - 6 < 0$

• Sur le segment $[DE]$, on étudie $c : t \in [-1,1] \mapsto f(t,1) = (t-1)^3 - 6t = t^3 - 3t^2 - 3t - 1$
$c'(t) = 3t^2 - 6t - 3 = 3(t^2 - 2t - 1)$
$\Delta = 8 = (2\sqrt{2})^2$
$c'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1 + \sqrt{2} > 1$ et $t = 1 - \sqrt{2} \in]-1,1[$

t	-1		$1-\sqrt{2}$		1
$c(t)$	-2	$\nearrow$	$4\sqrt{2}-6<0$	$\searrow$	-6
•					

• $f(\Omega) =$

• On déduit donc de l'étude précédente, en comparant les valeurs sur les bords et au point critique Ω que :

$\boxed{\text{le maximum de } f \text{ sur } A \text{ vaut } \frac{1}{2} \text{ et est atteint au point } \Omega = (\frac{-1}{2}, \frac{1}{2})}$

$\boxed{\text{le minimum de } f \text{ sur } A \text{ vaut } -6 \text{ et est atteint aux points } (-1,-1) \text{ et } (1,1)}$

Planche 15. Mines-Télécom (Yoan C.)

Exercice 1
Soit $x \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On pose la matrice de $M_n(\mathbb{C})$ suivante :

$$A_n(x) = \begin{pmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1+x^2 & x \\ 0 & \dots & 0 & x & 1+x^2 \end{pmatrix}$$

Calculer $det(A_n(x))$

• Posons pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = det(A_n(x))$

On a alors : $u_{n+2} = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1+x^2 & x \\ 0 & \dots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}_{(n+2)}$

l'indice $(n+2)$ désignant la taille de la matrice

• On développe alors par rapport à la première ligne et on obtient :

$$u_{n+2} = (1+x^2)\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1+x^2 & x \\ 0 & \dots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}_{(n+1)} - x\begin{vmatrix} x & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1+x^2 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & x & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}_{(n+1)}$$

$$\Rightarrow u_{n+2} = (1+x^2)\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1+x^2 & x \\ 0 & \dots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}_{(n+1)} - x^2\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1+x^2 & x \\ 0 & \dots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}_{(n)}$$

$\Rightarrow u_{n+2} - (1+x^2)u_{n+1} + x^2 u_n = 0$

• On remarque alors que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants homogène d'équation caractéristique : $R^2 - (1+x^2)R + x^2 = 0$

On résout : $\Delta = (1+x^2)^2 - 4x^2 = 1 - 2x^2 + x^4 = (1-x^2)^2$

Cas 1 : $x \neq 1$ et $x \neq -1$
Deux racines distinctes : $R_1 = \frac{1+x^2+1-x^2}{2} = 1$ et $R_2 = \frac{1+x^2-1+x^2}{2} = x^2$

On sait alors, par le cours, qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \alpha + \beta x^{2n-2}$

Mais $u_1 = 1 + x^2$ et $u_2 = (1+x^2)^2 - x^2 = 1 + x^2 + x^4$

Donc $\begin{cases} \alpha + \beta = 1 + x^2 \\ \alpha + x^2\beta = 1 + x^2 + x^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{x^4}{x^2-1} \\ \alpha = \frac{-1}{x^2-1} \end{cases}$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{x^{2n+2}-1}{x^2-1} = \sum\limits_{k=0}^{n} x^{2k}$

Cas 2 : $x = 1$ ou $x = -1$
On a une racine double $R = 1$ et donc, par le cours, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que :
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \alpha + \beta(n-1)$

Mais $u_1 = 2$ et $u_2 = 3$ (pour les deux valeurs de x)
Donc $\begin{cases} \alpha = 2 \\ \alpha + \beta = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 1 \end{cases}$ et donc $u_n = 2 + n - 1 = n + 1$

On remarque que si $x = 1$ ou $x = -1$, alors : $\sum\limits_{k=0}^{n} x^{2k} = n + 1$

• On a donc le bilan : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ det(A_n(x)) = \sum\limits_{k=0}^{n} x^{2k}}$

Exercice 2
Une urne contient 2 boules blanches et une boule rouge.
On effectue des tirages avec remise. On suppose que les tirages sont indépendants et équiprobables.
Il y a deux joueurs A et B. Chaque joueur tire une boule à tour de rôle et A commence.
La partie se termine quand deux boules blanches sont tirées d'affilées pour la première fois.
Le vainqueur est celui qui tire la deuxième boule blanche de la série.

Quelle est la probabilité que A gagne ?

• Notons B_k l'événement une boule blanche est tirée lors du k ième tirage (indépendamment du fait que ce soit A ou B qui tire la boule).
et V_k l'événement une deuxième boule blanche consécutive est tirée lors du k ième tirage et ce, pour la première fois.
On remarque que : $\overline{B_k}$ est l'événement : tirer une boule rouge au k ième tirage.
On pose $u_k = P(V_k)$
On notera aussi G l'événement A gagne.

- Par indépendance et équiprobabilité des tirages on a : $P(B_k) = q$ avec $q = \frac{2}{3}$.

- Clairement $u_1 = P(V_1) = 0$ car deux boules ne peuvent pas être tirées en un seul tirage.

- On a aussi : $V_2 = B_1 \cap B_2$, donc par indépendance : $u_2 = P(V_2) = P(B_1)P(B_2) = q^2$

- Pour $k \geq 3$, on a par la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements $(B_1 \cap B_2, B_1 \cap \overline{B_2}, \overline{B_1})$:
$u_k = P(V_k) = \underbrace{P(V_k|B_1 \cap B_2)}_{=0} P(B_1 \cap B_2) + \underbrace{P(V_k|B_1 \cap \overline{B_2})}_{u_{k-2}} \underbrace{P(B_1 \cap \overline{B_2})}_{q(1-q)} + \underbrace{P(V_k|\overline{B_1})}_{u_{k-1}} \underbrace{P(\overline{B_1})}_{1-q}$
car on a :
* $P(V_k|B_1 \cap B_2) = 0$, en effet V_k n'est pas réalisé puisque $k > 2$
* $P(V_k|B_1 \cap \overline{B_2}) = P(V_{k-2}) = u_{k-2}$ car c'est comme si les deux premiers tirages ne comptait pas
* $P(B_1 \cap \overline{B_2}) = q(1-q)$ par indépendance des deux événements.
* $P(V_k|\overline{B_1}) = P(V_{k-1}) = u_{k-1}$, car c'est comme si le premier tirage n'avait pas compté.
* $P(\overline{B_1}) = 1 - q$

On a donc : $\forall k \geq 3$, $u_k = (1-q)u_{k-1} + q(1-q)u_{k-2}$

- $(u_k)_{k \geq 1}$ suit une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants homogène, d'équation caractéristique : $E_c \Leftrightarrow R^2 - (1-q)R - q(1-q) = 0$
Comme $q = \frac{2}{3}$ alors : $E_c \Leftrightarrow R^2 - \frac{1}{3}R - \frac{2}{9} = 0 \Leftrightarrow r = \frac{2}{3}$ ou $r = \frac{-1}{3}$

On a alors, d'après le cours : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = a\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + b\left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1}$

Avec les conditions initiales :
$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = \frac{4}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ \frac{2}{3}a - \frac{1}{3}b = \frac{4}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{4}{9} \\ b = \frac{-4}{9} \end{cases}$$

- Donc $u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 4\left(\frac{-1}{3}\right)^{n+1}$

- Par somme des termes d'une suite géométrique : $\sum_{n=1}^{+\infty} u_k = \frac{4}{9}\frac{1}{1-\frac{2}{3}} - 4\frac{1}{9}\frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1$

On a alors que la partie ne se termine pas est de probabilité nulle.

- Ensuite : $G = \bigcup_{n=1}^{+\infty} V_{2n+1}$ donc, par incompatibilité :
$P(G)$
$= \sum_{n=1}^{+\infty} u_{2n+1}$
$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{2n+1+1} - 4\left(\frac{-1}{3}\right)^{2n+1+1}\right]$ par somme des termes d'une suite géométrique
$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\left(\frac{4}{9}\right)^{n+1} - 4\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}\right]$
$= \frac{16}{81}\frac{1}{1-\frac{4}{9}} - \frac{4}{81}\frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{16}{5 \times 9} - \frac{1}{2 \times 9} = \frac{32-5}{90} = \frac{27}{90} = \frac{3}{10}$

$\boxed{\text{La probabilité que } A \text{ gagne est de } \frac{3}{10}}$

Planche 16. Mines-Télécom (Tom B.)

Exercice 1

On pose : $f(x) = ln(1 + x + x^2)$

a) Donner le domaine de définition de f.
f est-elle continue ? C^1 ? C^∞ sur son domaine ?

b) Déterminer le DSE_0 de la fonction f

---

a) • $1 + x + x^2 = 0$ a pour discriminant $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$, donc $1 + x + x^2$ est de signe constant, donc $1 + x + x^2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et donc
$\boxed{\text{le domaine de définition de } f \text{ est } \mathbb{R}}$

• $\boxed{f \text{ est continue et même } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}}$ comme composée de fonctions C^∞.

b) On a : $\forall x \in \mathbb{R},\ ,\ f'(x) = \frac{1+2x}{1+x+x^2} = \frac{1+2x}{(x-j)(x-j^2)} = \frac{1}{x-j} + \frac{1}{x-j^2}$
avec $j = exp(\frac{2i\pi}{3})$, $j^2 = \overline{j}$ et $1 + j + j^2 = 0$

Alors : $f'(x) = \frac{-1}{j}\frac{1}{1-\frac{x}{j}} - \frac{1}{\overline{j}}\frac{1}{1-\frac{x}{\overline{j}}}$

On utilise le DSE_0 : $\frac{1}{1-u} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u^n$ valable pour $u \in \mathbb{C}$ tel que $|u| < 1$

On obtient, pour $x \in]-1, 1[$: $f'(x) = \frac{-1}{j}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{j^n} - \frac{1}{\overline{j}}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{\overline{j}^n}$

ou encore $f'(x) = -\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{j}\frac{x^n}{j^n} + \overline{\frac{1}{j}\frac{x^n}{j^n}}\right) = -2Re\left(\frac{-1}{j}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{j^n}\right) = -2Re\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{j^{n+1}}\right)$

Donc $f'(x) = -2Re\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} exp(-(n+1)\frac{2i\pi}{3})x^n\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} -2cos(-(n+1)\frac{2\pi}{3})x^n$

On peut intégrer un DSE_0 et comme $f(0) = 0$ alors :

$$\boxed{\forall x \in]-1, 1[\ ,\ f(x) = ln(1 + x + x^2) = -\sum_{n=0}^{+\infty} 2cos(\frac{2(n+1)\pi}{3})\frac{x^{n+1}}{n+1}}$$

Exercice 2

Soit $(E, <,>)$ un espace préhilbertien et $u \in L(E)$ vérifiant : $\forall x \in E\ ,\ < u(x), x >= 0$

1) a) Montrer que $\forall (x,y) \in E^2\ ,\ < u(x), y >= - < x, u(y) >$

1) b) Montrer que : $Ker(u) = (Im(u))^{\perp}$

2°) Montrer que si B une base orthonormée alors la matrice $M_B(u)$ de u relativement à B est antisymétrique.

---

1) a) Par propriété de u :

$< u(x+y), x+y >= 0$

$\Rightarrow < u(x) + u(y), x+y >= 0$

$\Rightarrow \underbrace{< u(x), x >}_{=0} + < u(x), y > + < u(y), x > + \underbrace{< u(y), y >}_{=0} = 0$

$\Rightarrow < u(x), y >= - < x, u(y) >$

On a donc: $\boxed{\forall (x,y) \in E^2\ ,\ < u(x), y >= - < x, u(y) >}$

1) b) • Soit $x \in ker(u)$

Soit $y \in Im(u)$. Alors on écrit $y = u(z)$ et on a :

$< x, y >=< x, u(z) >= - < u(x), z >= - < 0_E, z >= 0_E$ puisque $x \in ker(u) \Rightarrow u(x) = 0_E$

On a : $\forall y \in Im(u)\ ,\ < x, y >= 0$ donc $x \in (Im(u))^{\perp}$

On a donc $ker(u) \subset (Im(u))^{\perp}$

• Soit $x \in (Im(u))^{\perp}$

Alors $\forall y \in E\ ,\ < x, u(y) >= 0$ donc $< u(x), y >= 0$

En particulier, si on prend $y = u(x)$, alors $< u(x), u(x) >= 0$ donc $u(x) = 0_E$ et donc $x \in ker(u)$

On a donc $(Im(u))^{\perp} \subset ker(u)$

• On a les deux inclusions pour montrer que $ker(u) = (Im(u))^{\perp}$

2°) Soit $A = M_B(u) = (a_{i,j})$ la matrice de u relativement à B.

