

A rendre le jeudi 10 septembre 2026

Devoir à la maison n°1 de Mathématiques

Code couleur : noir plutôt facile, à faire par tous
 bleu un peu plus dur, (où complément)
 rouge assez difficile
 vert difficile

Exercice 1

Donner le développement limité en 0 à l'ordre 3 de $x \mapsto \ln(1 + \operatorname{sh}(x))$

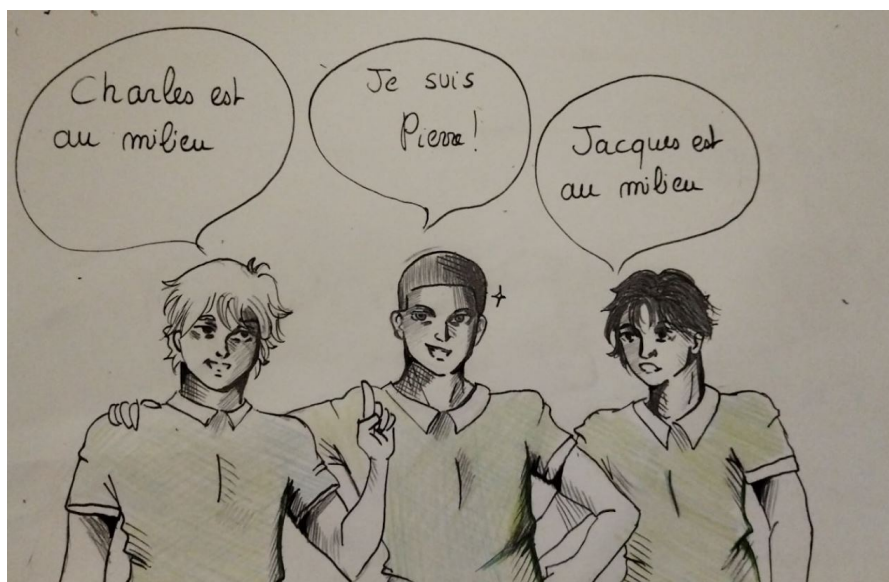
Exercice 2

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \sin(x)} \right)$

Exercice 3

Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$. Montrer qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) = c$

Exercice 4



Vous savez que Jacques ne ment jamais et que Charles ment toujours.
Cette fois-ci, Pierre a-t-il menti ?

Problème 1

On note $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Partie I : Étude d'une fonction

1. (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
(b) Justifier que f est de classe C^1 sur $] -\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in] -\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.
(c) Montrer : $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2}$
(d) Établir que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et préciser $f'(0)$.
2. (a) Étudier les variations de l'application $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$u(x) = (1 - x)e^x - 1$$

- (b) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) < 0$.
- (c) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$
Dresser le tableau des variations de f .
- (d) Trouver $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$
Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?
- (e) Tracer l'allure de la courbe représentative de f .

Partie II : Étude d'une suite récurrente associée à la fonction f

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que f admet un point fixe et un seul, noté α , que l'on calculera.

Remarque : un point fixe de f est un réel x tel que : $f(x) = x$

2. (a) Établir : $\forall x \in [0; +\infty[, e^{2x} - 2x e^x - 1 \geq 0$
(b) Montrer : $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) + \frac{1}{2} = \frac{e^{2x} - 2x e^x - 1}{2(e^x - 1)^2}$
(c) Montrer : $\forall x \in [0; +\infty[, -\frac{1}{2} \leq f'(x) < 0$.
(d) Établir : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$
3. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} (1 - \alpha)$
4. Conclure que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α .
5. Écrire une fonction Python qui calcule et affiche le plus petit entier naturel n tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-5}$

Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$G(x) = \int_x^{2x} f(t) dt$$

1. Montrer que G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$G'(x) = \begin{cases} \frac{x(3 - e^x)}{e^{2x} - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2. (a) Montrer : $\forall x \in [0; +\infty[$, $0 \leq G(x) \leq x f(x)$.
En déduire la limite de G en $+\infty$.

(b) Montrer : $\forall x \in]-\infty; 0]$, $G(x) \leq x f(x)$.
En déduire la limite de G en $-\infty$.

3. Dresser le tableau des variations de G . On n'essaiera pas de calculer $G(\ln 3)$.

Problème 2

Le but du problème est l'étude de la suite récurrente non linéaire $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = L \\ u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n} \end{cases} \quad \text{où } L \text{ est un nombre réel strictement positif.}$$

On pose : $m = \min(1, L)$ et $M = \max(1, L)$

Dans la partie A on étudie les premières propriétés de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$, dans la partie B, qui est indépendante de la A, on étudie une suite récurrente auxiliaire, et dans la partie C, on termine l'étude la suite initiale $(u_n)_{n \geq 0}$.

Partie A : premières propriétés de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$

A.1) Montrer que pour tout $n \geq 1$ on a : $m \leq u_n \leq 4M$

A.2) En supposant que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge, déterminer la valeur de sa limite.

Partie B : une suite récurrente auxiliaire

Dans cette partie K est un réel vérifiant : $K \in]0, \frac{1}{2}[$

B.1) Soit f le polynôme définie par $f(x) = x^2 - Kx - K$

Calculer $f(-1)$, $f(0)$ et $f(1)$ et montrer que f admet deux racines réelles que l'on notera c et C avec $c < C$

B.2) Soit H un nombre réel strictement positif. On considère une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq v_0 \leq H \\ 0 \leq v_1 \leq HC \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+2} = K(v_{n+1} + v_n) \end{array} \right. \quad \text{Montrer que : } \forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq v_n \leq HC^n$$

B.3) Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Partie C : fin de l'étude de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$

C.1) Montrer que pour tout $n \geq 0$, on a :

$$|u_{n+2} - 4| \leq \frac{|u_{n+1} - 4|}{\sqrt{u_{n+1} + 2}} + \frac{|u_n - 4|}{\sqrt{u_n + 2}}$$

C.2) On pose $K = \frac{1}{\sqrt{m+2}}$

On définit une suite récurrente $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :
$$\left\{ \begin{array}{l} w_0 \geq 4 \\ w_1 \geq |L - 4| \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+2} = K(w_{n+1} + w_n) \end{array} \right.$$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - 4| \leq w_n$

C.3) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge.