

FORMULAIRE RENTREE

1 Quelques formules de bases pour les calculs

1.1 Les fractions

Théorème . Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$ tels que $b \neq 0$ et $d \neq 0$ alors : $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ et $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

Si de plus $c \neq 0$ alors : $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$

1.2 Les identités remarquables

Théorème . Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ alors :
$$\begin{cases} (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \\ (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \\ a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \end{cases}$$

1.3 Exponentielle - logarithme - puissances

Théorème . Soit $(a, b) \in]0; +\infty[^2$ alors
$$\begin{cases} \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) \\ \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b) \\ \ln(a^b) = b\ln(a) \end{cases}$$

Théorème . Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ alors : $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$ et $\exp(a-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$

Théorème . Soit $(a, c) \in]0; +\infty[$, $b \in \mathbb{R}$ alors :
$$\begin{cases} a^0 = 1 \\ a^b = \exp(b\ln(a)) \\ a^b a^c = a^{b+c} \\ (a^b)^c = a^{bc} \\ (ac)^b = a^b c^b \end{cases}$$

2 Trigonométrie

Les courbes représentatives des fonctions sinus, cosinus et tangente sont à connaître.

2.1 Ensembles de définition et dérivées

- $\forall t \in \mathbb{R}, \quad \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$
 - cos et sin sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec, pour tout entier naturel n et tout réel t : $\cos^{(n)}(t) = \cos\left(t + n\frac{\pi}{2}\right)$ $\sin^{(n)}(t) = \sin\left(t + n\frac{\pi}{2}\right)$
 - tan est définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} I_k$ où $I_k = \left] \frac{-\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$
 - tan est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur D et $\forall t \in D, \quad \tan'(t) = 1 + \tan^2(t) = \frac{1}{\cos^2(t)}$

2.2 Formules d'Euler

$\forall t \in \mathbb{R}, \quad e^{it} = \cos(t) + i\sin(t), \quad e^{-it} = \cos(t) - i\sin(t), \quad \cos(t) = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) \quad \sin(t) = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})$

2.3 Valeurs remarquables

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(t)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(t)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(t)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\times$

2.4 Formules d'addition

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$

$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$$

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(b)\sin(a)$$

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(b)\sin(a)$$

$$(\text{sous réserve que chaque terme existe}) : \tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$$

$$\text{Pour tout réel } t \text{ et tout entier naturel } n : \cos(nt) = \operatorname{Re} \left[(\cos(t) + i \sin(t))^n \right] \text{ et } \sin(nt) = \operatorname{Im} \left[(\cos(t) + i \sin(t))^n \right]$$

2.5 Formules de duplication

$$\forall t \in \mathbb{R} \begin{cases} \cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = 1 - 2\sin^2(t) = 2\cos^2(t) - 1 \\ \sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t) \end{cases}$$

2.6 Angle moitié

(sous réserve que chaque terme existe)

$$\begin{aligned} \cos(t) &= \frac{1 - \tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{t}{2}\right)} & \sin(t) &= \frac{2 \tan\left(\frac{t}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{t}{2}\right)} & \tan(t) &= \frac{2 \tan\left(\frac{t}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{t}{2}\right)} \\ 1 + e^{it} &= e^{it/2} \left(e^{-it/2} + e^{it/2} \right) = 2e^{it/2} \cos\left(\frac{t}{2}\right) & 1 - e^{it} &= e^{it/2} \left(e^{-it/2} - e^{it/2} \right) = -2ie^{it/2} \sin\left(\frac{t}{2}\right) \end{aligned}$$

2.7 Période, antipériode

$\cos$ et $\sin$ sont 2π -périodiques, $\tan$ est π -périodique.

$$\text{Pour tout réel } t \text{ et tout entier relatif } k : \begin{cases} \sin(t + k\pi) = (-1)^k \sin(t) \\ \cos(t + k\pi) = (-1)^k \cos(t) \\ \tan(t + k\pi) = \tan(t) \end{cases}$$

2.8 Arcs associés

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos(t) \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin(t) \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \frac{1}{\tan(t)} \quad (t \in \mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{2}\mathbb{Z})$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = \cos(t) \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = -\sin(t) \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = \frac{-1}{\tan(t)} \quad (t \in \mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{2}\mathbb{Z})$$

$$\sin(\pi - t) = \sin(t) \quad \cos(\pi - t) = -\cos(t) \quad \tan(\pi - t) = -\tan(t) \quad (t \in \mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{2}\mathbb{Z})$$

2.9 Formules de linéarisation (transformation de produits en sommes)

$$\begin{cases} \cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)) \\ \sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b)) \\ \sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b)) \end{cases}$$

2.10 Transformations de sommes en produits

$$\sin(p) + \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \quad \sin(p) - \sin(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \quad \cos(p) - \cos(q) = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

2.11 Équations trigonométriques

	équation (d'inconnue x)	ensemble des solutions
Étant donné un réel α , alors :	$\sin(x) = \sin(\alpha)$	$S = \{\alpha + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \alpha + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
	$\cos(x) = \cos(\alpha)$	$S = \{\alpha + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\alpha + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
	$\tan(x) = \tan(\alpha)$	$S = \{\alpha + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

3 Formules de dérivation

- Les formules $(cte)' = 0$, $(x)' = 1$, $(x^2)' = 2x$, $(x^3)' = 3x^2$, $\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ sont toutes résumées par l'unique formule
 $(x^n)' = nx^{n-1}$
- Soient λ, μ deux réels, u, v deux fonctions dérivables.
 $(\lambda u + \mu v)' = \lambda u' + \mu v'$ $(uv)' = u'v + uv'$ $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
 $(e^u)' = u' \times e^u$ $(\ln(u))' = u' \times \frac{1}{u}$ $\left(\frac{1}{u}\right)' = u' \times \frac{-1}{u^2}$ $(\sqrt{u})' = u' \times \frac{1}{2\sqrt{u}}$
 $(u^2)' = u' \times 2u$ $(u^3)' = u' \times 3u^2 \dots$

4 Croissances comparées

Proposition (Croissances comparées)

- Pour tous réels strictement positifs α et β , on a

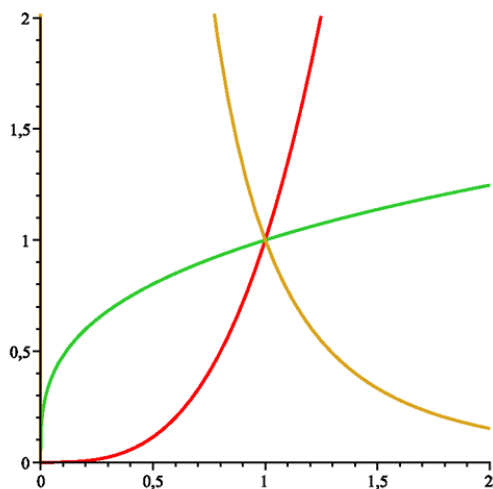
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\beta |\ln x|^\alpha = 0$$

- Pour tout réel a strictement supérieur à 1 et tout réel α , on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x |x|^\alpha = 0$$

5 Fonctions puissances

Fonctions puissance



$\alpha \geq 1 :$

Valeur de x	0	1	$+\infty$
Signe de $\alpha x^{\alpha-1}$			
Variations de x^α			

$0 \leq \alpha < 1 :$

Valeur de x	0	1	$+\infty$
Signe de $\alpha x^{\alpha-1}$			
Variations de x^α			

$\alpha < 0 :$

Valeur de x	0	1	$+\infty$
Signe de $\alpha x^{\alpha-1}$			
Variations de x^α			