On remarque que : $a_{i,j} =< u(e_j), e_i >$, donc le 1) a) donne :

$a_{i,j} =< u(e_j), e_i >= - < u(e_i), e_j >= -a_{j,i}$ et donc $\boxed{M_B(u) \text{ est antisymétrique.}}$

Planche 17. Akram M.

Exercice 1

Soit $f : x \mapsto \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}} dt$

a) Déterminer le domaine de définition D de f.

b) Montrer que f est C^∞ sur D.

c) Déterminer la limite en $+\infty$ de f

---

a) Posons : $\begin{array}{cccc} F & : & \mathbb{R} \times I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,t) & \mapsto & \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}} \end{array}$ avec $I = [0, +\infty[$ pour avoir : $f(x) = \int\limits_I F(x,t)dt$

• Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto F(x,t)$ est continue sur I, l'intégrale $f(x)$ pose donc problème en $+\infty$.

• Si $x < 0$ alors $\lim\limits_{t \to +\infty} F(x,t) = +\infty$, donc $F(x,t) \geq 1 > 0$ au voisinage de $t = +\infty$, donc $\int\limits_I F(x,t)dt$ est divergente.

• Si $x = 0$: $F(x,t) = F(0,t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \sim \frac{1}{t} > 0$, et comme $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{t}dt$ est divergente, par équivalent, $f(0)$ est divergente.

• Si $x > 0$, $F(x,t) = o(\frac{1}{t^2})$ pour t au voisinage de $+\infty$ et donc, par négligeabilité, comme $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, $f(x)$ est convergente.

• BILAN : $\boxed{\text{Le domaine de } f \text{ est } D =]0, +\infty[}$

b) Soit $a > 0$.
F est C^∞ sur son domaine et $\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times I$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\frac{\partial^k F}{\partial x^k}(x,t) = \frac{(-t)^k}{\sqrt{1+t^2}} e^{-xt}$

On a $\forall (x,t) \in [a, +\infty[\times I$, $\left| \frac{\partial^k F}{\partial x^k}(x,t) \right| \leq \frac{t^k}{\sqrt{1+t^2}} e^{-at}$

Comme $t \mapsto \frac{t^k}{\sqrt{1+t^2}} e^{-at}$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$ et que au voisinage de $+\infty$: $\frac{t^k}{\sqrt{1+t^2}} e^{-at} = o(\frac{1}{t^2})$ alors $t \mapsto \frac{t^k}{\sqrt{1+t^2}} e^{-at}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ donc par comparaison : $t \mapsto \frac{\partial^k F}{\partial x^k}(x,t)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a : $\begin{cases} \forall t \in [0, +\infty[\ , \ x \mapsto f(x,t) \text{ est de classe } C^n \text{ sur } [a, +\infty[\\ \forall x \in [a, +\infty[\ , \ \forall k \in [\![0, n-1]\!] \ , \ t \mapsto \frac{\partial^k F}{\partial x^k}(x,t) \text{ est CPM et intégrable sur } [0, +\infty[\\ \forall x \in [a, +\infty[\ , \ t \mapsto \frac{\partial^n F}{\partial x^n}(x,t) \text{ est continue par morceaux sur } [0, +\infty[\\ \forall (x,t) \in [a, +\infty[\times [0, +\infty[\ , \ \left| \frac{\partial^k F}{\partial x^n}(x,t) \right| \leq \frac{t^n}{\sqrt{1+t^2}} e^{-at} \\ \text{ avec } t \mapsto \frac{t^n}{\sqrt{1+t^2}} e^{-at} \text{ intégrable sur } [0, +\infty[\end{cases}$

On peut donc appliquer la généralisation du théorème de dérivation pour les intégrales à paramètres et on en déduit que f est de classe C^n sur $[a,+\infty[$

Comme $\bigcup\limits_{a>0}[a,+\infty[=D$ et que la dérivation est une notion locale alors f est de classe C^n sur D.
Comme ce résultat est valable pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ alors f est C^∞ sur D.

Bilan : $\boxed{f \text{ est } C^\infty \text{ sur } D}$

c) On a : $\begin{cases} \forall t\in]0,+\infty[\ ,\ F(x,t)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0 \\ t\mapsto 0 \text{ est continue par morceaux sur }]0,+\infty[\\ \forall (x,t)\in[1,+\infty[\times]0,+\infty[\ ,\ |F(x,t)|\leq \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}e^{-t} \\ \ \text{avec } t\mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}e^{-t} \text{ intégrable sur }]0,+\infty[\end{cases}$

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée à paramètre continue et on obtient :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^{+\infty}F(x,t)dt=\int_0^{+\infty}\lim_{x\to+\infty}F(x,t)dt$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}f(x)=\int_0^{+\infty}0dt=0$$

On a donc : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0}$

Exercice 2

Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant une même loi binomiale de paramètre $(n, \frac{1}{2})$. Soit M la matrice $\begin{pmatrix} X_1 & 1 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}$

a) En développant de deux manières le polynôme $(1+X)^{2n}$ montrer que : $\sum\limits_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k}\right)^2 = \binom{2n}{n}$

b) Calculer la probabilité de l'événement $(X_1 = X_2)$

c) Quelle est la probabilité que M soit diagonalisable ?

---

a) D'une part, par le binôme de newton : $(1+X)^{2n} = \sum\limits_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} X^k$

D'autre part : $(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n = \Big(\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k\Big)\Big(\sum\limits_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} X^\ell\Big) = \sum\limits_{k=0}^{n}\sum\limits_{\ell=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{\ell} X^{k+\ell}$

Si on ne regarde que le terme de degré n : $\binom{2n}{n} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum\limits_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k}\right)^2$

On a donc : $\boxed{\sum\limits_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k}\right)^2 = \binom{2n}{n}}$

b) $(X_1 = X_2) = \bigcup\limits_{k=0}^{n} (X_1 = k \cap X_2 = k)$

Par incompatibilité : $P(X_1 = X_2) = \sum\limits_{k=0}^{n} P(X_1 = k \cap X_2 = k)$

Par indépendance de X_1 et X_2 : $P(X_1 = X_2) = \sum\limits_{k=0}^{n} P(X_1 = k)P(X_2 = k)$

Comme on connaît les lois de X_1 et X_2 : $P(X_1 = X_2) = \sum\limits_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}\right)^2$

On utilise le a) et on a : $\boxed{P(X_1 = X_2) = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}}$

c) Une matrice triangulaire a ses valeurs propres sur la diagonale donc X_1 et X_2 sont les valeurs propres de M

Si $X_1 \neq X_2$, M admet deux valeurs propres distinctes donc M est diagonalisable.

Si $X_1 = X_2$ alors M admet une unique valeur propre et n'est pas une matrice scalaire ($\neq \alpha I_n$), donc M n'est pas diagonalisable.

On a donc : M diagonalisable ssi $X_1 \neq X_2$ et donc

$$\boxed{P(\text{'M diagonalisable'}) = 1 - P(X_1 = X_2) = 1 - \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}}$$

Planche 18. Mines-Télécom (Nino D.)

Exercice 1

Soit $\beta \in]0,1[$ et $x > 0$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(x) = \frac{1}{n^\beta} - \frac{1}{(n+x)^\beta}$

1) Donner un équivalent de $u_n(x)$ lorsque $n \to +\infty$

2) Montrer que : $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ est bien définie sur $\mathbb{R}^{+*}$

3) Montrer que : $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$

4) `Déterminer` $\lim_{x\to 0^+} S(x)$

4) `Déterminer` $\lim_{x\to +\infty} S(x)$

---

1) On remarque que le $x > 0$ assure que $n + x$ ne s'annule jamais.
$\frac{1}{(n+x)^\beta} = \frac{1}{n^\beta}(1 + \frac{x}{n})^{-\beta} = \frac{1}{n^\beta}\left(1 - \beta\frac{x}{n} + o(\frac{1}{n})\right) = \frac{1}{n^\beta} - \beta\frac{x}{n^{1+\beta}} + o(\frac{1}{n^{1+\beta}})$

Donc $u_n(x) = \beta\frac{x}{n^{1+\beta}} + o(\frac{1}{n^{1+\beta}})$ et donc, comme $\beta \neq 0$: $\boxed{u_n(x) \underset{n=+\infty}{\sim} \beta\frac{x}{n^{1+\beta}}}$

2) Comme $\beta\frac{x}{n^{1+\beta}} > 0$ et $\beta + 1 > 1$, on a $\sum \beta\frac{x}{n^{1+\beta}}$ qui est une série de Riemann, et par règle de l'équivalent pour les séries à termes positifs, on a : $\boxed{\sum u_n(x) \text{ convergente pour } x \in \mathbb{R}^{+*}}$

3) Les fonctions u_n sont C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $u_n'(x) = \frac{\beta}{(n+x)^{\beta+1}}$
Soit $a > 0$.
Pour tout $x \geq a$ on a : $|u_n'(x)| \leq \frac{\beta}{(n+a)^{\beta+1}}$, comme $\sum \frac{\beta}{(n+a)^{\beta+1}}$ est convergente (Riemann avec $\beta + 1 > 1$), alors, $\sum u_n'$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$

On a : $\begin{cases} \text{les fonctions } u_n \text{ sont } C^1 \text{ sur } [a,+\infty[\\ \sum u_n \text{ converge simplement vers } S \text{ sur } [a,+\infty[\\ \sum u_n' \text{ converge uniformément sur } [a,+\infty[\end{cases}$ donc, par le théorème de dérivation des séries de fonctions, S est C^1 sur $[a, +\infty[$

Comme la dérivation est une notion locale et que $\bigcup_{a>0} [a, +\infty[= \mathbb{R}^{+*}$, alors :

$\boxed{S \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}$

4) • Soit $x > 0$. On a $S(x+1) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x+1)$.

On va passer par les sommes partielles. Soit $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} u_n(x+1) = \sum_{n=1}^{N}\left(\tfrac{1}{n^\beta} - \tfrac{1}{(n+x+1)^\beta}\right) = \sum_{n=1}^{N}\tfrac{1}{n^\beta} - \sum_{n=1}^{N}\tfrac{1}{(n+x+1)^\beta} &= \sum_{n=1}^{N}\tfrac{1}{n^\beta} - \sum_{n=2}^{N+1}\tfrac{1}{(n+x)^\beta} \\ &= \sum_{n=1}^{N}\tfrac{1}{n^\beta} - \sum_{n=1}^{N}\tfrac{1}{(n+x)^\beta} + \tfrac{1}{1+x} - \tfrac{1}{N+1+x} \\ &= \sum_{n=1}^{N}\left(\tfrac{1}{n^\beta} - \tfrac{1}{(n+x)^\beta}\right) + \tfrac{1}{1+x} - \tfrac{1}{N+1+x}\end{aligned}$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient : $S(x+1) = S(x) + \frac{1}{1+x}$

• On a donc : $S(x) = S(x+1) - \frac{1}{1+x}$

Comme S est continue en $x = 1$ alors : $\lim\limits_{x \to 0^+} S(x) = S(1) - 1$

Pour calculer $S(1)$ on passe par les sommes partielles : $\sum\limits_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n^\beta} - \frac{1}{(n+1)^\beta}\right) = 1 - \frac{1}{(N+1)^\beta} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 1$

Donc $S(1) = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} S(x) = 0$

On en déduit : $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} S(x) = 0}$

5) Soit $A > 0$.

Comme $\beta \in]0,1[$ alors $\sum \frac{1}{n^\beta}$ est divergente, donc, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\beta} \geq A + 1$

On a: $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{n^\beta} - \frac{1}{(n+x)^\beta}\right)}_{\geq 0}$

Donc $S(x) \geq \sum\limits_{n=1}^{N} \underbrace{\left(\frac{1}{n^\beta} - \frac{1}{(n+x)^\beta}\right)}_{\geq 0}$

$\Rightarrow S(x) \geq \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\beta} - \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{(n+x)^\beta}$

Mais $\sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{(n+x)^\beta} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ car la somme est finie.

Donc $\exists x_0 > 0$, $\forall x \geq x_0$, $0 \leq \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{(n+x)^\beta} \leq 1$

On a alors : $\forall A > 0$, $\exists x_0$, $\forall x \geq x_0$, $S(x) \geq A$

Donc par définition de la limite : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} S(x) = +\infty}$

Exercice 2

On donne la fonction $C_X(t) = \frac{2t}{3-t}$

a) Montrer que C_X est la fonction génératrice d'une variable aléatoire X dont on donnera la loi.

b) Déterminer l'espérance et la variance de X.

c) Déterminer la loi de $Y = X - 1$, son espérance et sa variance.

d) ????

---

a) $C_X(t) = \frac{2t}{3-t} = \frac{2t}{3}\frac{1}{1-\frac{t}{3}}$

On utilise le DSE_0 usuel : $\forall u \in]-1,1[\ ,\ \frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$

On en déduit : $\forall t \in]-3,3[\ ,\ C_X(t) = \frac{2t}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{3^n}$

On a donc : $\forall t \in]-3,3[\ ,\ C_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{3^{n+1}}t^{n+1}$

ou encore : $\forall t \in]-3,3[\ ,\ C_X(t) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{3^n}t^n$

C_X est donc une série entière, de rayon de convergence 3, de coefficients positifs, comme de plus $C_X(1) = \frac{2}{3-1} = 1$ alors, on peut dire que C_X est la fonction génératrice de la variable aléatoire X définie par : $\boxed{\begin{cases} X(\Omega) = \mathbb{N}^* \\ \forall n \in X(\Omega)\ ,\ P(X=n) = \frac{2}{3^n} = \frac{2}{3}(1-\frac{2}{3})^{n-1} \end{cases}}$

b) C_X est dérivable deux fois à gauche en $t = 1$ puisque 1 est à l'intérieur de l'intervalle ouvert de convergence, donc, d'après le cours, X admet une espérance et une variance donnée par : $E(X) = C'_X(1)$ et $V(X) = C''_X(1) + C'_X(1) - (C'_X(1))^2$

$C'_X(t) = \frac{2(3-t)+2t}{(3-t)^2} = \frac{6}{(3-t)^2}$ et $C''_X(t) = \frac{12}{(3-t)^3}$ donc $C'_X(1) = \frac{3}{2}$ donc $E(X) = \frac{3}{2}$. De plus $C''_X(1) = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$ donc $V(X) = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$

On a donc $\boxed{E(X) = \frac{3}{2} \text{ et } V(X) = \frac{3}{4}}$

On peut aussi remarquer que : $\boxed{X \text{ suit une loi géométrique de paramètre } p = \frac{2}{3}}$

c) Si $Y = X - 1$ alors $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ P(Y=n) = P(X=n+1) = \frac{2}{3^{n+1}} = \frac{2}{3}\frac{1}{3^n}$

Par linéarité de l'espérance et propriété quadratique : $\boxed{E(Y) = \frac{1}{2} \text{ et } V(Y) = V(X) = \frac{3}{4}}$

Planche 19. Mines-Télécom (Lauréana P.)

Exercice 1

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $\{-n, -(n-1), \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, n-1, n\}$
Soit $Y = |X|$

1) Déterminer la loi conjointe de (X, Y)

2) Déterminer la loi de Y.

3) Déterminer $E(X)$, $E(Y)$ et $cov(X, Y)$

4) X et Y sont-elles indépendantes ?

---

1) On a $X(\Omega) = [\![-n, n]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![0, n]\!]$
Comme X suit une loi uniforme et que $card(X(\Omega)) = 2n+1$: $\forall k \in X(\Omega)$, $P(X = k) = \frac{1}{2n+1}$
Soit $i \in X(\Omega)$ et $j \in Y(\Omega)$.

Si $\Big((X = i) \cap (Y = j)\Big) \neq \emptyset$ alors $j = |i| \Leftrightarrow i = j$ ou $i = -j$

On a donc :

Cas 1 : $j \neq |i|$

Alors : $P\Big((X = i) \cap (Y = j)\Big) = 0$ puisque : $\Big((X = i) \cap (Y = j)\Big) = \emptyset$

Cas 2 : $j = |i|$
Alors : $\Big((X = i) \cap (Y = j)\Big) = (X = i)$ donc : $P\Big((X = i) \cap (Y = j)\Big) = \frac{1}{2n+1}$

Donc $\forall i \in [\![-n, n]\!] = X(\Omega)$, $\forall j \in [\![0, n]\!] = Y(\Omega)$, $P(X = i \cap Y = j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq |i| \\ \frac{1}{2n+1} & \text{si } j = |i| \end{cases}$

2) Soit $k \in Y(\Omega)$

Cas 1 : $k > 0$

Alors : $(Y = k) = \Big((X = k) \cup (X = -k)\Big)$
Par incompatibilité : $(P(Y = k) = P(X = k) + P(X = -k) = \frac{2}{2n+1}$

Cas 2 : $k = 0$

Alors $(Y = 0) = (X = 0)$ donc $P(Y = 0) = \frac{1}{2n+1}$

$$\boxed{\text{La loi de } Y \text{ est donnée par : } \begin{cases} & Y(\Omega) = [\![0,n]\!] \\ & P(Y=0) = \frac{1}{2n+1} \\ \forall k \in [\![1,n]\!]\ , & P(Y=k) = \frac{2}{2n+1} \end{cases}}$$

3) • Comme X et $-X$ suivent la même loi, $E(X) = E(-X)$ et donc $\boxed{E(X) = 0}$

• $E(Y) = 0.P(Y=0) + \sum\limits_{k=1}^{n} kP(Y=k) = \sum\limits_{k=1}^{n} k\frac{2}{2n+1} = \frac{2}{2n+1}\frac{n(n+1)}{2}$ donc $\boxed{E(Y) = \frac{n(n+1)}{2n+1}}$

• Par définition : $cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

Soit $Z = XY = X\left|X\right|$ alors $E(Z) = \sum\limits_{k=-n}^{n} k\left|k\right| P(X=k) = 0$

Finalement $\boxed{cov(X,Y) = 0}$

4) $P(X = 1 \cap Y = 1) = \frac{1}{2n+1}$

$P(X=1) = \frac{1}{2n+1}$, $P(Y=1) = \frac{2}{2n+1}$ donc $P(X = 1 \cap Y = 1) \neq P(X=1)P(Y=1)$

et donc $\boxed{X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes.}}$

Exercice 2

Soit φ une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ vérifiant : $\begin{cases} \varphi(u) \underset{u=0}{=} \alpha + o(1) \\ \varphi(u) \underset{u\to+\infty}{=} \ell + o(1) \end{cases}$ avec $(\alpha,\ell) \in \mathbb{R}^2$

On considère $f : x \mapsto \int\limits_0^{+\infty} \frac{\varphi(u)}{u^2+x^2}du$

1) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$

2) Simplifier, pour $x > 0$: $\int\limits_0^1 \frac{1}{u^2+x^2}du$ et $\int\limits_0^1 \frac{u}{u^2+x^2}du$

3) Montrer que : $\left|\int\limits_1^{+\infty} \frac{\varphi(u)}{u^2+x^2}du\right| \leq K$ avec K indépendant de x

4) Montrer que : $f(x) = \frac{\ell\pi}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$

5) Trouver un développement asymptotique en 0 du même genre qu'au) 4.

6) ????

---

1) Pour $x>0$ fixé on a $u \mapsto \frac{\varphi(u)}{u^2+x^2}$ continue sur $[0,+\infty[$
Il faut voir ce qui se passe en $+\infty$
On remarque que comme φ est continue, et vu les limites aux bornes, on a : φ bornée sur $\mathbb{R}^+$
Donc, il existe $M>0$ tel que : $\forall x \geq 0$, $|\varphi(x)| \leq M$

Alors : $\forall u \geq 0$, $\left|\frac{\varphi(u)}{u^2+x^2}\right| \leq \frac{M}{u^2+x^2} \leq \frac{M}{u^2}$
Comme $u \mapsto \frac{M}{u^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ alors, par comparaison, $u \mapsto \frac{\varphi(u)}{u^2+x^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$
Comme il n'y avait pas de problème sur $[0,1]$, alors $u \mapsto \frac{\varphi(u)}{u^2+x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et donc : $\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R}^{+*}}$

2) • $\int\limits_0^1 \frac{1}{u^2+x^2}du = \int\limits_0^1 \frac{1}{x^2}\frac{1}{1+(\frac{u}{x})^2}du = [\frac{1}{x}arctan(\frac{u}{x})]_0^1 = \frac{arctan(\frac{1}{x})}{x}$

• $\int\limits_0^1 \frac{u}{u^2+x^2}du = [\frac{1}{2}ln(u^2+x^2)]_0^1 = \frac{1}{2}ln(\frac{1+x^2}{x^2}) = \frac{1}{2}ln(1+\frac{1}{x^2})$

• Bilan : $\boxed{\int\limits_0^1 \frac{1}{u^2+x^2}du = \frac{arctan(\frac{1}{x})}{x} \text{ et } \int\limits_0^1 \frac{u}{u^2+x^2}du = \frac{1}{2}ln(1+\frac{1}{x^2})}$

3) Comme φ est bornée par M (notation du 1)) : $\left|\frac{\varphi(u)}{u^2+x^2}\right| \leq \frac{M}{u^2+x^2} \leq \frac{M}{u^2}$
Donc, comme les intégrales sont convergentes, par inégalités de la moyenne :
$\left|\int\limits_1^{+\infty} \frac{\varphi(u)}{u^2+x^2}du\right| \leq \int\limits_1^{+\infty} \frac{M}{u^2}du = M$

En posant $K=M$, on a donc : $\boxed{\left|\int\limits_1^{+\infty} \frac{\varphi(u)}{u^2+x^2}du\right| \leq K \text{ avec } K \text{ indépendant de } x}$

4) • Pour $x>0$: $f(x) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\varphi(u)}{x^2\left(1+(\frac{u}{x})^2\right)}du$
Effectuons dans $f(x)$ le changement de variable C^1 bijectif : $t=\frac{u}{x}$ (donc $du = xdt$), on a alors :
$f(x) = \frac{1}{x}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\varphi(xt)}{1+t^2}dt \Rightarrow xf(x) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\varphi(xt)}{1+t^2}dt$

• $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ell}{1+t^2}dt = \frac{\ell\pi}{2}$

• Soit $\varepsilon>0$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi(X) = \ell \Rightarrow \exists X_0 >$, $\forall X \geq X_0$, $|\varphi(X)-\ell| \leq \varepsilon$

• Posons $x_0 = \frac{X_0}{\varepsilon}$. Alors $\forall x \geq x_0$ on a : $t \geq \varepsilon \Rightarrow xt \geq x\varepsilon \Rightarrow xt \geq x_0 \Rightarrow |\varphi(xt)-\ell| \leq \varepsilon$

• $xf(x) - \frac{\ell\pi}{2} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\varphi(xt)-\ell}{1+t^2}dt$

• $\left|xf(x)-\frac{\ell\pi}{2}\right| \leq \int\limits_0^{\varepsilon} \underbrace{\left|\frac{\varphi(xt)-\ell}{1+t^2}\right|}_{\leq M}dt + \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} \underbrace{\left|\frac{\varphi(xt)-\ell}{1+t^2}\right|}_{\leq \frac{\varepsilon}{1+t^2}}dt \leq \int\limits_0^{\varepsilon} M + \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{1+t^2}dt = (M+\frac{\pi}{2})\varepsilon$

• On a donc : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_0 > 0$, $\forall x \geq x_0$, $\left|xf(x) - \frac{\ell\pi}{2}\right| \leq (M + \frac{\pi}{2})\varepsilon$

Par définition de la limite on a donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} xf(x) = \frac{\ell\pi}{2}$

On en déduit : $\boxed{f(x) \underset{x=+\infty}{=} \frac{\ell\pi}{2x} + o\big(\frac{1}{x}\big)}$

5) On reprend l'expression du 4) : $xf(x) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\varphi(xt)}{1+t^2} dt$

On a : $\begin{cases} \forall t \in]0,+\infty[\ , \ \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\varphi(xt)}{1+t^2} = \alpha \frac{1}{1+t^2} \\ \forall x > 0 \ , \ t \mapsto \frac{\varphi(xt)}{1+t^2} \text{ est continue par morceaux sur }]0,+\infty[\\ t \mapsto \alpha \frac{1}{1+t^2} \text{ est continue par morceaux sur }]0,+\infty[\\ \forall x > 0 \ , \ \forall t \in]0,+\infty[\ , \ \left|\frac{\varphi(xt)}{1+t^2}\right| \leq \frac{M}{1+t^2} \\ t \mapsto \frac{M}{1+t^2} \text{ est intégrable sur }]0,+\infty[\end{cases}$

Donc, par le théorème de convergence dominée à paramètres :

$$\lim_{x \to 0^+} xf(x) = \lim_{x \to 0^+} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\varphi(xt)}{1+t^2} dt = \int\limits_0^{+\infty} \lim_{x \to 0^+} \frac{\varphi(xt)}{1+t^2} dt = \int\limits_0^{+\infty} \alpha \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\alpha\pi}{2}$$

On en déduit : $\boxed{f(x) \underset{x=0}{=} \frac{\alpha\pi}{2x} + o\big(\frac{1}{x}\big)}$

Planche 20. Mines-Télécom (Swann L.)

Exercice 1

????????????

Exercice 2

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose : $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

1) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

2) Trouver un équivalent de S_n

3) On pose $u_n = \frac{(-1)^n}{S_n + (-1)^n}$. Etudier $\sum u_n$

---

1) D'après le cours et Riemann $\sum \frac{1}{\sqrt{k}}$ est une série divergente à terme positifs donc : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty}$

2) Comme $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$ alors : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in [k, k+1]$, $\frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{t}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$

En intégrant entre k et $k+1$: $\frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq \int\limits_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{t}}dt \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$

On somme de $k=1$ à $k=n$ et on utilise la relation de Chasles : $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq \int\limits_1^{n+1} \frac{1}{\sqrt{t}}dt \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

Donc $S_n + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 1 \leq [2\sqrt{t}]_1^{n+1} \leq S_n$

$\Rightarrow S_n + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 1 \leq 2\sqrt{n+1} - 2 \leq S_n$

$\Rightarrow 1 + \frac{1}{\S_n\sqrt{n+1}} - \frac{1}{S_n} \leq \frac{2\sqrt{n+1}}{S_n} - \frac{2}{S_n} \leq 1$

Compte tenu de la limite du 1) : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2\sqrt{n+1}}{S_n} - \frac{2}{S_n} = 1$

Donc : $S_n \sim 2\sqrt{n+1} \sim 2\sqrt{n}$

Bilan : $\boxed{S_n \sim 2\sqrt{n}}$

3) $u_n = \frac{(-1)^n}{S_n+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{S_n}\frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{S_n}} = \frac{(-1)^n}{S_n}\big(1 - \frac{(-1)^n}{S_n} + o(\frac{1}{S_n})\big) = \frac{(-1)^n}{S_n} - \frac{1}{S_n^2} + o(\frac{1}{S_n^2})$

Posons $a_n = \frac{(-1)^n}{S_n}$ et $b_n = u_n - a_n$ de telle sorte que : $u_n = a_n + b_n$ avec $b_n \sim -\frac{1}{S_n^2}$

Par le théorème spécial on a : $\sum a_n$ convergente.

Comme $b_n \sim -\frac{1}{S_n^2} \sim \frac{-1}{4n} < 0$ et que $\sum \frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente, alors, par la règle de l'équivalent, on a : $\sum b_n$ divergente.

$\begin{cases} u_n = a_n + b_n \\ \sum a_n \text{ convergente} \\ \sum b_n \text{ divergente} \end{cases}$ donc on a : $\boxed{\sum u_n \text{ est divergente.}}$

Planche 21. Mines-Télécom (JeSaisPlusQui)

Exercice 1

1) Trouver les solutions développable en série entière en 0 de : $\begin{cases} xy''(x) + 2y'(x) - xy(x) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

2) Résoudre $(E) \Leftrightarrow xy''(x) + 2y'(x) - xy(x) = 0$ sur $]0,+\infty[$

3) Résoudre $xy''(x) + 2y'(x) - xy(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$

Supposons que $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ait un rayon de convergence $R > 0$ et soit une solution de E sur $]-R;R[$

Comme on peut dériver une série entière terme à terme sur son intervalle ouvert de convergence alors : $\forall x \in]-R;R[$, $\begin{cases} y'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \\ y''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \end{cases}$

On a alors :
y solution de E sur $]-R;R[$
$\Leftrightarrow \forall x \in]-R;R[\ , \quad xy''(x) + 2y'(x) - xy(x) = 0$
$\Leftrightarrow \forall x \in]-R;R[\ , \quad x \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$
$\Leftrightarrow \forall x \in]-R;R[\ , \quad \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} 2n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} = 0$
$\Leftrightarrow (1)$

Changement d'indice : $p - 1 = n + 1 \Leftrightarrow p = n + 2$ dans la dernière somme et $p = n$ dans les deux premières.
$(1) \Leftrightarrow \forall x \in]-R;R[\ , \ \sum_{p=0}^{+\infty} p(p-1)a_p x^{p-1} + \sum_{p=0}^{+\infty} 2p a_p x^{p-1} - \sum_{p=2}^{+\infty} a_{p-2} x^{p-1} = 0$

On fait commencer les sommes au même indice :

$$(1) \Leftrightarrow \forall x \in]-R;R[\ , \ 0 + 0 + \sum_{p=2}^{+\infty} p(p-1)a_p x^{p-1} + 0 + 2a_1 + \sum_{p=2}^{+\infty} 2p a_p x^{p-1} - \sum_{p=2}^{+\infty} a_{p-2} x^{p-1} = 0$$

On regroupe les sommes car elles convergent

$$(1) \Leftrightarrow \forall x \in]-R;R[\ , \ 2a_1 + \sum_{p=2}^{+\infty} [p(p-1)a_p + 2p a_p - a_{p-2}] x^{p-1} = 0$$

Par unicité du DSE_0, puisque $R > 0$

$(1) \Leftrightarrow a_1 = 0$ et $\forall p \geq 2 \ \ p(p-1)a_p + 2p a_p - a_{p-2} = 0$
$\Leftrightarrow a_1 = 0$ et $\forall p \geq 2 \ \ p(p+1)a_p - a_{p-2} = 0$
$\Leftrightarrow a_1 = 0$ et $\forall p \geq 2 \ \ a_p = \frac{1}{p(p+1)} a_{p-2}$

Recherche : $a_2 = \frac{1}{2\times 3} a_0 \qquad a_4 = \frac{1}{4\times 5} a_2 = \frac{1}{2\times 3\times 4\times 5} a_0$
$a_{2n} = \frac{1}{(2n+1)\times(2n)} a_{2n-2} = \frac{1}{(2n+1)\times(2n)} \cdots \frac{1}{2\times 3\times 4\times 5} a_0$

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} a_{2n+1} = 0 \\ a_{2n} = \frac{(1}{(2n+1)!} a_0 \end{cases}$

Au rang 0 : On a déjà montrer que $a_1 = 0$ et on a bien $a_0 = a_0$

Hérédité : On suppose la propriété vraie au rang n et on la montre au rang $n+1$

$a_{2n+3} = \frac{1}{(2n+3)(2n+4)} a_{2n+1} = \frac{1}{(2n+3)(2n+4)} \times 0 = 0$

$a_{2(n+1)} = a_{2n+2} = \frac{1}{(2n+3)(2n+2)} a_{2n} = \frac{1}{(2n+3)(2n+2)} \frac{1}{(2n+1)!} a_0 = \frac{1}{(2n+3)!} a_0 = \frac{1}{(2(n+1)+1)!} a_0$

On a donc bien le résultat au rang $n+1$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} a_{2n+1} = 0 \\ a_{2n} = \frac{1}{(2n+1)!} a_0 \end{cases}$

On a donc $y(x) = a_0 \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n} = a_0 \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$

Or on sait que $\forall x \in \mathbb{R}$, $sh(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

On en déduit que y est de rayon de convergence $+\infty$ et que $xy(x) = a_0 sh(x)$

On a alors : $y(x) = \begin{cases} a_0 \frac{sh(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ a_0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Comme, on a raisonné par équivalences et que $R > 0$ on sait peut remonter les équivalences.

Conclusion :

Les solutions développables en séries entières en 0 de E, sont définies sur $\mathbb{R}$ et s'écrivent :

$$\boxed{y(x) = \begin{cases} a_0 \frac{sh(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ a_0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \text{ avec } a_0 \in \mathbb{R}}$$

2) Posons $y_0(x) = \begin{cases} \frac{sh(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ et cherchons les solutions de l'équation différentielle sous la forme $y(x) = \lambda(x) y_0(x)$

Ce changement de fonction inconnue est licite car, dans cette question, on résout sur $]0, +\infty[$ et que $x \neq 0$ sur cette intervalle.

Alors $y = \lambda y_0 \Rightarrow y' = \lambda' y_0 + \lambda y_0' \Rightarrow y'' = \lambda'' y_0 + 2\lambda' y_0' + \lambda y_0''$

$\forall x > 0$, $xy''(x) + 2y'(x) - xy(x) = 0$
$\Leftrightarrow \forall x > 0$, $x(\lambda'' y_0 + 2\lambda' y_0' + \lambda y_0'') + 2(\lambda' y_0 + \lambda y_0') - x\lambda y_0 = 0$ on utilise y_0 solution
$\Leftrightarrow \forall x > 0$, $x\lambda'' y_0 + 2x\lambda' y_0' + 2\lambda' y_0 = 0$
$\Leftrightarrow \forall x > 0$, $x\lambda'' \frac{sh(x)}{x} + 2x\lambda' \frac{xch(x) - sh(x)}{x^2} + 2\lambda' \frac{sh(x)}{x} = 0$
$\Leftrightarrow \forall x > 0$, $sh(x)\lambda'' + \lambda' \frac{2xch(x) - 2sh(x) + 2sh(x)}{x} = 0$
$\Leftrightarrow \forall x > 0$, $sh(x)\lambda'' + 2ch(x)\lambda' = 0$ on pose $A = \lambda'$
$\Leftrightarrow \forall x > 0$, $A'(x) = \frac{-2ch(x)}{sh(x)} A(x)$ $\int \frac{-ch(x)}{sh(x)} dx = -ln(sh(x))$ on a une EDL_1 homogène
$\Leftrightarrow \forall x > 0$, $A(x) = aexp(-2ln(sh(x)))$ avec $a \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \forall x > 0 \ , \ \lambda'(x) = a\frac{1}{sh^2(x)}$ avec $a \in \mathbb{R}$
$\Leftrightarrow \forall x > 0 \ , \ \lambda(x) = a\frac{-ch(x)}{sh(x)} + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$
$\Leftrightarrow \forall x > 0 \ , \ y(x) = a\frac{-ch(x)}{x} + b\frac{sh(x)}{x}$ avec $(a, bb) \in \mathbb{R}^2$

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E) \text{ sur }]0, +\infty[\text{ s'écrivent : } y(x) = a\frac{-ch(x)}{x} + b\frac{sh(x)}{x} \text{ avec } (a, b) \in \mathbb{R}^2}$$

3) On montrerai comme en 2) que les solutions de (E) sur $]-\infty, 0[$ s'écrivent de la même manière que celle sur $]0, +\infty[$

Supposons que y soit une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ (il y en a au moins une, la solution nulle).

Alors, la restriction de y à $]0, +\infty[$ est solution de (E) sur $]0, +\infty[$ et donc, avec le 2), il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall x > 0 \ , \ y(x) = a\frac{-ch(x)}{x} + b\frac{sh(x)}{x}$

De même, la restriction de y à $]-\infty, 0[$ est solution de (E) sur $]-\infty, 0[$ et donc, il existe $(c, d) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall x < 0 \ , \ y(x) = c\frac{-ch(x)}{x} + d\frac{sh(x)}{x}$

Comme y est solution sur $\mathbb{R}$ alors y est continue en 0 et on a donc :
$\lim\limits_{x \to 0^+} y(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} y(x) = y(0) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} a\frac{-ch(x)}{x} + d\frac{sh(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} c\frac{-ch(x)}{x} + d\frac{sh(x)}{x} = y(0)$

Comme, au voisinage de 0 : $\frac{sh(x)}{x} \sim 1$ et $\frac{ch(x)}{x} \sim \frac{1}{x}$, pour que les limites existe il faut $a = b = 0$ et pour que les limites à gauche et à droite soient les mêmes il faut $b = d$

On a donc : $y = by_0$

Réciproquement les fonctions de cette forme sont solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Bilan : les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont celles trouvées au 1).

Exercice 2

Que dire de $A \in S_n(\mathbb{R})$ vérifiant : $A^5 + A^4 + A^3 + A^2 + A + I_n = 0_{M_n(\mathbb{R})}$?

On a déjà, comme $A \in S_n(\mathbb{R})$, que A est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$.
Si λ est une valeur propre de A, alors λ est réelle et est racine du polynôme annulateur de A : $P = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5$
Pour $X \neq 1$ on a : $P = \frac{1-X^6}{1-X}$, donc les racines réelles de P sont $\{-1, 1\}$ privé de $\{1\}$.
-1 est donc la seule valeur propre possible pour A, donc A est semblable à $-I_n$ et donc $\boxed{A = -I_n}$

Centrale

Centrale : mathématiques 1

Planche 22. Centrale Math 1 *Tom B.*

On s'intéresse à une série `entière` de la forme $S(t) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n t^n$

Q1) On suppose que $\sum a_n$ est convergente.
Montrer que : $\lim\limits_{t\to 1} S(t) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n$ dans les cas suivants

$\begin{cases} i)(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est à termes positifs ou nuls} \\ ii)(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissantes et la série } \sum a_n \text{ est alternée} \end{cases}$

Q2) Application : Calculer $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

`Q3) Calculer` $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

Q4)

Q1) • i) Posons : $\forall n \in \mathbb{N}$: $\begin{array}{cccc} f_n & : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \longmapsto & a_n t^n \end{array}$
Alors $||f_n||_\infty = a_n \geq 0$ et comme $\sum a_n$ est convergente, alors : $\sum f_n$ converge normalement et donc uniformément sur $[0,1]$
Comme les f_n sont continues, par transfert de continuité S est continue sur $[0,1]$
La continuité de S en 1 donne le résultat voulu.

• ii) On pose les mêmes f_n que si dessus.
Alors $\left| S(t) - \sum\limits_{n=0}^{N} f_n(t) \right| \leq |a_n t^n| \leq |a_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par le théorème spécial.
On a encore convergence uniforme (mais peut-être pas normal) et donc S est continue sur $[0,1]$, même fin qu'en i).

Q2) Posons $S(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n+2}}{n(n+1)(n+2)}$ pour pouvoir appliquer Q1)i)
S est une série entière de rayon de convergence 1 et $\forall t \in]-1,1[$, après dérivation terme à terme :
$S'(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$
$S''(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n+2} = \frac{1}{t^2} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n+2}}{n+2} \frac{1}{t^2}\Big(- ln(1-t) - \frac{t^2}{2} - t \Big) = -\frac{-1}{2} - \frac{1}{t} - \frac{ln(1-t)}{t^2}$
Après calculs : $S(t) = -(t-1)^2 \frac{ln(1-t)}{2} + \frac{3t^2}{4} - \frac{t}{2}$

Comme $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} \sim \frac{1}{n^3} > 0$, par équivalent et Riemann : $\sum \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ est convergente et on peut appliquer Q1)i) :

En passant à la limite $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$

Q3) on pose $S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^n}{n}$ pour pouvoir appliquer Q1)ii)

S a pour rayon de convergence 1 et $\forall t \in]-1,1[$, $S'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n t^n = \frac{1}{1+t}$
En intégrant et parce que $S(0) = 0$ on a: $S(t) = -ln(1+t)$ sur $]-1,1[$
Avec Q1)ii) on peut prolonger la formule en $t = 1$ et on obtient : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -ln(2)$

Planche 23. Centrale Math 1 *Nino D.*

On note $K = [0,1] \times [0,1]$ et $U =]0,1[\times]0,1[$
On cherche à étudier : $f : (x,y) \mapsto xy\sqrt{(1-x)(1-y)}$

1) Déterminer le domaine de définition de f, noté D_f.
Représenter D_f graphiquement.

2) Montrer que f admet un maximum et un minimum globaux sur K.

3) Déterminer les extremums locaux de f.

---

1) Pour que f soit définie il faut que $(1-x)(1-y) \geq 0$ donc :

$D_f = \big(]-\infty,1]\times]-\infty,1]\big) \bigcup \big([1,+\infty[\times[1,+\infty[\big)$

2) On remarque que $K \subset D_f$ et que K est une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$.
On a donc f est continue sur une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$ donc d'après le cours f admet un maximum et un minimum sur K.

3) Comme f est C^1 on peut préciser que le minimum et le maximum de f sont atteint à l'interieur de K (c'est à dire U) en un point critique ou sur le bord de K ($\partial K = K \backslash U$)

Recherche des points critiques sur U :
$grad(f)(x,y) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y\sqrt{(1-x)(1-y)} - xy(1-y)\frac{1}{2\sqrt{(1-x)(1-y)}} = 0 \\ x\sqrt{(1-x)(1-y)} - xy(1-x)\frac{1}{2\sqrt{(1-x)(1-y)}} = 0 \end{cases} \quad \text{on utilise } x \neq 0 \text{ et } y \neq 0 \text{ sur } U$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(1-x)(1-y)} = x(1-y)\frac{1}{2\sqrt{(1-x)(1-y)}} \\ \sqrt{(1-x)(1-y)} = y(1-x)\frac{1}{2\sqrt{(1-x)(1-y)}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(1-x)(1-y) = x(1-y) \\ 2(1-x)(1-y) = y(1-x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(1-x) = x \\ 2(1-y) = y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = y = \frac{2}{3}$$

On a $f(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = \frac{4}{27}$ et on remarque que sur ∂K, f est nulle.

Donc le minimum de f vaut 0 et est atteint sur le bord de K.
Le maximum de f vaut $\frac{4}{27}$ et est atteint au point $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

Centrale : mathématiques 2

Planche 24. Centrale Math 2 *Tom B.*

On pourra utiliser **numpy**, **numpy.random**

On considère un ascenseur à p étages. Au rez de chaussée, n personnes montent.
Chaque personne descend au hasard et indépendamment des autres à un étage.
On note X la variable aléatoire comptant le nombre d'arrêts de l'ascenseur.

Q1) Écrire un programme de paramètre (n, p) simulant le nombre d'arrêts de l'ascenseur.

On pourra utiliser **rd.randint(a,b)** renvoyant un entier aléatoire de l'intervalle $[\![a, b]\!]$

Q2) Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, on note X_i la variable aléatoire représentant si l'ascenseur s'arrête ou non à l'étage i.
On a donc $X_i = 1$ si une personne ou plus descend à l'étage i et $X_i = 0$ si aucune ne descend.

a) Donner la loi de X_i

b) Donner le lien entre X et les X_i, puis calculer l'espérance de X en fonction de n et p

c) Calculer $\lim\limits_{p \to +\infty} E(X)$

d) Écrire un programme qui, pour $3 \leq p \leq 20$ effectue 1000 tirages et renvoie une approximation de $E(X)$.
Ceci vérifie-t-il le résultat théorique précédent ?

Q3) Pour deux ensembles finis de cardinal respectivement a et b éléments, on note $S_{a,b}$ le nombre de surjections entre ces deux ensembles.
$S_{a,b}$ est le nombre de surjections de $[\![1, a]\!]$ dans $[\![1, b]\!]$

Q3) a) Exprimer la loi de X à l'aide de la famille $(S_{a,b})_{(a,b)\in\mathbb{N}^2}$
Q3) b) Calculer $S(a, b)$ dans le cas $b > a$
Q3) c) Calculer $S(a, 1)$, $S(a, 2)$ et $S(a, a)$
Q3) d) Calculer $S(a + 1, a)$
Q3) e) On suppose $a > 1$ et $b > 1$. Montrer que :
$S(a, b) = b\big(S(a - 1, b) + S(a - 1, b - 1)\big)$
Q3) f) Ecrire une fonction Python, utilisant les résultats précédents, permettant de calculer $S(a, b)$
Q3) g) Avec Python, calculer $E(X)$ à l'aide de Q3) a) et Q3) f)
Comparer avec le $E(X)$ théorique.

```python
import numpy.random as rd

import math

def Q1(p,n):
    L=[]
    for i in range(n):
        L.append(rd.randint(1,p+1))   # liste des arrêts de chaque personne

    nbARRET=0
    for k in range(1,p+1):
        if k in L:
            nbARRET=nbARRET+1
    return nbARRET
```

Q2) a)Notons Y_k la variable aléatoire donnant le numéro de l'étage auquel la personne k descend. Par hypothèse les Y_k sont indépendantes et suivent toutes une loi uniforme sur $[\![1, p]\!]$

On a $(X_i = 0) = \bigcap_{k=1}^{n} (Y_k \neq i)$

Mais comme les Y_k sont indépendantes : $P(X_i = 0) = \prod_{k=1}^{n} P(Y_k \neq i)$

Et $P(Y_k \neq i) = \frac{p-1}{p}$ par équiprobabilité.

Donc $P(X_i = 0) = \left(\frac{p-1}{p}\right)^n$

Finalement : $\boxed{X_i \text{ suit une loi de Bernoulli de paramètre } 1 - \left(\frac{p-1}{p}\right)^n}$

Q2) b) On a clairement : $\boxed{X = \sum_{k=1}^{p} X_i}$

Par linéarité de l'espérance : $E(X) = \sum_{k=1}^{p} E(X_i)$

Comme on connaît l'espérant d'une loi de Bernoulli : $E(X) = \sum_{k=1}^{p} \left(1 - (\frac{p-1}{p})^n\right)$

On a donc : $\boxed{E(X) = p\left(1 - (\frac{p-1}{p})^n\right)}$

Q2) c) $E(X) = p\big(1 - exp(nln(1 - \frac{1}{p})\big) = p\big(1 - exp(\frac{-n}{p} + o(\frac{1}{p}))\big) = p\big(1 - 1 + \frac{n}{p} + o(\frac{1}{p})\big) = n + o(1)$

Donc : $\boxed{\lim_{p \to +\infty} E(X) = n}$

Remarque : si il y a une infinité d'étage, chaque personne descend à un étage différent ... (trop de choix !!!)

Q2) d) (tester, çà marche)

```
def Q2(n):
    for p in range(3,21):
        e=0
        for i in range(1000):
            e=e+Q1(p,n)
        e=e/1000
        print(e,' expérience pour p=',p)
        f=p*(1-((p-1)/p)**n)
        print(f,' théorique pour p=',p)
```

Remarque : çà à l'air d'être bon, (testé avec d'autre valeurs ...)

Q3) a) On a bien sûr $X(\Omega) \subset [\![1, n]\!]$. On peut même préciser en $X(\Omega) = [\![1, Min(p, n)]\!]$

Pour $k \in X(\Omega)$ on a : $(X = k)$ qui correspond à une surjection de $[\![1, n]\!]$ dans une partie à k éléments de $[\![1, p]\!]$

Il y a : $\binom{p}{k}$ partie de cette forme et $S_{n,k}$ surjections correspondant.

Par équiprobabilité : $\boxed{P(X = k) = \frac{\binom{p}{k} S_{n,k}}{p^n}}$

Q3) b) Si φ est une surjection de $[\![1, a]\!]$ dans $[\![1, b]\!]$ alors $\varphi([\![1, a]\!]) = [\![1, b]\!]$ et donc $a \leq b$
Il n'y a donc pas de bijection de $[\![1, a]\!]$ dans $[\![1, b]\!]$ si $b > a$

Bilan : $\boxed{b > a \Rightarrow S(a, b) = 0}$

Q3) c) Ci-dessous φ désigne une application de $[\![1, a]\!]$ dans $[\![1, b]\!]$

• Si $b = 1$ alors il n'y a qu'une image possible pour un élément de $[\![1, a]\!]$ donc φ est la fonction constante égale à 1 sur $[\![1, a]\!]$ et donc $S(a, 1) = 1$

• Si $b = 2$
Pour commencer, il y a : 2^a applications de $[\![1, a]\!]$ dans $[\![1, 2]\!]$.
Presque toutes sont surjectives, sauf celle constante égale à 1 et celle constante égale à 2. Car une application qui n'est pas constante prend deux valeurs, donc toutes les valeurs de $[\![1, 2]\!]$
On ainsi : $S(a, 2) = 2^a - 2$ (on remarque que si $a = 1$ alors $S(a, 2) = S(1, 2) = 0$, on retrouve le a))

• Si $b = a$, alors comme $card([\![1, a]\!]) = card([\![1, b]\!])$, une surjection est une bijection et à l'aide du cours, on en déduit : $S(a, a) = a!$

• Résumé : $\boxed{\begin{cases} S(a, 1) = 1 \\ S(a, 2) = 2^a - 2 \\ S(a, a) = a! \end{cases}}$

Q3) d) Si φ est une surjection de $[\![1, a+1]\!]$ dans $[\![1, a]\!]$ alors on a :
$\sum\limits_{k=1}^{a} card(f^{-1}(\{k\}) = n+1$ avec $card(f^{-1}(\{k\}) \geq 1$
donc $\sum\limits_{k=1}^{a} [card(f^{-1}(\{k\}) - 1] = 1$ avec $card(f^{-1}(\{k\}) - 1 \geq 0$ et $card(f^{-1}(\{k\}) - 1 \in \mathbb{N}$
On a donc $\exists k_0 \in [\![1, a]\!]$ tel que $card(f^{-1}(\{k_0\}) - 1 = 1 \Rightarrow card(f^{-1}(\{k_0\}) = 2$

Pour choisir une surjection φ de $[\![1, a+1]\!]$ dans $[\![1, a]\!]$ il faut choisir :
l'élément de $[\![1, a]\!]$ qui aura 2 antécédents (a choix)
le couple d'éléments de $[\![1, a+1]\!]$ (m, m') qui sera envoyé sur cette élément ($\binom{a+1}{2}$ choix)
La restriction de φ à $[\![1, a]\!] \backslash \{m, m'\}$ qui est une bijection vers $[\![1, a]\!] \backslash \{k_0\}$ ($(a-1)!$ possibilités).

Donc : $S(a+1, a) = a\binom{a+1}{2}(a-1)! = a\frac{(a+1)!}{2!(a-1)!}(a-1)! = \frac{a(a+1)!}{2}$

On a donc $\boxed{S(a+1, a) = \frac{a(a+1)!}{2}}$

Q3 e) Soit φ est une surjection de $[\![1, a]\!]$ dans $[\![1, b]\!]$.
Alors, il y a b possibilités pour la valeur de $\varphi(a)$
La restriction φ_1 de φ à $[\![1, a-1]\!]$ atteint donc tout les éléments de $[\![1, b]\!] \backslash \{\varphi(a)\}$
On a alors 2 cas :

Cas 1 : $\varphi(a) \in \varphi_1([\![1, a-1]\!])$
Alors φ_1 est une surjection de $[\![1, a-1]\!]$ vers $[\![1, b]\!]$, il y a donc $S(a-1, b)$ possibilités.

Cas 2 : $\varphi(a) \notin \varphi_1([\![1, a-1]\!])$
Alors φ_1 est une surjection de $[\![1, a-1]\!]$ vers $[\![1, b]\!] \backslash \{\varphi(a)\}$, il y a donc $S(a-1, b-1)$ possibilités.

On a donc : $\boxed{S(a, b) = b\big(S(a-1, b) + S(a-1, b-1)\big)}$

Q3) f)

```
def S(a,b):
    if b>a:
        return 0
    if b==1:
        return 1
    if b==2:
        return 2**a-2
    return b*(S(a-1,b)+S(a-1,b-1))
```

Cette fonction récursive est très simple mais très coûteuse en opérations ...

On peut largement l'améliorer en utilisant un dictionnaire :

```
memoSS=dict()

def SS(a,b):
    if (a,b) in memoSS:
        return memoSS(a,b)
    if b>a:
        return 0
    if b==1:
        return 1
    if b==2:
        return 2**a-2
    return b*(SS(a-1,b)+SS(a-1,b-1))
```

Q3) g) (testé, çà marche)

```
def Q4(n,p):
    e=0
    for k in range(1,min(n,p)+1):
        e=e+math.comb(p,k)*S(n,k)*k
    print('E(X) Q1 = ','p*(1-((p-1)/p)**n))
    print('E(X) Q3 =',e/p**n)
```

Planche 25. Centrale Math 2 *Nino D.*

Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$
On veut montrer qu'il existe : L matrice triangulaire inférieure telle que : $A = LL^T$

1) a) Dans les cas suivant, calculer LL^T : $L = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

1) b) En admettant A inversible, quel avantage apporter l'écriture $A = LL^T$ pour résoudre un système de la forme $AX = Y$?

2) Soit $A = (a_{i,j}) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

On définit $L = (\ell_{i,j})$, triangulaire inférieure, par :
$\ell_{1,1} = \sqrt{a_{1,1}}$ et $\forall i \in [\![2, n]\!]$, $\ell_{i,1} = \frac{a_{i,1}}{l_{1,1}}$ ce qui permet de connaître la première colonne

Quand on connaît les $j-1$ première colonne de L (avec $j \in [\![2, n]\!]$), on détermine la j ième par : $\ell_{j,j} = \sqrt{a_{j,j} - \sum\limits_{k=1}^{j-1} \ell_{j,k}^2}$ et $\forall i \in [\![j+1, n]\!]$, $\ell_{i,j} = \frac{a_{i,j} - \sum\limits_{k=1}^{j-1} \ell_{j,k}\ell_{i,k}}{\ell_{j,j}}$

2) a) Implémenter L en fonction de A à l'aide d'une fonction Python.

2) b) Tester avec les matrices du 1°).

2) c) Tester avec A telle que les $a_{i,j} = \begin{cases} 4 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } |i-j| > 1 \\ 1 \text{ si } |i-j| = 1 \end{cases}$

3) Soit L triangulaire inférieure et inversible, on pose : $A = LL^T$comme précédemment.

3)a) Quel est le lien entre $det(A)$ et $det(L)$?

3)b) Montrer que les valeurs propres de A sont positives ou nulles.

3)c) On note u l'endomorphisme associé à A dans $(\mathbb{R}^n, <,>)$ euclidien classique, montre que : $< u(x), x > \geq 0$

4) Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

4)a) Montrer que, en posant $\forall (X,Y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $(X|Y) = X^T A Y$ alors on définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

On note $B = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $B' = (f_1, \ldots, f_n)$ la base orthonormée pour $(.|.)$ obtenue en appliquant l'algorithme de Schmidt à B.

4)b)) Quelle est la forme de P la matrice de passage de B à B' ?

4)c) Calculer $P^T A P$

3)d) Montrer qu'il existe L triangulaire inférieure telle que $A = LL^T$

3)i) Démontrer que si on impose que les coefficients diagonaux de L soit positifs alors L est unique.

---

1)a

```
import numpy as np

L1=np.array([[2,0],[1,1]])
A1=np.dot(L1,np.transpose(L1))
print(L1)
print(A1)

L2=np.array([[1,0],[-1,1]])
A2=np.dot(L2,np.transpose(L2))
print(L2)
print(A2)

L3=np.zeros((5,5))
for i in range(5):
    for j in range(5):
        if i>=j:
            L3[i][j]=j+1
A3=np.dot(L3,np.transpose(L3))
print(L3)
print(A3)
```

On a : $A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, et $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 14 & 14 & 14 \\ 1 & 5 & 14 & 30 & 30 \\ 1 & 5 & 14 & 30 & 55 \end{pmatrix}$

1)b) Pour résoudre $AX = Y \Leftrightarrow LL^T X = Y \Leftrightarrow L(L^T X) = Y$

On résout d'abord $LZ = Y$ puis $L^T X = Y$.

Il vaut mieux résoudre deux systèmes triangulaires, qu'un seul qui ne l'est pas !!!

2)a)

```
def cholesky(A):
    n=A.shape[0]
    L=np.zeros((n,n))
    L[0][0]=np.sqrt(A[0][0])
    for i in range(1,n):
        L[i][0]=A[i][0]/L[0][0]
    for j in range(1,n):
        s=0
        for k in range(j):
            s=s+L[j][k]**2
        L[j][j]=np.sqrt(A[j][j]-s)
        for i in range(j+1,n):
            s=0
            for k in range(j):
                s=s+L[i][k]*L[j][k]
            L[i][j]=(A[j][i]-s)/L[j][j]
    return L
```

2) c)

```
def NewMat(n):
    A=np.zeros((n,n))
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            if i==j:
                A[i][j]=4
            elif abs(i-j)==1:
                A[i][j]=1
    return A

def test2c(n):
    A=NewMat(n)
    L=cholesky(A)
    Abis=np.dot(L,np.transpose(L))
    print('A=',A)
    print('L=',L)
    print('Avérif=',A)

test2c(5)
```

3)a) Si $A = LL^T$ alors : $\boxed{det(A) = (det(L))^2}$

3)b) Soit $\lambda \in sp(A)$. On a donc $\exists X \in \mathbb{R}^n$, $X \neq 0$ et $AX = \lambda X$
Alors : $LL^T X = \lambda X$
$\Rightarrow X^T LL^T X = \lambda X^T X \Rightarrow ||LX||^2 = \lambda ||X||^2 \Rightarrow \lambda \geq 0$ car $||X|| > 0$ et $||LX|| > 0$

On a donc : $\boxed{sp(A) \subset [0, +\infty[}$

3)c) $< u(x), X >= (AX)^T X = X^T L^T l X = ||LX||^2 \geq 0$

4)a) Soit $(X, Y, Z) \in (\mathbb{R}^n)^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ Alors :

i) $(X|Y + \lambda Z) = X^T A(Y + \lambda Z) = X^T AY + \lambda X^T AZ = (X|Y) + \lambda(X|Z)$

ii) $(X|Y) = X^T \underbrace{A}_{=A^T} Y = X^T A^T Y = (AX)^T Y = Y^T (AX) = (Y|X)$

iii) On note $<,>$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.
$A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ donc A est diagonalisable dans une (base orthonormée pour $<,>$) : $(a_1, \dots, a_n)$ telle que : $Aa_k = \lambda_k a_k$ avec $\lambda_k > 0$
On écrit alors : $X = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k a_k$
Alors : $(X|X) = (\sum\limits_{k=1}^{n} x_k a_k)^T A(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k a_k) = (\sum\limits_{k=1}^{n} x_k a_k)^T (\sum\limits_{k=1}^{n} x_k A a_k) = (\sum\limits_{k=1}^{n} x_k a_k)^T (\sum\limits_{k=1}^{n} x_k \lambda_k a_k))$

Mais comme $(a_1, \dots, a_n)$ est orthonormée pour $<,>$ alors : $(X|X) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2$

Donc $(X|X) \geq 0$ car $\lambda_k > 0$

iv) $(X, X) = 0$
$\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{n} \underbrace{\lambda_k}_{>0} x_k^2 = 0 \Rightarrow \forall k \in [\![1, n]\!]$, $\underbrace{\lambda_k}_{\neq 0} x_k^2 = 0 \Rightarrow \forall k \in [\![1, n]\!]$, $x_k = 0 \Rightarrow X = 0_{\mathbb{R}^n}$
$\boxed{(.|.) \text{ est donc un produit scalaire sur } \mathbb{R}^n}$

4)b) Par construction : $\boxed{P \text{ est triangulaire supérieure.}}$

4)c) Notons $(C_1, \dots, C_n)$ les colonnes de P et $B = (b_{i,j}) = P^T AP$
Alors $b_{i,j} = (C_i|C_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} = I_n$
Puisque, les colonnes de P forment une base orthonormée pour $(.|.)$

Bilan : $\boxed{P^T AP = I_n}$

4)d) A partir de 4)c) : $A = (P^{-1})^T P^{-1}$. Donc en posant $L = (P^{-1})^T$ on a : $A = LL^T$, comme de plus P est triangulaire supérieure, alors P^{-1} est triangulaire supérieure et donc L est triangulaire inférieure.

On a donc : $\boxed{\text{Il existe } L \text{ triangulaire inférieure telle que : } A = LL^T}$

4) e) Supposons que $A = LL^T$ avec Ltriangulaire inférieure avec ses termes diagonaux positifs.

Si on pose $A = (a_{i,j})$ et $L = (\ell_{i,j})$
Alors : $a_{1,1} = \ell_{1,1}^2$ et comme $\ell_{1,1} \geq 0$ alors : $\ell_{1,1} = \sqrt{a_{1,1}}$

En regardant la première colonne : $\forall i \in [\![2, n]\!]$: $a_{i,1} = \ell_{i,1}\ell_{1,1}$, donc $\ell_{i,1} = \frac{a_{i,1}}{\ell_{1,1}}$
Il n'y a donc qu'une première colonne possible pour L.

Si on suppose que l'on connaît de manière unique les j première colonne de L avec $j \in [\![1, n-1]\!]$.
Alors : $a_{j,j} = \ell_{j,j}^2 + \sum\limits_{k=1}^{j-1} \ell_{j,k}^2$ donc $\ell_{j,j} = \sqrt{a_{j,j} - \sum\limits_{k=1}^{j-1} \ell_{j,k}^2}$ puisque $\ell_{j,j} \geq 0$
Ensuite, pour $i \in [\![j+1, n]\!]$, $a_{i,j} = \ell_{j,j}\ell_{i,j} + \sum\limits_{k=1}^{j-1} \ell_{j,k}\ell_{i,k}$ donc $\ell_{i,j} = \frac{1}{\ell_{j,j}}\left(a_{i,j} - \sum\limits_{k=1}^{j-1} \ell_{j,k}\ell_{i,k}\right)$

Comme on veut L triangulaire inférieure les autres termes de la colonne valent 0.

Les colonnes de L sont donc uniques.

On a montrer que si les coefficients diagonaux sont positifs, alors L est unique et on justifie l'algorithme utilisé au 2).

Mines-Ponts

Planche 26. Mines-Ponts (Théo) C.

Exercice 1

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On considère p urnes numérotées de 1 à p.
L'urne i contient i boules blanches et $p-i$ boules noires.
On choisit au hasard et de manière équiprobable une urne i et on tire, avec remise et de manière équiprobable, n boules dans l'urne i.
On note A_i l'événement : "le tirage s'effectue dans l'urne i"
On note N_n le nombre de boules blanches obtenues.

1) Déterminer $P_{A_i}(N_n = k)$

2) Déterminer $P(N_n = k)$

3) Déterminer $E(N_n)$ sous forme simplifier.

4) Montrer que : $\lim\limits_{p\to+\infty} P(N_n = k) = \binom{n}{k} \int\limits_0^1 x^k(1-x)^{n-k}dx$ Calculer cette limite.

---

1) $(N_n)|_{A_i} \hookrightarrow B(n, \frac{i}{p})$ et donc $\boxed{P_{A_i}(N_n = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{i}{p}\right)^k\left(\frac{p-i}{p}\right)^{n-k}}$

2) Formule des probabilités totales sur le système complet d'événement $(A_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$, on a : $P(N_n = k) = \sum\limits_{i=1}^{p} P(N_n = k|A_i)P(A_i)$

Comme $P(A_i) = \frac{1}{p}$ par équiprobabilité alors :

$$\boxed{P(N_n = k) = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}\binom{n}{k}\left(\frac{i}{p}\right)^k\left(\frac{p-i}{p}\right)^{n-k}}$$

3) $E(N_n)$

$= \sum\limits_{k=0}^{n} kP(N_n = k)$

$= \sum\limits_{k=1}^{n} k\frac{1}{p} \sum\limits_{i=1}^{p} \binom{n}{k} \left(\frac{i}{p}\right)^k \left(\frac{p-i}{p}\right)^{n-k}$

$= \frac{1}{p} \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{p} k\binom{n}{k} \left(\frac{i}{p}\right)^k \left(\frac{p-i}{p}\right)^{n-k}$ formule du président

$= \frac{1}{p} \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{p} n\binom{n-1}{k-1} \left(\frac{i}{p}\right)^k \left(\frac{p-i}{p}\right)^{n-k}$ sommes finies

$= \frac{n}{p} \sum\limits_{i=1}^{p} \sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \left(\frac{i}{p}\right)^k \left(\frac{p-i}{p}\right)^{n-k}$ changement d'indice $K = k-1$

$= \frac{n}{p} \sum\limits_{i=1}^{p} \sum\limits_{K=0}^{n-1} \binom{n-1}{K} \left(\frac{i}{p}\right)^{K+1} \left(\frac{p-i}{p}\right)^{n-K-1}$

$= \frac{n}{p} \sum\limits_{i=1}^{p} \frac{i}{p} \sum\limits_{K=0}^{n-1} \binom{n-1}{K} \left(\frac{i}{p}\right)^K \left(\frac{p-i}{p}\right)^{n-1-K}$ binôme de Newton

$= \frac{n}{p} \sum\limits_{i=1}^{p} \frac{i}{p} \underbrace{(\frac{i}{p} + \frac{p-i}{p})}_{=1}^{n-1}$

$= \frac{n}{p} \sum\limits_{i=1}^{p} \frac{i}{p}$

$= \frac{n}{p^2} \frac{p(p+1)}{2}$

$= \frac{n(p+1)}{2p}$

On a donc : $\boxed{E(N_n) = \frac{n(p+1)}{2p}}$

4) On a : $P(N_n = k) = \frac{1}{p} \sum\limits_{i=1}^{p} \binom{n}{k} \left(\frac{i}{p}\right)^k \left(\frac{p-i}{p}\right)^{n-k}$

En posant $f : x \in [0,1] \mapsto \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ alors on a : $P(N_n = k) = \frac{1}{p} \sum\limits_{i=1}^{p} f(\frac{i}{p})$

Comme f est continue, alors, par les sommes de Riemann : $\boxed{\lim\limits_{p \to +\infty} P(N_n = k) = \binom{n}{k} \int\limits_0^1 x^k (1-x)^{n-k} dx}$

• Posons : $I_{k,n} = \int\limits_0^1 x^k (1-x)^{n-k} dx$, alors par IPP :

$I_{n,k} = [\frac{x^{k+1}}{k+1}(1-x)^{n-k}]_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{x^{k+1}}{k+1}(-(n-k)x^{n-k-1})dx$ donc $I_{n,k} = \frac{n-k}{k+1} I_{n,k+1}$ et donc $I_{n,k+1} = \frac{k+1}{n-k} I_{n,k}$

$I_{n,0} = \int\limits_0^1 (1-x)^n dx = [\frac{-(1-x)^{n+1}}{n+1}]_0^1 = \frac{1}{n+1}$

$I_{n,1} = \frac{1}{n} I_{n,0} = \frac{1}{n(n+1)}$, $I_{n,2} = \frac{2}{n-1} I_{n,1} = \frac{2}{(n-1)n(n+1)}$, $I_{n,3} = \frac{3}{n-2} I_{n,2} = \frac{3.2.1}{(n-2)(n-1)n(n+1)}$

Par récurrence ... $I_{n,k} = \frac{k!(n-k)!}{(n+1)!}$

$\binom{n}{k} I_{n,k} = \frac{n!)}{k!(n-k)!} \frac{k!(n-k)!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$

Donc $\boxed{\lim\limits_{p \to +\infty} P(N_n = k) = \binom{n}{k} \int\limits_0^1 x^k (1-x)^{n-k} dx = \frac{1}{n+1}}$

Exercice 2

Soit $(E, <,>)$ un espace euclidien et $u \in S(E)$ non nul.

On pose : $\begin{array}{ccccc} f & : & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & ||x||^2 - < u(x), x >^2 \end{array}$

1) Montrer que : f n'est pas minorée.

2) Montrer que : f majorée $\Leftrightarrow$ toutes les valeurs propres de f sont de même signe `et non nulle`.

`3) Déterminer le maximum de` f `dans le cas ou` $sp(u) \subset]0, +\infty[$

`4) Dans cette question on suppose de nouveau que :` $sp(u) \subset]0, +\infty[$`, on pose :` $\lambda = inf(sp(u))$ `et` $F = ker(u - \lambda Id_E)$
`Montrer que la restriction de` f `à` $F^{\perp}$ `est majorée et déterminer son maximum.`

---

1) Par le théorème spectral u est diagonalisable, il existe donc une base orthonormée $B = (e_1, \ldots, e_n)$ telle que : $M_B(u) = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ avec $sp(u) = \{\lambda_k \ , \ k \in [\![1, n]\!]\}$
Si on note les coordonnées de $x \in E$ dans cette base alors : $f(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2\big)^2$

Comme u n'est pas nul alors : $\exists k_0 \in [\![1, n]\!] \ , \ \lambda_{k_0} \neq 0$

Alors dans la direction e_{k_0}, en prenant $x = te_{k_0}$ avec $t \in \mathbb{R}$ on a :
$f(x) = f(te_{k_0}) = t^2 - (\lambda_{k_0} t^2)^2 \underset{t \to +\infty}{\sim} -\lambda_{k_0}^2 t^4 \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$

Donc : $\boxed{f \text{ n'est pas minorée.}}$

2) • Supposons que toutes les valeurs propres de f soit positives et non nulle.
(le cas ou toute les valeurs propres sont négatives se traite de la même manière ou en remarquant que le f associé à $-u$ est le même à cause du carré)

On pose : $\lambda = \inf_{k \in [\![1,n]\!]} \lambda_k$
Par hypothèse $\lambda > 0$
Alors, avec les notations du 1) : $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2 \geq \lambda \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \lambda ||x||^2$
et donc $\big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2\big)^2 \geq \lambda^2 ||x||^4 \Rightarrow -\big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2\big)^2 \leq -\lambda^2 ||x||^4$

Donc $f(x) \leq ||x||^2 - \lambda^2 ||x||^4 = ||x||^2 \left(1 - \lambda^2 ||x||^2\right)$

Si $||x|| \geq \frac{1}{\lambda}$ alors $f(x) \leq 0$

Sur le **fermé borné** $B(0, \frac{1}{\lambda})$, f est une fonction continue, donc, par le théorème des bornes atteintes : $\exists K \in \mathbb{R}$, $\forall x \in B(0, \frac{1}{\lambda})$, $f(x) \leq K$

En posant $M = Max(L, 0)$ alors : $\forall x \in E \;\; f(x) \leq M$ et donc f est majorée.

• Si u admet une valeur propre nulle.
Soit y un vecteur propre associé.
Alors $f(ty) = t^2 \, ||y||^2 \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$
Donc f n'est pas bornée.

• Si u n'admet pas de valeur propre nulle et si les valeurs propres de u ne sont pas toutes du même signe, alors u admet une valeur propre $\lambda > 0$ et une valeur propre $\mu < 0$

Soit y un vecteur propre associé à λ et z un vecteur propre associé à μ.

On a $y \perp z$ puisque $u \in S(E)$ et $\lambda \neq \mu$

Alors $f(ay + bz) = ||ay + bz||^2 - (< a\lambda y + b\mu z, ay + bz >)^2 = a^2 \, ||y||^2 + b^2 \, ||z||^2 - (\lambda a^2 + \mu b^2)^2$

En prenant $b = \frac{-\sqrt{\lambda} a}{\mu}$, on a : $f(ay + bz) = a^2 \, ||y||^2 + b^2 \, ||z||^2 - 0 \geq a^2 \, ||y||^2 \underset{a \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$

Donc f n'est pas majorée.

• En regroupant tout les cas on a :

$\boxed{f \text{ majorée} \Leftrightarrow \text{toutes les valeurs propres de } f \text{ sont de même signe } \texttt{et non nulle}}$

3) Si $sp(u) \subset]0, +\infty[$ on peut noter : $\lambda = inf(sp(A)) > 0$
Soit e_1 un vecteur propre unitaire associé à λ et $(e_1, \text{`} \ldots, e_n)$ une base orthonormée tel que : $M_B(u) = diag(\lambda, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$
Comme précédemment, avec $\lambda_1 = \lambda$: $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 - \big(\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2 \big)^2$
Mais $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_k \leq \lambda > 0$ donc :
$f(x) \leq \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 - \big(\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda x_k^2 \big)^2 \Rightarrow f(x) \leq ||x||^2 - \lambda^2 \, ||x||^4$

Etudions : $\varphi : t \in [0, +\infty[\mapsto t - at^2$ (on prendra $t = ||x||^2$ et $a = \lambda^2$ >)
$\varphi'(t) = 1 - 2at$

t	0		$\frac{1}{2a}$		
$\varphi'(t)$		$+$	0	$-$	
$\varphi(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4a}$	$\searrow$	$-\infty$

De plus $f(\frac{1}{2a} e_1) = \frac{1}{4a}$ et donc :

$\boxed{\text{Si } sp(u) \subset]0, +\infty[\text{ alors le maximum de } f \text{ vaut : } \frac{1}{4 \inf(sp(u))^2}}$

4) On commence par remarqué que $F^\perp$ est stable par u puisque F est un sous-espace propre de u et que $u \in S(E)$
On peut reprendre les raisonnement précédent et on obteint :
Si $sp(u) = \{\lambda_k \ , \ k \in [\![1, p]\!]\}$ avec $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_p$ alors : $\boxed{\max_{x \in F^\perp} f(x) = \lambda_2}$

Planche 27. Mines-Ponts (Mattéo B.)

Exercice 1

Soit φ tel que pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$, $\varphi(M) = U^{-1}MU$ avec $U \in GL_n(\mathbb{R})$.
$\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire canonique.

Q1) Montrer que si les colonnes de U forment une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$ et sont de même norme alors $\varphi \in O(M_n(\mathbb{R}))$

Q2) Montrer la réciproque.

Q1) • On note $U = (C_1, C_2, \dots, C_n)$ (C_i est la i-ième colonne de U)

Si les colonnes de U forment une base orthogonale et que toutes les colonnes ont même norme.

Alors en posant : $\lambda = ||C_1|| = \dots = ||C_n||$, on a : $(\frac{1}{\lambda}C_1, \frac{1}{\lambda}C_2, \dots, \frac{1}{\lambda}C_n)$ qui est une base orthonormée et donc $\frac{1}{\lambda}U \in O_n(\mathbb{R})$

Si on pose $V = \frac{1}{\lambda}U$ alors : $V \in O_n(\mathbb{R})$ donc $V^{-1} = V^T$ et donc $U^{-1} = \frac{1}{\lambda}V^T$

• Alors : $\varphi(M) = U^{-1}MU = \frac{1}{\lambda}V^T M \lambda V = V^T M V$

• $||\varphi(M)||^2$
$= tr(\varphi(M)\varphi(M)^T)$
$= tr\big((V^T MV)(V^T MV)^T\big)$
$= tr\big(V^T M \underbrace{V V^T}_{I_n} M^T V\big)$
$= tr\big((V^T M M^T)V\big)$
$= tr\big(V(V^T M M^T)\big)$
$= tr\big((\underbrace{V V^T}_{I_n}) M M^T)\big) = tr\big(M M^T)\big) = ||M||^2$

Comme une norme est positive on a : $||\varphi(M)|| = ||M||$

Donc φ conserve la norme et donc : $\boxed{\varphi \in O(M_n(\mathbb{R}))}$

Q2) Soit $U \in M_n(\mathbb{R})$ inversible telle que : $(\varphi : M \mapsto U^{-1}MU) \in O(M_n(\mathbb{R}))$

• Notons : C_k la k-ième colonne de U, L_k la k-ième ligne et $a_{i,j}$ le (i,j) ième coefficient de U. Notons : K_k la k-ième colonne de U^{-1}

• Si on prend $M = (0, \dots, 0, C_i, 0, \dots, 0)$ avec toute les colonnes nulles sauf la i-ième alors :

$$U^{-1}M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & 1 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ seul le coefficient } (i,i) \text{ est non nul.}$$

On a enfin : $\varphi(M) = U^{-1}MU = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ L_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Par conservation de la norme : $||\varphi(M)|| = ||M|| \Rightarrow ||C_i|| = ||L_i||$

• Si on prend $M = (0, \dots, 0, C_1, 0, \dots, 0)$ avec la i-ième colonne qui vaut C_1 alors :

$$U^{-1}M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ avec le 1 sur la } i \text{ ième colonne.}$$

et $\varphi(M) = U^{-1}MU = \begin{pmatrix} L_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Par conservation de la norme : $||\varphi(M)|| = ||M|| \Rightarrow ||C_1|| = ||L_i||$

• On déduit des deux points précédents que toutes les colonnes et toutes les lignes de U ont la même normes.

On note λ cette valeur commune.

• Si on prend M la matrice dont tout les coefficients sont nuls sauf le coefficient (i,j) qui vaut 1.

Alors : $MU = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ L_j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ matrice dont seule la i-ième ligne est non nulle.

$\varphi(M) = U^{-1}MU = (a_{j,1}K_i, , \dots, a_{j,k}K_i, \dots, a_{j,n}K_i)$

Par conservation de la norme : $||\varphi(M)|| = ||M|| \Rightarrow 1 = ||K_i||\,||L_j||$

Toutes les colonnes de U^{-1} ont donc la même norme et cette norme vaut $\frac{1}{\lambda}$

• Posons $V = \frac{1}{\lambda}U$ alors toutes les colonnes et les lignes de V ont pour norme 1.
Alors $V^{-1} = \lambda U^{-1}$ et toutes les colonnes de V^{-1} ont pour norme 1.

• Comme en Q1) on remarque que : $\varphi(M) = U^{-1}MU = (\frac{1}{\lambda}V^{-1})M(\lambda V) = V^{-1}MV$

• On note C'_k les colonnes de V et K'_k les colonnes de V^{-1} qui comme ont la déjà vu sont de norme 1.

• Si on prend $M = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (C'_i)^T \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ (seule la i ième ligne est non nulle.)

Alors $MV = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ < C'_1, C'_i > & \dots & < C'_n, C'_i > \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ (seule la i ième ligne est non nulle.)

et $\varphi(M) = V^{-1}MV = (< C'_1, C'_i > K'_i, \dots, < C'_n, C'_i > K'_i)$

Par conservation de la norme : $||C_i'||^2 = ||K_i'||^2 \left(\sum\limits_{k=1}^{n} < C_k', C_i' >^2 \right)$

Comme $||C_i'|| = ||K_i'|| = 1$ alors : $\sum\limits_{k=1}^{n} < C_k', C_i' >^2 = 1$

Donc : $\underbrace{< C_i', C_i' >}_{=1} + \sum\limits_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} < C_k', C_i' >^2 = 1$

$\Rightarrow \sum\limits_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} < C_k', C_i' >^2 = 0$ (somme de termes positifs nulle)

$\Rightarrow \forall k \in [\![1, n]\!] \backslash \{i\} < C_k', C_i' >= 0$

- On a donc démontrer que $(C_1', \ldots, C_n')$ est une base orthonormée et donc que $V \in O_n(\mathbb{R})$

- Comme $V \in O_n(\mathbb{R})$ et $U = \lambda V$ alors on a bien U qui vérifie les bonnes hypothèses et donc on a démontrer la réciproque.

Exercice 2

Soit n un entier non nul.
On donne $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Q1) Déterminer la limite de $I_n = \int\limits_0^1 nln(1 + t^n)dt$

Q2) Montrer que si f est une fonction continue sur $[0, 1]$, $\int\limits_0^1 nln(1 + t^n)f(t)dt$ converge quand n rend vers $+\infty$ et exprimer sa limite sous forme intégrale.

---

1) • On effectue dans I_n le changement de variable C^1 bijectif $u = t^n \Leftrightarrow t = u^{1/n}$ et donc $dt = \frac{1}{n}\frac{u^{1/n}}{u}du$ et on en déduit : $I_n = \int\limits_0^1 u^{1/n}\frac{ln(1+u)}{u}du$

• On pose maintenant : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall u \in]0, 1[$, $f_n(u) = u^{1/n}\frac{ln(1+u)}{u} = exp(\frac{1}{n}ln(u))\frac{ln(1+u)}{u}$

On a alors : (f_n) converge simplement vers $f : u \in]0, 1[\mapsto \frac{ln(1+u)}{u}$

Comme de plus, les fonctions sont continues par morceaux sur $]0, 1[$
et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall u \in]0, 1[$, $|f_n(t)| \leq f(t)$ avec f intégrable sur $]0, 1[$ (puisque f est prolongeable par continuité en 0),
alors, on peut appliquer le théorème de convergence dominée et on en déduit :
$\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = \int\limits_0^1 f(u)du = J$

• $\forall u \in]0,1[\ ,\ f(u) = \frac{ln(1+u)}{u} = \frac{1}{u}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}u^k}{k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}u^{k-1}}{k}$

On pose : $g_k : u \in]0,1[\mapsto \frac{(-1)^{k+1}u^{k-1}}{k}$

Alors les (g_k) sont continue par morceaux et intégrable sur $]0,1[$. De plus $(\sum_{k=1}^{+\infty} g_k)$ converge simplement vers f qui est continue par morceaux sur $]0,1[$

De plus $\int_0^1 g_k(u)du = \int_0^1 \frac{(-1)^{k+1}u^{k-1}}{k} = \frac{(-1))^{k+1}}{k^2}$ et comme g_k est de signe constant : $\int_0^1 |g_k(u)|\,du = \frac{1}{k^2}$ donc avec les séries de Riemann $\sum \int_0^1 |g_k(u)|\,du$ est convergente.

On peut alors appliquer le théorème d'intégration terme à terme et on a : $J = \int_0^1 \sum_{k=1}^{+\infty} g_k(u)du = \sum_{k=1}^{+\infty}\int_0^1 g_k(u)du$ et donc $J = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$

• Mais, par sommation par paquet, puisque $(\frac{1}{n^2})$ est sommable, en séparant pairs et impairs on a : $J = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{2p+1}}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{2p}}{(2p+1)^2} \Rightarrow J = -\frac{1}{4}\underbrace{\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2}}_{\frac{\pi^2}{6}} + \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}$

De même : $\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}$

Donc : $\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}(1-\frac{1}{4}) = \frac{\pi^2}{8}$

Donc $J = -\frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{12}$ et finalement : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = \frac{\pi^2}{12}}$

2) On pose $K_n = \int_0^1 nln(1+t^n)f(t)dt$

En effectuant le changement de variable C^1 bijectif $u = t^n$ alors : $K_n = \int_0^1 u^{1/n}\frac{ln(1+u)}{u}f(u^{1/n})du$

Comme f est continue sur $[0,1]$ donc en 1, alors : $\forall u \in]0,1[\ ,\ u^{1/n}\frac{ln(1+u)}{u}f(u^{1/n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{ln(1+u)}{u}f(1)$

On peut alors reprendre la démarche du 1) et on obtient : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} K_n = f(1)\frac{\pi^2}{12}}$
